Revue française d'automatique informatique recherche opérationnelle. Mathématique

Antoine Kounadis

Brève communication. Inversion de matrices tridiagonales symétriques

Revue française d'automatique informatique recherche opérationnelle. Mathématique, tome 7, n° R1 (1973), p. 91-100

<http://www.numdam.org/item?id=M2AN_1973__7_1_91_0>

R.A.I.R.O.
(7[e] année, avril 1973, R-1, p. 91-100)

INVERSION DE MATRICES TRIDIAGONALES SYMETRIQUES

par Antoine KOUNADIS (1)

Résumé. — *Le présent article expose une méthode exacte, assez élégante, pour le calcul rapide de l'inverse de matrices tridiagonales symétriques, partitionnées en « blocs ». Il est à remarquer que ces dernières matrices ont une inverse « factorisable »* (2) *dont les éléments sont des « blocs ».*

Ce procédé est aussi valable pour le cas particulier des matrices tridiagonales symétriques à éléments scalaires.

Dans tout ce qui suit, on supposera que la matrice R, dont on calculera l'inverse, aussi bien que les matrices K_i, sont régulières. De pareilles suppositions seront faites pour le cas particulier des matrices tridiagonales symétriques à éléments scalaires.

1. INVERSION DE MATRICES TRIDIAGONALES SYMETRIQUES PARTITIONNEES EN « BLOCS »

Si

$$R = \begin{bmatrix} A_1 & K_1 & & & & & \\ K'_1 & A_2 & K_2 & & & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ & & K'_{i-1} & A_i & K_i & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ & & & & K'_{\nu-2} & A_{\nu-1} & K_{\nu-1} \\ & & & & & K'_{\nu-1} & A_\nu \end{bmatrix} \tag{1}$$

(1) Kallithéa, Athènes (Grèce).

(2) Pour la définition d'une matrice factorisable à éléments scalaires voir [2]. Il n'est pas difficile d'étendre cette définition au cas d'une matrice factorisable à éléments de « blocs ».

où

$A_i = A_i'(i = 1, 2, ..., \nu)$, $K_i(i = 1, 2, ..., \nu - 1)$ sont des matrices carrées du même ordre, la matrice inverse sera également symétrique à cause de la symétrie de R. Admettons que

$$R^{-1} = \begin{bmatrix} \Gamma_{\nu-1} & \Gamma_{\nu-2} & \Gamma_{\nu-3} & \dots & \Gamma_2 & \Gamma_1 & \Theta \\ & \Pi_{1,\nu-2} & \Pi_{1,\nu-3} & \dots & \Pi_{12} & \Pi_{11} & \Sigma_1 \\ & & \Pi_{2,\nu-3} & \dots & \Pi_{22} & \Pi_{21} & \Sigma_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & & & \Pi_{\nu-3,2} & \Pi_{\nu-3,1} & \Sigma_{\nu-3} \\ & \text{Symétr.} & & & & \Pi_{\nu-2,1} & \Sigma_{\nu-2} \\ & & & & & & \Sigma_{\nu-1} \end{bmatrix} \tag{2}$$

où les matrices de la diagonale principale sont évidemment symétriques.

Une réglementation se décrit de cet arrangement et numérotage des éléments de la matrice R^{-1}, concernant la détermination de ses $\frac{\nu(\nu+1)}{2}$ éléments inconnus (sous-matrices).

En effet, nous allons démontrer que, ayant déterminé la matrice fondamentale Θ, tous les éléments (sous-matrices) de R^{-1} sont calculés comme fonctions de celle-ci.

Premièrement on détermine les éléments $\Gamma_1, ..., \Gamma_{\nu-1}$ de la première ligne et $\Sigma_1, ..., \Sigma_{\nu-1}$ de la dernière colonne de R^{-1} par des formules de récurrence. Ensuite, les autres éléments (1) de R^{-1} sont calculés en fonction de $\Gamma_1, ..., \Gamma_{\nu-1}, \Sigma_1, ..., \Sigma_{\nu-1}$ et Θ.

En multipliant les matrices (1) et (2), on obtient :

$$R^{-1} \cdot R = I =$$

$$= \left[\begin{matrix} \Gamma_{\nu-1}A_1 + \Gamma_{\nu-2}K_1' & \Gamma_{\nu-1}K_1 + \Gamma_{\nu-2}A_2 + \Gamma_{\nu-3}K_2' & \Gamma_{\nu-2}K_2 + \Gamma_{\nu-3}A_3 + \Gamma_{\nu-4}K_3' & \dots \\ \Gamma_{\nu-2}'A_1 + \Pi_{1,\nu-2}K_1' & \Gamma_{\nu-2}'K_1 + \Pi_{1,\nu-2}A_2 + \Pi_{1,\nu-3}K_2' & \Pi_{1,\nu-2}K_2 + \Pi_{1,\nu-3}A_3 + \Pi_{1,\nu-4}K_3' & \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \Theta'A_1 + \Sigma_1'K_1' & \Theta'K_1 + \Sigma_1'A_2 + \Sigma_2'K_2' & \Sigma_1'K_2 + \Sigma_2'A_3 + \Sigma_3'K_3' & \dots \end{matrix}\right.$$

$$\left.\begin{matrix} \Gamma_3K_{\nu-3} + \Gamma_2A_{\nu-2} + \Gamma_1K_{\nu-2}' & \Gamma_2K_{\nu-2} + \Gamma_1A_{\nu-1} + \Theta K_{\nu-1}' & \Gamma_1K_{\nu-1} + \Theta A_\nu \\ \Pi_{13}K_{\nu-3} + \Pi_{12}A_{\nu-2} + \Pi_{11}K_{\nu-2}' & \Pi_{12}K_{\nu-2} + \Pi_{11}A_{\nu-1} + \Sigma_1K_{\nu-1}' & \Pi_{11}K_{\nu-1} + \Sigma_1A_\nu \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \Sigma_{\nu-4}'K_{\nu-3} + \Sigma_{\nu-3}'A_{\nu-2} + \Sigma_{\nu-2}'K_{\nu-2}' & \Sigma_{\nu-3}'K_{\nu-2} + \Sigma_{\nu-2}'A_{\nu-1} + \Sigma_{\nu-1}'K_{\nu-1}' & \Sigma_{\nu-2}'K_{\nu-1} + \Sigma_{\nu-1}A_\nu \end{matrix}\right] \tag{3}$$

(1) La sous-matrice $\Pi_{k\lambda}$ a toujours les indices des éléments (projections) Σ_k et Γ_λ, respectivement.

L'équation ci-dessus entraîne $\frac{\nu(\nu+1)}{2}$ relations, c'est-à-dire celles qui sont nécessaires pour calculer les $\frac{\nu(\nu+1)}{2}$ matrices inconnues. Pour raisons de technique, on va déterminer les éléments Γi, Σi et $\Pi \varkappa\lambda$ en fonction de Θ, avant le calcul de ce dernier.

1.1. Calcul des matrices Γ_i

Étant donné que tous les éléments de la première ligne de la matrice (3) (sauf celui de la diagonale principale) sont égaux à zéro les éléments $\Gamma i (i = 1, 2, \ldots, \nu - 1)$, sont calculés ainsi :

$$\left.\begin{aligned}
\Gamma_1 &= -\Theta A_\nu K_{\nu-1}^{-1} \\
\Gamma_2 &= -(\Gamma_1 A_{\nu-1} + \Theta K'_{\nu-1}) K_{\nu-2}^{-1} \\
\Gamma_3 &= -(\Gamma_2 A_{\nu-2} + \Gamma_1 K'_{\nu-2}) K_{\nu-3}^{-1} \\
&\cdots\cdots\cdots \\
\Gamma_{\nu-2} &= -(\Gamma_{\nu-3} A_3 + \Gamma_{\nu-4} K'_3) K_2^{-1} \\
\Gamma_{\nu-1} &= -(\Gamma_{\nu-2} A_2 + \Gamma_{\nu-3} K'_2) K_1^{-1}
\end{aligned}\right\}
\quad
\begin{aligned}
&\text{En général} \\
&\Gamma_\rho = -(\Gamma_{\rho-1} A_{\nu-\rho+1} \\
&\qquad + \Gamma_{\rho-2} K'_{\nu-\rho+1}) K_{\nu-\rho}^{-1} \\
&\text{pour} \\
&\rho = 2, 3, \ldots, \nu - 1 \\
&\text{et} \\
&\Gamma_0 = \Theta, \quad \Gamma_1 = -\Theta A_\nu K_{\nu-1}^{-1}
\end{aligned}
\tag{4}$$

1.2. Calcul des matrices Σ_i

Les éléments $\Sigma i (i = 1, 2, \ldots, \nu - 1)$ de la dernière ligne de la matrice (3) sont calculés comme suit :

$$\left.\begin{aligned}
\Sigma_1 &= -K_1^{-1} A_1 \Theta \\
\Sigma_2 &= -K_2^{-1}(A_2 \Sigma_1 + K'_1 \Theta) \\
\Sigma_3 &= -K_3^{-1}(A_3 \Sigma_2 + K'_2 \Sigma_1) \\
&\cdots\cdots\cdots \\
\Sigma_{\nu-2} &= -K_{\nu-2}^{-1}(A_{\nu-2} \Sigma_{\nu-3} + K'_{\nu-3} \Sigma_{\nu-4}) \\
\Sigma_{\nu-1} &= -K_{\nu-1}^{-1}(A_{\nu-1} \Sigma_{\nu-2} + K'_{\nu-2} \Sigma_{\nu-3})
\end{aligned}\right\}
\quad
\begin{aligned}
&\text{En général} \\
&\Sigma_\rho = -K_\rho^{-1}(A_\rho \Sigma_{\rho-1} \\
&\qquad + K'_{\rho-1} \Sigma_{\rho-2}) \\
&\text{pour} \\
&\rho = 2, 3, \ldots, \nu - 1 \\
&\text{et} \\
&\Sigma_0 = \Theta, \quad \Sigma_1 = -K_1^{-1} A_1 \Theta
\end{aligned}
\tag{5}$$

1.3. Calcul des matrices $\Pi \kappa\lambda$

Nous allons démontrer que pour une matrice $\Pi_{\varkappa\lambda}$, quelconque, où $k = i (i = 1, 2, \ldots, \nu - 2)$, $\lambda = 1, 2, \ldots, \nu - i - 1$ il existe la relation suivante :

$$\Pi_{\varkappa\lambda} = \Sigma_\varkappa \Theta^{-1} \Gamma_\lambda \tag{6}$$

En effet, pour $k = 1$ et $\lambda = 1, 2, \ldots, \nu - 1$, en vertu de la seconde ligne de la matrice (3), on obtient :

$$\Pi_{11} = -\Sigma_1 A_\nu K_{\nu-1}^{-1}$$

Et étant donné que

$$\Gamma_1 = -\Theta A_\nu K_{\nu-1}^{-1}$$

évidemment il vient

$$\Pi_{11} = \Sigma_1 \Theta^{-1} \Gamma_1$$

De la même manière il résulte

$$\begin{aligned} \Pi_{12} &= \Sigma_1 \Theta^{-1} \Gamma_2 \\ \Pi_{13} &= \Sigma_1 \Theta^{-1} \Gamma_3 \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \Pi_{1,\nu-2} &= \Sigma_1 \Theta^{-1} \Gamma_{\nu-2} \end{aligned}$$

Et, en général, pour $k = \rho$ et $\lambda = 1, 2, \ldots, \nu - \rho - 1$, en vertu de la $(\rho + 1)$ ligne de la matrice (3), on obtient :

$$\begin{aligned} \Pi_{\rho 1} &- \Sigma_\rho \Theta^{-1} \Gamma_1 \\ \Pi_{\rho 2} &= \Sigma_\rho \Theta^{-1} \Gamma_2 \\ \Pi_{\rho 3} &= \Sigma_\rho \Theta^{-1} \Gamma_3 \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \Pi_{\rho,\nu-\rho-1} &= \Sigma_\rho \Theta^{-1} \Gamma_{\nu-\rho-1} \\ \Pi_{\rho,\nu-\rho} &= \Sigma_\rho \Theta^{-1} \Gamma_{\nu-\rho} \end{aligned}$$

1.4. Calcul de la matrice fondamentale Θ

Le calcul de la matrice Θ est obtenu par la relation

$$\Gamma_{\nu-1} A_1 + \Gamma_{\nu-2} K_1' = \mathrm{I} \tag{7}$$

où encore de

$$K_{\nu-1}' \Sigma_{\nu-2} + A_\nu \Sigma_{\nu-1} = \mathrm{I} \tag{8}$$

Cependant, au point de vue de pratique il est préférable d'effectuer la détermination de Θ de la manière suivante :

Nous considérons le déterminant « symbolique » (1)

$$\Omega_\nu = (-1)^{\nu-1} \begin{vmatrix} A_1 & I & & & & \\ K_1' & A_2K_1^{-1} & I & & & \\ & K_2'K_1^{-1} & A_3K_2^{-1} & I & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ & & & K_{\nu-2}'K_{\nu-3}^{-1} & A_{\nu-1}K_{\nu-2}^{-1} & I \\ & & & & K_{\nu-1}'K_{\nu-2}^{-1} & A_\nu K_{\nu-1}^{-1} \end{vmatrix} \tag{9}$$

dont les éléments sont des matrices carrées du même ordre, qui sera développé, toujours sous la restriction que ce développement sera effectué de la dernière ligne (ou colonne) à la direction de la première ligne (ou colonne), comme il est précisé par la relation (12).

On va démontrer que le polynôme matriciel qui résulte de ce développement, est égal à Θ^{-1}, c'est-à-dire

$$\Omega_\nu = \Theta^{-1} \tag{10}$$

et par conséquent

$$\Theta = \Omega_\nu^{-1} \tag{11}$$

En effet, en développant le déterminant « symbolique » (9) par ses éléments de la dernière ligne (ou colonne), on obtient :

$$\Omega_\nu = - A_\nu K_{\nu-1}^{-1}\Omega_{\nu-1} - K_{\nu-1}'K_{\nu-2}^{-1}\Omega_{\nu-2}$$
$$(\text{pour } \nu = 1 : K_0^{-1} = 1, \Omega_0 = -1, \Omega_1 = A_1) \tag{12}$$

La relation (12) entraîne (10) si on prouve, auparavant, que

$$\Omega_i = - K_i\Sigma_i\Theta^{-1} \qquad (i = 1, 2, \ldots, \nu - 1)\ (2) \tag{13}$$

où Ω_i est un mineur principal « symbolique » d'ordre i, résultant de Ω_ν en supprimant ses dernières $\nu - i$ lignes et $\nu - i$ colonnes sans changer l'arrangement du reste des éléments.

(1) La matrice correspondant au déterminant « symbolique » Ω_ν est égale au produit des deux matrices suivantes :

$$\begin{bmatrix} A_1 & K_1 & & & & \\ K_1' & A_2 & K_2 & & & \\ & K_2' & A_3 & K_3 & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ & & & K_{\nu-2}' & A_{\nu-1} & K_{\nu-1} \\ & & & & K_{\nu-1}' & A_\nu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & & & & & \\ & K_1^{-1} & & & & \\ & & K_2^{-1} & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & K_{\nu-2}^{-1} & \\ & & & & & K_{\nu-1}^{-1} \end{bmatrix}$$

(2) La formule (13) est valable même pour le cas trivial de i = 0, selon (12) et $\Sigma_0 = \Theta$.

En remplaçant les matrices $\Omega_{\nu-1}$, $\Omega_{\nu-2}$ à (12), conformément à (13), on obtient :

$$\Omega_\nu = A_\nu K_{\nu-1}^{-1} K_{\nu-1} \Sigma_{\nu-1} \Theta^{-1} + K'_{\nu-1} K_{\nu-2}^{-1} K_{\nu-2} \Sigma_{\nu-2} \Theta^{-1}$$

ou

$$\Omega_\nu = (A_\nu \Sigma_{\nu-1} + K'_{\nu-1} \Sigma_{\nu-2}) \Theta^{-1}$$

et à cause de (8)

$$\Omega_\nu = \Theta^{-1}$$

La preuve de (13) sera effectuée par la méthode de l'*induction*. Pour $i = 2$ on aura

$$\Omega_2 = (-1)^{2-1} \begin{Bmatrix} A_1 & I \\ K'_1 & A_2 K_1^{-1} \end{Bmatrix} = -A_2 K_1^{-1} A_1 + K'_1$$

D'autre part, de la relation (5) on tire

$$\Sigma_2 = -K_2^{-1}(A_2 \Sigma_1 + K'_1 \Theta) = (K_2^{-1} A_2 K_1^{-1} A_1 - K_2^{-1} K'_1) \Theta$$

donc

$$-K_2 \Sigma_2 \Theta^{-1} = -A_2 K_1^{-1} A_1 + K'_1$$

c'est-à-dire $\Omega_2 = -K_2 \Sigma_2 \Theta^{-1}$

Ensuite, on accepte que (13) est vraie pour $i = 1, 2, ..., \nu - 2$ et on va démontrer que

$$\Omega_{\nu-1} = -K_{\nu-1} \Sigma_{\nu-1} \Theta^{-1}$$

Selon (12), on a

$$\Omega_{\nu-1} = -A_{\nu-1} K_{\nu-2}^{-1} \Omega_{\nu-2} - K'_{\nu-2} K_{\nu-3}^{-1} \Omega_{\nu-3}$$

En substituant dans cette dernière relation les expressions des $\Omega_{\nu-2}$ et $\Omega_{\nu-3}$, selon (13), on obtient :

$$\Omega_{\nu-1} = A_{\nu-1} K_{\nu-2}^{-1} K_{\nu-2} \Sigma_{\nu-2} \Theta^{-1} + K'_{\nu-2} K_{\nu-3}^{-1} K_{\nu-3} \Sigma_{\nu-3} \Theta^{-1}$$

ou, à cause de (5)

$$\Omega_{\nu-1} = -K_{\nu-1} \Sigma_{\nu-1} \Theta^{-1}$$

D'autre part, en employant la méthode de l'induction on peut démontrer de la même manière que

$$\Omega_{\nu-i}^{\sigma} = -\Theta^{-1} \Gamma_i \qquad (i = 1, 2, ..., \nu - 1) \tag{14}$$

où $\Omega_{\nu-i}^{\sigma}$: est le déterminant « symbolique » d'ordre i, constituant le complément algébrique du mineur principal « symbolique » d'ordre $\nu - i$.

Les formules (13) et (14) fournissent une nouvelle variance de la méthode de détermination des matrices Σi et Γi, conduisant à une économie considérable d'opérations arithmétiques, c'est-à-dire :

$$\left.\begin{array}{l} \Sigma_i = -K_i^{-1}\Omega_i\Theta \\ \Gamma_i = -\Theta\Omega^{\sigma}_{\nu-i} \end{array}\right\} \begin{array}{l} i = 1, 2, \ldots, \nu - 1 \\ \text{mais aussi pour } i = 0 : \Sigma_0 = \Gamma_0 = \Theta \end{array} \tag{15}$$

Ensuite, on aura

$$R^{-1} = \begin{bmatrix} \Gamma_{\nu-1} & \Gamma_{\nu-2} & \Gamma_{\nu-3} & \ldots & \Gamma_2 & \Gamma_1 & \Theta \\ & \Sigma_1\Theta^{-1}\Gamma_{\nu-2} & \Sigma_1\Theta^{-1}\Gamma_{\nu-3} & \ldots & \Sigma_1\Theta^{-1}\Gamma_2 & \Sigma_1\Theta^{-1}\Gamma_1 & \Sigma_1 \\ & & \Sigma_2\Theta^{-1}\Gamma_{\nu-3} & \ldots & \Sigma_2\Theta^{-1}\Gamma_2 & \Sigma_2\Theta^{-1}\Gamma_1 & \Sigma_2 \\ & & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ & & & & \Sigma_{\nu-3}\Theta^{-1}\Gamma_2 & \Sigma_{\nu-3}\Theta^{-1}\Gamma_1 & \Sigma_{\nu-3} \\ & \text{Symétr.} & & & & \Sigma_{\nu-2}\Theta^{-1}\Gamma_1 & \Sigma_{\nu-2} \\ & & & & & & \Sigma_{\nu-1} \end{bmatrix} \tag{16}$$

où $\Theta = \mathit{\Omega}_\nu^{-1}$: est déterminée de nouveau par la formule (9) et Γ_i, Σ_i sont des matrices carrées déterminées par (15) ou par (4), (5).

1.5. Procédé systématique proposé pour le calcul de R^{-1}

En suite des notions mentionnées ci-dessus, *le procédé* systématique suivant est proposé pour la détermination de R^{-1}.

Premièrement la matrice fondamentale Θ est calculée, selon la forme de récurrence (12), comme suit :

$$\Omega_1 = A_1$$

$$\Omega_2 = -A_2(K_1^{-1}\Omega_1) - K_1'(-I) = A_2\mathit{\Omega}_1 + K_1'$$

où $$\mathit{\Omega}_1 = -K_1^{-1}\Omega_1$$

$$\Omega_3 = -A_3(K_2^{-1}\Omega_2) - K_2'(K_1^{-1}\Omega_1) = A_3\mathit{\Omega}_2 + K_2'\mathit{\Omega}_1$$

où $$\mathit{\Omega}_2 = -K_2^{-1}\Omega_2$$

....

$$\Omega_\nu = \ldots\ldots\ldots\ldots = A_\nu\mathit{\Omega}_{\nu-1} + K_{\nu-1}'\mathit{\Omega}_{\nu-2}$$

où $$\mathit{\Omega}_{\nu-1} = -K_{\nu-1}^{-1}\Omega_{\nu-1}$$

Ensuite, le reste des éléments de la première ligne de R^{-1} est déterminé selon la formule (4), c'est-à-dire :

$$\Gamma_1 = -\Theta A_\nu K_{\nu-1}^{-1}, \Gamma_2 = -(\Gamma_1 A_{\nu-1} + \Theta K'_{\nu-1})K_{\nu-2}^{-1},$$
$$\Gamma_3 = -(\Gamma_2 A_{\nu-2} + \Gamma_1 K'_{\nu-2})K_{\nu-3}^{-1}, \ldots$$

En utilisant (6) et (15) on peut déterminer tous les éléments de R^{-1} en fonction des éléments de la première ligne, comme suit :

$$R^{-1} = \begin{bmatrix} \Gamma_{\nu-1} & \Gamma_{\nu-2} & \Gamma_{\nu-3} & \ldots & \Gamma_2 & \Gamma_1 & \Theta \\ & \Omega_1\Gamma_{\nu-2} & \Omega_1\Gamma_{\nu-3} & \ldots & \Omega_1\Gamma_2 & \Omega_1\Gamma_1 & \Omega_1\Theta \\ & & \Omega_2\Gamma_{\nu-3} & \ldots & \Omega_2\Gamma_2 & \Omega_2\Gamma_1 & \Omega_2\Theta \\ & & & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ & & & & \Omega_{\nu-3}\Gamma_2 & \Omega_{\nu-3}\Gamma_1 & \Omega_{\nu-3}\Theta \\ & \text{Symétr.} & & & & \Omega_{\nu-2}\Gamma_1 & \Omega_{\nu-2}\Theta \\ & & & & & & \Omega_{\nu-1}\Theta \end{bmatrix} \quad (17)$$

La méthode proposée, tenant compte de la symétrie de R et exigeant l'inversion des sous-matrices K_i, Ω_ν, entraîne une économie considérable d'opérations. Après le calcul de Θ (la plus grande partie du travail) et des Γ_i, tout autre élément peut être calculé comme produit de deux sous-matrices déjà déterminées. La précision au calcul de R^{-1} dépend de celle à la détermination de Θ.

Ainsi, on a prouvé que les matrices tridiagonales symétriques, partitionnées en « blocs », ont une inverse factorisable à éléments de « blocs », calculable explicitement et rapidement. Ce dernier résultat constitue la partie originale de l'article.

La méthode est aussi efficace quand R est mal conditionnée (au cas où A_i, K_i sont respectivement mal et bien conditionnées) et en général présente une stabilité numérique satisfaisante.

2. INVERSION DE MATRICES TRIDIAGONALES SYMETRIQUES A ELEMENTS SCALAIRES

Si on remplace R par A et A_i, K_i, Γ_i, Θ par d_i, k_i, γ_i, θ respectivement, on obtient :

$$A = \begin{bmatrix} d_1 & k_1 & & & & & \\ k_1 & d_2 & k_2 & & & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ & & k_{i-1} & d_i & k_i & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ & & & & k_{\nu-2} & d_{\nu-1} & k_{\nu-1} \\ & & & & & k_{\nu-1} & d_\nu \end{bmatrix} \tag{18}$$

et

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \gamma_{\nu-1} & \gamma_{\nu-2} & \gamma_{\nu-3} & \cdots & \gamma_2 & \gamma_1 & \theta \\ & \omega_1\gamma_{\nu-2} & \omega_1\gamma_{\nu-3} & \cdots & \omega_1\gamma_2 & \omega_1\gamma_1 & \omega_1\theta \\ & & \omega_2\gamma_{\nu-3} & \cdots & \omega_2\gamma_2 & \omega_2\gamma_1 & \omega_2\theta \\ & & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ & \text{Symétr.} & & & \omega_{\nu-3}\gamma_2 & \omega_{\nu-3}\gamma_1 & \omega_{\nu-3}\theta \\ & & & & & \omega_{\nu-2}\gamma_1 & \omega_{\nu-2}\theta \\ & & & & & & \omega_{\nu-1}\theta \end{bmatrix} \tag{19}$$

où

les éléments scalaires ω_i et θ sont déterminés, comme suit :

$$\begin{array}{llll} \omega_1 = d_1 & & & \\ \omega_2 = d_2\omega_1 + k_1 & \text{où encore} & & \omega_1 = -k_1^{-1}\omega_1 \\ \omega_3 = d_3\omega_2 + k_2\omega_1 & » & » & \omega_2 = -k_2^{-1}\omega_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \omega_\nu = d_\nu\omega_{\nu-1} + k_{\nu-1}\omega_{\nu-2} & » & » & \omega_{\nu-1} = -k_{\nu-1}^{-1}\omega_{\nu-1} \\ \theta \ = \omega_\nu^{-1} & & & \end{array}$$

Enfin, on calcule le reste des éléments de la première ligne :

$$\gamma_\rho = -(\gamma_{\rho-1} d_{\nu-\rho+1} + \gamma_{\rho-2} k_{\nu-\rho+1}) k_{\nu-\rho}^{-1}$$

pour $\rho = 2, 3, \ldots, \nu - 1$, $\gamma_0 = \theta, \gamma_1 = -\gamma_0 d_\nu k_{\nu-1}^{-1}$

Ainsi, on a prouvé que les matrices tridiagonales symétriques (à éléments scalaires) ont une inverse factorisable, calculable explicitement et assez rapidement, par la méthode exposée. Sur ce sujet, assez connu d'ailleurs, il y a aussi d'autres démonstrations, mais tout à fait différentes (voir : [2]).

BIBLIOGRAPHIE

[1] S. SCHECHTER, *Quasi-Tridiagonal Matrices and Type-Insensitive Difference Equations*, A.E.C. Computing and Appl. Mathematics Center, Institut of Mathematical Science, NYU, 1959, NYO-2542.

[2] J. BARANGER et M. DUC-JACQUET, *Matrices tridiagonales symétriques et matrices factorisables*, R.I.R.O., 5e année, 1971, no R-3, p. 61-66.