

**B. GERMAIN-BONNE**

**Brève communication. Transformations de suites**

*Revue française d'automatique informatique recherche opérationnelle. Mathématique*, tome 7, n° R1 (1973), p. 84-90

[http://www.numdam.org/item?id=M2AN\\_1973\\_\\_7\\_1\\_84\\_0](http://www.numdam.org/item?id=M2AN_1973__7_1_84_0)

© AFCET, 1973, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Revue française d'automatique informatique recherche opérationnelle. Mathématique » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

## TRANSFORMATIONS DE SUITES

par B. GERMAIN-BONNE (1)

Résumé. — *Étude des propriétés de fonctions permettant de transformer une suite convergente en une autre suite qui converge vers la même limite, avec une meilleure rapidité de convergence.*

### INTRODUCTION

Soit  $(S_i)$  une suite de nombres réels, convergente, et de limite  $S$ . Nous nous proposons d'étudier des transformations de la forme  $y = G(x_0, x_1, \dots, x_n)$ , que nous appliquerons à  $(n + 1)$  éléments consécutifs de la suite. Notons  $T_i$  le transformé de  $S_i, S_{i+1}, \dots, S_{i+n}$ ; nous déterminerons des conditions (sur la suite  $(S_i)$  et les transformations à  $(n + 1)$  variables) permettant d'avoir les propriétés suivantes :

$$\lim_{i \rightarrow \infty} T_i = \lim_{i \rightarrow \infty} S_i = S \quad (\text{propriété de régularité})$$

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{T_i - S}{S_i - S} = 0 \quad (\text{propriété d'accélération de convergence}).$$

### I. — TRANSFORMATIONS REGULIERES

#### 1-0. Définition

Soient  $S_i, S_{i+1}, \dots, S_{i+n}$   $(n + 1)$  éléments consécutifs d'une suite convergente, de limite  $S$ ; soit  $G$  une fonction de  $(n + 1)$  variables. La transformation  $G$  est *régulière* pour la suite  $(S_n)$  si :

$$\lim_{i \rightarrow \infty} G(S_i, S_{i+1} \dots S_{i+n}) = \lim_{i \rightarrow \infty} S_i = S.$$

---

(1) Maître-Assistant, Laboratoire de Calcul Numérique, Faculté des Sciences de Lille.

**1-1. Hypothèses**

H-0.  $G$  est une fonction définie et continue sur  $\mathbf{R}^{n+1}$ .

H-1. La fonction  $G$  est *homogène* de degré 1 :

$$G(ax_0, ax_1, \dots, ax_n) = aG(x_0, x_1, \dots, x_n) \quad \forall a \in \mathbf{R}.$$

H-2. La fonction  $G$  est *translative*

$$G(x_0 + t, \dots, x_n + t) = G(x_0, x_1, \dots, x_n) + t \quad \forall t \in \mathbf{R}.$$

**1-2. Propriétés**

1.  $G(x, x, \dots, x) = x \quad \forall x$

En effet  $H_1 \Rightarrow G(0, 0, \dots, 0) = 0$

$$H_2 \Rightarrow G(t, t, \dots, t) = G(0 \dots 0) + t \quad \forall t.$$

2. Soit  $\mathcal{D}_{n+1}$  le sous-ensemble de  $\mathbf{R}^{n+1}$  formé par les vecteurs ayant toutes leurs composantes distinctes ( $x = (x_0, x_1 \dots x_n) \in \mathcal{D}_{n+1} \Leftrightarrow x_i \neq x_j \quad \forall i \neq j$ ).

Soit  $\mathcal{F}_{n-1}$  le sous-ensemble de  $\mathbf{R}^{n-1}$  formé par les vecteurs ayant toutes leurs composantes  $\neq 0$ .

**Théorème :** Toute transformation  $G$  définie et continue sur  $\mathcal{D}_{n+1}$  et vérifiant les hypothèses  $H_1, H_2$  peut être sous la forme :

$$G(x_0, x_1, \dots, x_n) = x_0 + (x_1 - x_0)g\left(\frac{x_2 - x_1}{x_1 - x_0}, \dots, \frac{x_{i+1} - x_i}{x_i - x_{i-1}}, \dots, \frac{x_n - x_{n-1}}{x_{n-1} - x_{n-2}}\right)$$

$g$  étant une fonction de  $(n - 1)$  variables définie et continue sur  $\mathcal{F}_{n-1}$ .

*Démonstration.* Soient  $x_0, x_1, \dots, x_n$   $(n + 1)$  nombres réels distincts. D'après  $H_1$  et  $H_2$  on peut écrire :

$$G(x_0, x_1, \dots, x_n) = x_0 + (x_1 - x_0)G\left(0, 1, \frac{x_2 - x_0}{x_1 - x_0}, \dots, \frac{x_i - x_0}{x_1 - x_0}, \dots, \frac{x_n - x_0}{x_1 - x_0}\right).$$

Posons  $X_j = \frac{x_{j+1} - x_j}{x_j - x_{j-1}} \quad Y_j = \frac{x_j - x_0}{x_1 - x_0}$ .

On a  $Y_0 = 0$

$Y_1 = 1$

$$Y_i = 1 + \sum_{j=1}^{i-1} X_1 \dots X_j \quad i \geq 2.$$

Chaque  $Y_i$  peut être considéré comme une fonction définie et continue des  $X_j$  (le cas  $X_i = 0$  étant exclu).

Notons  $G(0, 1, y_2 \dots y_n) = g(X_1 \dots X_{n-1})$ ,  $g$  est une fonction des  $(n-1)$  variables  $X_1 \dots X_n$  continue sur  $\mathcal{F}_{n-1}$ .

On peut donc écrire

$$G(x_0 \dots x_n) = x_0 + (x_1 - x_0)g\left(\frac{x_2 - x_1}{x_1 - x_0}, \dots, \frac{x_n - x_{n-1}}{x_{n-1} - x_{n-2}}\right).$$

3. A toute fonction  $g$  définie et continue sur  $\mathcal{F}_{n-1}$ , on peut associer  $G$  définie sur  $\mathcal{D}_{n+1}$ , continue et satisfaisant à  $H_1$  et  $H_2$ .

$$\text{Soit } G(x_0, \dots, x_n) = x_0 + (x_1 - x_0)g\left(\frac{x_2 - x_1}{x_1 - x_0}, \dots, \frac{x_n - x_{n-1}}{x_{n-1} - x_{n-2}}\right).$$

$G$  est définie pour tout ensemble  $(x_0 \dots x_n)$  de valeurs distinctes ( $x_i \neq x_j$  si  $i \neq j$ ).

$G$  vérifie  $H_2$ .

$G$  vérifie  $H_1$  pour  $a \neq 0$  :  $G(ax_0 \dots x_n) = aG(x_0 \dots x_n)$ .

( $G$  vérifie aussi  $H_1$  pour  $a = 0$  si on pose  $G(0, \dots, 0) = 0$ .)

### 1-3. Application aux transformations régulières de suites

Soit  $(S_n)$  une suite convergente, de limite  $S$ .

**Théorème 1.** Toute transformation  $G$  satisfaisant aux hypothèses  $H_0, H_1, H_2$  est régulière pour toute suite convergente.

*Démonstration* : D'après la propriété 1,  $G(S, S, \dots, S) = S$ .

La fonction  $G$  étant continue en  $S$ ,

$$\lim_{i \rightarrow \infty} G(S_i, S_{i+1}, \dots, S_{i+n}) = G(S, S, \dots, S) = S.$$

**Théorème 2.** Toute transformation  $G$  définie et continue sur  $\mathcal{D}_{n+1}$ , satisfaisant aux hypothèses  $H_1, H_2$  est régulière pour une suite  $(S_n)$  ayant les propriétés suivantes : à partir d'un certain rang les  $S_i$  sont distincts (suite non stationnaire) et

$$\left| \frac{S_{i+1} - S_i}{S_i - S_{i-1}} \right| < M.$$

*Démonstration* : D'après la propriété 2 on peut écrire :

$$G(S_i, S_{i+1}, \dots, S_{i+n}) = S_i + (S_{i+1} - S_i)g\left(\frac{S_{i+2} - S_{i+1}}{S_{i+1} - S_i}, \dots, \frac{S_{i+n} - S_{i+n-1}}{S_{i+n-1} - S_{i+n-2}}\right)$$

$g$  étant une fonction définie et continue sur  $\mathcal{F}_{n-1}$ .

Les quantités  $\frac{S_{j+1} - S_j}{S_j - S_{j-1}}$  restent finies

$$g\left(\frac{S_{i+2} - S_{i+1}}{S_{i+1} - S_i}, \dots, \frac{S_{i+n} - S_{i+n-1}}{S_{i+n-1} - S_{i+n-2}}\right)$$

reste donc borné.

$$\text{Donc } \lim_{i \rightarrow \infty} G(S_i, S_{i+1}, \dots, S_{i+n}) = \lim_{i \rightarrow \infty} S_i = S.$$

REMARQUE. Les transformations rationnelles introduites par Pennacchi, Shanks, Aitken sont un cas particulier des transformations  $G$  et sont définies sur un ensemble plus restreint que  $\mathcal{D}_{n+1}$ . Les fonctions  $g$  associées à ces transformations sont des fractions rationnelles des variables  $X_j = \frac{\Delta x_j}{\Delta x_{j-1}}$ .

## II. ACCELERATION DE LA CONVERGENCE

### 2-0. Définition. Notations

*Définition.* Soit  $(S_n)$  une suite convergente. Une transformation  $G$  possède la *propriété d'accélération* (on « accélère la convergence » de la suite  $(S_n)$ ) si :

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{G(S_i, S_{i+1} \dots S_{i+n}) - S}{S_i - S} = 0$$

REMARQUE. Si une transformation possède la propriété d'accélération pour une suite  $(S_n)$ , elle est forcément régulière pour cette suite.

#### Notations

$$\rho_i = \frac{S_{i+1} - S_i}{S_i - S_{i-1}} ; \quad e_i = S_i - S ; \quad \varepsilon_i = G(S_i, \dots, S_{i+n}) - S ; \quad r_i = \frac{e_{i+1}}{e_i}.$$

Avec ces notations, on a, pour une transformation  $G$  définie sur  $\mathcal{D}_{n+1}$  :

$$\varepsilon_i = e_i + (e_{i+1} - e_i)g(\rho_{i+1}, \dots, \rho_{i+n-1}).$$

### 2-1. Etude de suites à convergence linéaire

Considérons les suites convergentes possédant les propriétés suivantes : à partir d'un certain rang  $\Delta S_i \neq 0$  et  $\rho_i, r_i$  tendent vers une même limite finie  $\rho \neq 1$  (le cas de convergence logarithmique est donc exclu). D'après le théorème 2, une transformation  $G$  définie sur  $\mathcal{D}_{n+1}$  est régulière pour de telles suites.

Notons  $\mathfrak{G}_{n-1}$  le sous-ensemble de  $\mathbf{R}^{n-1}$  tel que :

$$X = (X_1 \dots X_{n-1}) \in \mathfrak{G}_{n-1} \Leftrightarrow \forall i, X_i \neq 0 \text{ et } |X_i| > 1.$$

**Théorème.** Une C.N.S. pour qu'une transformation  $G$  ait la propriété d'accélération de convergence est que la fonction  $g$  associée, définie sur  $\mathfrak{G}_{n-1}$  vérifie :

$$g(\rho, \rho, \dots \rho) = \frac{1}{1 - \rho} \quad \forall \rho.$$

*Démonstration.* La condition d'accélération de convergence s'écrit :

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{\varepsilon_i}{e_i} = 0 \text{ c.a.d. : } \lim \left[ 1 + \left( \frac{e_{i+1}}{e_i} - 1 \right) g(\rho_{i+1}, \dots, \rho_{i+n-1}) \right] = 0.$$

La fonction  $g$  étant continue, cette condition devient, à la limite :

$$1 + (\rho - 1) g(\rho \dots \rho) = 0.$$

Réciproquement, si  $g$  est une fonction définie et continue sur  $\mathfrak{G}_{n-1}$ , la condition  $g(\rho, \dots, \rho) = \frac{1}{1 - \rho}$  donne à la fonction  $G$  associée la propriété d'accélération.

**REMARQUE.** Les suites d'ordre de convergence supérieur à 1

$$\left( \lim \frac{S_{n+1} - S_n}{S_n - S_{n-1}} = 0 \right)$$

ne pourront être accélérées par de telles transformations car la transformation  $g$  n'est pas définie en  $(0, 0 \dots 0)$ .

## 2-2. Ordre de convergence de la suite transformée

Soit  $G$  une transformation possédant la propriété d'accélération. Toute suite  $(S_i)$  à convergence linéaire est transformée par  $G$  en  $(T_i)$  telle que :

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{T_i - S}{S_i - S} = 0.$$

En général on ne peut rien dire sur l'ordre de convergence de la suite  $(T_i)$ .

En effet :

$$\begin{aligned} \frac{T_{i+1} - S}{T_i - S} &= \frac{e_{i+1} + (e_{i+2} - e_{i+1})g(\rho_{i+2} \dots \rho_{i+n})}{e_i + (e_{i+1} - e_i)g(\rho_{i+1} \dots \rho_{i+n-1})} \\ &= \frac{e_{i+1}}{e_i} \frac{1 + \left( \frac{e_{i+2}}{e_{i+1}} - 1 \right) g(\rho_{i+2} \dots \rho_{i+n})}{1 + \frac{e_{i+1}}{e_i} - 1 g(\rho_{i+1} \dots \rho_{i+n-1})}. \end{aligned}$$

Ce rapport se présente, à la limite sous la forme  $\frac{0}{0}$ .

On doit faire des hypothèses supplémentaires pour lever l'indétermination.

*Définition.* Une transformation  $G$  possède la propriété d'accélération de degré  $k$  si :

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{G(S_i, S_{i+1} \dots S_{i+n}) - S}{(S_i - S)^{k+1}} = M.$$

**Propriété.** Soit  $G$  une transformation possédant la propriété d'accélération de degré  $k$  et  $(S_i)$  une suite à convergence linéaire  $\left( \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{S_{i+1} - S}{S_i - S} = \rho \neq 0 \right)$ .

On a alors : 
$$\lim \frac{G(S_{i+1} \dots S_{i+n+1}) - S}{G(S_i \dots S_{i+n}) - S} = \frac{M(S_{i+1} - S)^{k+1}}{M(S_i - S)^{k+1}} = \rho^{k+1}.$$

La suite transformée est donc aussi à convergence linéaire et sa constante asymptotique d'erreur est  $\rho^{k+1}$ .

**2-3. Etude de suites définies par récurrence.**

**Théorème.** Si la suite  $(S_i)$ , à convergence linéaire, de limite  $S$ , est telle que  $e_{i+1} = f(e_i)$  ( $f$  étant une fonction suffisamment dérivable), il existe  $g$  (fonction de  $(n - 1)$  variables, suffisamment dérivable) telle que la transformation  $G$  associée possède la propriété d'accélération de degré  $k$ .

La démonstration est basée sur le fait qu'on peut écrire :

$$G(S_i, \dots, S_{i+n}) - S = e_i + (e_{i+1} - e_i)g(\rho_{i+1} \dots \rho_{i+n-1}) = F(e_i).$$

Imposer à  $G$  de posséder la propriété d'accélération de degré  $k$  revient à imposer :

$$F(0) = F'(0) = \dots = F^{(k)}(0) = 0.$$

Chacune de ces conditions correspond à une condition sur les dérivées  $i^{\text{èmes}}$  de la fonction  $g$ , qui se trouve ainsi déterminée.

Si on explicite les premières conditions ( $F'(0) = 0, F''(0) = 0$ ), on trouve :

$$F'(0) = 0 \rightarrow \boxed{1 + (\rho - 1)g(\rho \dots \rho) = 0} \quad \text{Propriété d'accélération de degré 1.}$$

$$F''(0) = 0 \rightarrow \boxed{g'_{x_1} + \rho g'_{x_2} + \dots + \rho^{n-2} g'_{x_{n-1}} = \frac{1}{(\rho - 1)^2(\rho + 1)}}$$

Propriété d'accélération de degré 2.

(On a noté  $g'_{x_i} = g'_{x_i}(\rho \dots \rho)$ .)

La propriété d'accélération de degré 3 devient complexe à expliciter car elle fait intervenir les dérivées secondes de  $g$  et les quantités  $f'(0)$ ,  $f''(0)$ ,  $f'''(0)$ .

REMARQUES.

1) La fonction  $f$  (telle que  $e_{i+1} = f(e_i)$ ) est en général inconnue. Pour déterminer une transformation  $G$  possédant la propriété d'accélération de degré  $n$ , il faut avoir préalablement estimé les quantités  $f'(0)$ ,  $f''(0) \dots f^{(n)}(0)$ . (Ceci est valable pour  $n > 2$ , car dans le cas  $n = 2$ , il est inutile d'avoir  $f''(0)$ .) On ne peut estimer  $f^{(n)}(0)$  qu'avec  $(n + 2)$  éléments successifs. Il est donc possible de construire des transformations  $G$  à  $(n + 1)$  variables, possédant la propriété d'accélération de degré  $(n - 1)$ .

2) La propriété d'accélération de degré 2 est intéressante car c'est une condition sur la fonction  $g$  faisant intervenir uniquement la quantité  $\rho$  (il se trouve que  $\rho = f''(0)$  est éliminé). Il est facile de déterminer des fonctions possédant cette propriété.

REFERENCES

- B. GERMAIN-BONNE, *Transformations de suites*, Colloque d'Analyse Numérique, Épinal, juin 1972.  
 R. PENNACCHI, *Le trasformazioni razionale di una successione*, *Calcolo*, 1968, 5, p. 37-50.