RAIRO. ANALYSE NUMÉRIQUE

J. CH. FIOROT

Algorithmes de programmation convexe par linéarisation en format constant

RAIRO. Analyse numérique, tome 11, nº 3 (1977), p. 245-253

<http://www.numdam.org/item?id=M2AN_1977__11_3_245_0>

© AFCET, 1977, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « RAIRO. Analyse numérique » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

R A I R O Analyse Numérique/Numerical Analysis
(vol 11, n° 3, 1977, p 245 a 253)

ALGORITHMES DE PROGRAMMATION CONVEXE PAR LINÉARISATION EN FORMAT CONSTANT (1)

par J. Ch. FIOROT (2)

Communiqué par P J LAURENT

Résumé – *La maximisation d'une fonction strictement concave sur un domaine convexe est remplacée par une suite de problèmes à contraintes linéaires, le nombre de ces contraintes linéaires reste constant Deux sortes de linéarisation sont considérées Elles conduisent à deux algorithmes convergents qui entrent dans le cadre d'un algorithme plus général donné par Laurent et Martinet*

I. INTRODUCTION

Dans cet article nous proposons de remplacer le problème de programmation convexe avec une fonction strictement concave par une suite de problèmes plus simples. Ces problèmes sont à contraintes linéaires mais, contrairement aux méthodes de Kelley [11] et de Kaplan [10] où les contraintes sont accumulées, leur nombre reste ici constant.

De plus, dans les deux algorithmes présentés, nous n'avons pas de calculs intermédiaires pour chaque problème, comme par exemple la maximisation d'une fonction sur la partie réalisable d'un segment, ce qui est le cas dans certaines méthodes de directions réalisables : Zoutendijk [16] ou dans la méthode des centres linéarisée : Huard [8].

Néanmoins, pour assurer la convergence, les programmes intermédiaires ont pour fonction économique celle du problème d'origine.

Pour le premier algorithme, les contraintes linéaires sont obtenues par linéarisation des contraintes au point courant. Pour le deuxième, cette linéa-

(1) Manuscrit reçu le 13 septembre 1976, et sous forme revisee le 8 décembre 1976
(2) Informatique, Unuversité de Lille I, Villeneuve d'Ascq

risation est faite aux points d'intersection de la frontière des contraintes et du segment joignant le point courant à un point intérieur au domaine. Dans les deux cas, une autre contrainte linéaire est ajoutée : celle passant par le point courant dont la normale est colinéaire au gradient de la fonction économique en ce point. Cette contrainte a été introduite par Haugazeau [6], [7] pour des programmes quadratiques avec contraintes linéaires.

Nous démontrons de deux manières différentes la convergence des deux méthodes proposées. Une démonstration autonome fait appel à un théorème général de convergence dû à Huard [9]. Une autre consiste à montrer que ces algorithmes correspondent à un choix pratique de l'algorithme général proposé par Laurent et Martinet [12]. En remarque une digression est faite sur le problème toujours ouvert : définir des programmes intermédiaires de format constant, complétement linéaires et ne nécessitant pas de calculs intermédiaires.

II. HYPOTHÈSES, NOTATIONS

Nous nous donnons :

$f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$, une fonction strictement concave et continuement différentiable,

$g_j : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}, j = 1, 2, \ldots, m$, des fonctions concaves et continuement différentiables.

Désignons par $x . y$ le produit scalaire de deux vecteurs x et y de $\mathbf{R}^n$.

Le problème est :

$$\text{(P)} \quad \text{Max}\ \{ f(x) \mid g_j(x) \geqslant 0, \quad j = 1, 2, \ldots, m \}.$$

Posons $C = \{ x \in \mathbf{R}^m \mid g_j(x) \geqslant 0, \ j = 1, 2, \ldots, m \}$ et pour y quelconque dans $\mathbf{R}^n$, $A(y) = \{ x \in \mathbf{R}^n \mid f(x) \geqslant f(y))$.

Faisons l'hypothèse (H) suivante : il existe un point b de C tel que $A(b) \cap C$ est un compact.

Notons $D(x)$ le demi-espace suivant :

$$D(x) = \{ y \in \mathbf{R}^n \mid \nabla f(x) . (y - x) \leqslant 0 \}.$$

Dans la suite nous voulons que $C \subset D(x)$ si x est le point courant ; pour cela introduisons l'ensemble non vide U suivant :

$$U = \{ x \in \mathbf{R}^n \mid C \subset D(x) \}.$$

La solution optimale $\hat{x}$ de (P) est l'unique point commun à U et à C. Notons que U est un ensemble fermé. En effet il suffit pour le constater de prendre une suite $(\overset{n}{x})$, contenue dans U, qui tend vers x ; alors, en raison de la continuité du gradient de f et du produit scalaire, nous avons $x \in U$. Nous introduisons également un pavé B borné, arbitraire mais suffisamment grand pour contenir $A(b) \cap C$. Cette contrainte supplémentaire permet d'obtenir un problème équivalent à (P) (la solution n'est pas modifiée) et d'assurer que la suite $(\overset{k}{x})$ obtenue par les algorithmes possède un point d'accumulation.

Comme il est indiqué en remarque 2 une hypothèse légèrement plus restrictive que (H) permet de se passer du pavé B.

III. ALGORITHME I

Notons $L_j(x) = \{ y \in \mathbf{R}^n \mid g_j(x) + \nabla g_j(x) \,.\, (y - x) \geqslant 0 \}$ le demi-espace obtenu en linéarisant la contrainte j au point x.

Considérons $L(x) = \bigcap\limits_{j=1}^{j=m} L_j(x)$ le polyèdre dit linéarisé de C au point x. Les fonctions g_j étant concaves, $L(x)$ contient C.

Posons $V(x) = L(x) \cap D(x) \cap B$ pour $x \in U$ et introduisons la fonction Γ définie pour $x \in U$, $\Gamma : x \to \{ u \in V(x) \mid f(u) \geqslant f(y), \forall y \in V(x) \}$.

La fonction f étant strictement concave elle admet un maximum unique sur $V(x)$ et ainsi la fonction Γ est univoque. Comme la fonction multivoque : $x \to V(x)$ est continue sur U et que f est également continue, la fonction Γ est une application continue. De plus, Γ est à valeur dans U car

$$\nabla f(\Gamma(x)) \,.\, (y - \Gamma(x)) \leqslant 0$$

pour tout y de $V(x)$ donc pour tout y de C. Notons enfin que si $\Gamma(x) \in C$ alors $\Gamma(x) = \hat{x}$ et que d'autre part $\Gamma(\hat{x}) = \hat{x}$.

Algorithme I

Soient $\overset{0}{x}$ quelconque et $\overset{1}{x}$ la solution de $\operatorname{Max}\{ f(y) \mid y \in L(\overset{0}{x}) \cap B \}$. Pour $k \geqslant 1$: $\overset{k+1}{x} = \Gamma(\overset{k}{x})$.

THÉORÈME : *La suite* $(\overset{k}{x})$ *obtenue par l'algorithme I converge vers la solution de* (P).

Preuves :

1) Nous utilisons le résultat suivant [9, p. 157] qui est une légère amélioration de celui de Polak [14, p. 14] et de Zangwill [15, p. 91].

Soient $E \subset \mathbf{R}^n$ un fermé, P un ensemble dit privilégié contenu dans E, $\Gamma : E \to \mathcal{P}(E)$ et $f : E \to \mathbf{R}$ semi-continue inférieurement dans $E - P$. La fonction multivoque Γ est supposée vérifier :

α) $\forall x \in E - P : \Gamma(x) \neq \varnothing$, β) si $x' \in \Gamma(x)$ alors $f(x') < f(x)$.

Considérons également une suite $(\overset{k}{x})$ définie par $\overset{k+1}{x} \in \Gamma(\overset{k}{x})$ si $\overset{k}{x} \notin P$, $\overset{k+1}{x} = \overset{k}{x}$ si $\overset{k}{x} \in P$, $\overset{0}{x} \in E$.

De plus si $x \notin P$, il existe un voisinage $\tilde{V}(x)$ tel que pour tout y de $\tilde{V}(x)$ et tout y' de $\Gamma(y)$ nous avons $f(y') < f(x)$ ($\tilde{V}(x)$ est un voisinage relativement à E).

Alors sous toutes ces conditions, si $\overset{*}{x}$ est un point d'accumulation de la suite $(\overset{k}{x})$ nous avons : $\overset{*}{x} \in P$.

Les ensembles U et $U \cap C = \{ \hat{x} \}$ jouent le rôle de E et de P. Pour $x \in U$, $\Gamma(x)$ est non vide. Pour $x \in U - \{ \hat{x} \}$, $x' = \Gamma(x)$ est tel que $f(x') < f(x)$. En effet $x \notin C$ entraîne $x \notin L(x)$ donc $x \neq x'$ et de plus $x' \in D(x)$ donc

$$\nabla f(x) . (x' - x) \leqslant 0 ;$$

comme la fonction f est strictement concave :

$$f(x') - f(x) < \nabla f(x) . (x' - x)$$

donc $f(x') < f(x)$.

D'autre part, si $x \in U - \{ \hat{x} \}$, cette dernière inégalité entraîne, d'après la continuité de f, l'existence d'une boule $B(x', \varepsilon)$, de centre x' et de rayon ε telle que $B(x', \varepsilon) \cap A(x) = \varnothing$ et la continuité de Γ entraîne l'existence d'un voisinage $\tilde{V}(x)$ tel que $\forall y \in \tilde{V}(x) : \Gamma(y) \subset B(x', \varepsilon)$ i.e. $f(\Gamma(y)) < f(x)$.

Toutes les conditions du théorème rappelé ci-dessus sont satisfaites. Comme la suite $(\overset{k}{x})$ reste dans le compact $B \cap U$, tout point d'accumulation de cette suite est confondu avec l'unique solution $\hat{x}$ de (P) et ainsi $(\overset{k}{x})$ converge vers la solution de (P).

2) Montrons que cet algorithme entre dans le cadre de celui proposé en [12]. Le domaine $C = \{ x \in \mathbf{R}^n \mid g_j(x) \geqslant 0, j = 1, 2, \ldots, m \}$ peut s'écrire de la manière suivante :

$$C = \bigcap_{\substack{j=1,2,\ldots,m \\ y \in \mathbf{R}^n}} \{ x \in \mathbf{R}^n \mid g_j(y) + \nabla g_j(y) . (x - y) \geqslant 0 \}.$$

Posons $H(x, y) = \operatorname*{Min}_{j=1,2,\cdots,m} \{ g_j(y) + \nabla g_j(y) . (x - y) \}$ et

$$C = \{ x \in \mathbf{R}^n \mid H(x, y) \geqslant 0 \}.$$

Nous aurons alors $C = \bigcap_{y \in \mathbf{R}^n} C_y$.

Nous sommes donc ramenés à une définition de C identique à celle donnée dans [12] et pour se placer dans ce même cadre il suffit de poser $K^k = D(\overset{k}{x})$. Il reste à montrer que si $\overset{k}{x} \notin C$, le choix de la « contrainte » non satisfaite (qui sert à définir le domaine de l'itération suivante) est celui correspondant à la « contrainte » qui est la plus mal vérifiée. C'est-à-dire : montrons que le choix de $\tilde{y}$, tel que $H(\overset{k}{x}, \tilde{y}) = \operatorname*{Inf}_{y \in \mathbf{R}^n} H(\overset{k}{x}, y)$, correspond à $\tilde{y} = \overset{k}{x}$ donc au choix de $C_{\overset{k}{x}} = L(\overset{k}{x})$. Cela résulte de la concavité des fonctions g_j. Nous avons

$$g_j(\overset{k}{x}) \leqslant g_j(y) + \nabla g_j(y) \cdot (\overset{k}{x} - y)$$

pour tout $j = 1, 2, \ldots, m$ et tout y de $\mathbf{R}^n$; alors en prenant la borne inférieure par rapport à j et par rapport à $y \in \mathbf{R}^n$ nous obtenons

$$\operatorname*{Inf}_{j=1,2,\cdots,m} g_j(\overset{k}{x}) \leqslant \operatorname*{Inf}_{y \in \mathbf{R}^n} H(\overset{k}{x}, y).$$

Comme $H(\overset{k}{x}, \overset{k}{x}) = \operatorname*{Inf}_{j=1,2,\cdots,m} g_j(\overset{k}{x})$ nous avons bien $H(\overset{k}{x}, \overset{k}{x}) = \operatorname*{Inf}_{y \in \mathbf{R}^n} H(\overset{k}{x}, y)$. Donc le $C_{\tilde{y}}$ choisi est bien $C_{\overset{k}{x}} = \{ x \in \mathbf{R}^n \mid H(x, \overset{k}{x}) \geqslant 0 \} = L(\overset{k}{x})$.

REMARQUE 1 : La contrainte $D(x)$ est fondamentale car, comme nous l'avons vu dans la démonstration 1, elle assure la décroissance stricte de la suite $f(\overset{k}{x})$. Si nous la supprimons, la convergence n'est pas assurée.

REMARQUE 2 : Si au lieu de faire l'hypothèse (H) nous faisons l'hypothèse (H') suivante : il existe $b \in C$ tel que $A(b)$ est borné, nous pouvons dans le cas de la démonstration 1 supprimer le compact B car alors U est borné. En effet les points x de U appartiennent à des ensembles $A(y)$ tels que $A(y) \cap C = \emptyset$ donc à des ensembles $A(y)$ qui sont contenus dans $A(b)$. Les itérés $\overset{k}{x}$ se trouvent alors dans le compact U. Ajoutons qu'il est alors plus simple d'appliquer [15, p. 91].

IV. ALGORITHME II

Nous supposons de plus que C a un point intérieur a. Pour $x \neq a$, nous notons $u_j(x)$ l'unique point d'intersection, s'il existe, du segment $[a, x]$ avec la frontière de l'ensemble $C_j = \{ x \in \mathbf{R}^n \mid g_j(x) \geqslant 0 \}$.

Si le segment $[a, x]$ coupe la frontière de C_j définissons

$$L_j(x) = \left\{ y \in \mathbf{R}^n \mid \frac{\nabla g_j(u_j(x))}{\|\nabla g_j(u_j(x))\|} \cdot (y - u_j(x)) \geqslant 0 \right\},$$

et $L_j(x) = \mathbf{R}^n$ dans le cas contraire.

Posons $L'(x) = \bigcap_{j=1,2,\ldots,m} L_j(x)$. D'après la concavité des g_j nous avons $C_j \subset L_j(x)$ donc $C \subset L'(x)$.

Posons encore $V_1(x) = L'(x) \cap D(x) \cap B$ pour tout x de U. La fonction f admet un maximum unique sur $V_1(x)$ que l'on notera $\Gamma_1(x)$. De plus nous avons $\Gamma_1(x) \in U$.

Algorithme II

Soient $\overset{0}{x}$ quelconque et $\overset{1}{x}$ la solution de Max $\{ f(y) \mid y \in L'(x) \cap B \}$, pour $k \geqslant 1$: $\overset{k+1}{x} = \Gamma_1(\overset{k}{x})$.

THÉOREME : *La suite* $(\overset{k}{x})$ *obtenue par l'algorithme II converge vers la solution de* (P).

Preuves :

1) La démonstration utilise aussi le résultat rappelé précédemment [9, p. 157]. C'est à un détail près celle de la partie 1 précédente. Ici la fonction d'itération Γ_1 n'est pas en général continue. Pour montrer l'existence d'un voisinage $\tilde{V}$ de x (pour $x \neq \hat{x}$) ayant la propriété requise nous devons procéder différemment.

Pour $x \in U - \{ \hat{x} \}$ il existe un ensemble C_j tel que $x \notin C_j$ et, comme g_j est continue, il existe une boule $B(x, \rho)$ telle que $B(x, \rho) \cap C_j = \varnothing$. Comme a est un point intérieur à C, donc à C_j, pour tout $y \in B(x, \rho)$, $u_j(y)$ est défini, et la fonction u_j est continue sur $B(x, \rho)$.

Pour $y \in B(x, \rho)$ notons $\Gamma''(y)$ le point (unique) qui maximise f sur $L_j(y) \cap D(y) \cap B$; la fonction Γ'' ainsi définie est continue sur $B(x, \rho)$ (même raisonnement qu'au début de la partie 3).

Soit $x'' = \Gamma''(x)$; nous savons que la stricte concavité de f entraîne que $f(x'') < f(x)$ et donc qu'il existe une boule $B(x'', \varepsilon)$ telle que

$$B(x'', \varepsilon) \cap A(x) = \varnothing.$$

La continuité de Γ'' sur $B(x, \rho)$ entraîne l'existence d'une boule

$$B(x, \varepsilon') \subset B(x, \rho) \quad \text{telle que} \quad \forall y \in B(x, \varepsilon')$$

nous avons $\Gamma''(y) \subset B(x'', \varepsilon)$ i.e. $f(\Gamma''(y)) < f(x)$. Comme

$$V_1(y) \subset L_j(y) \cap D(y) \cap B$$

nous avons : $f(\Gamma_1(y)) \leqslant f(\Gamma''(y)) < f(x)$.

2) Comme précédemment cet algorithme entre dans le cadre de celui proposé en [12]. Toutefois comme dans [12] nous utiliserons l'hypothèse (H') : il existe $b \in C$ tel que $A(b)$ soit borné (mais C non borné), au lieu de (H). Dans ce cas nous savons que U est un compact. Cette hypothèse pouvait, bien entendu, être faite pour la partie 1 ci-dessus, ce qui évitait de prendre un pavé B.

Posons cette fois :

$$F(x, y) = \operatorname*{Min}_{j \in J(y)} \frac{\nabla g_j(u_j(y))}{\|\nabla g_j(u_j(y))\|} \cdot (x - u_j(y))$$

où $J(y)$ est l'ensemble des indices des contraintes C_j telles que le segment $[a, y]$ coupe la frontière de C_j,

et $C_y = \{ x \in \mathbf{R}^n \mid F(x, y) \geqslant 0 \}$, alors nous avons $C = \bigcap_{y \in \mathbf{R}^n - \{a\}} C_y$.

Nous avons encore $K^k = D(\overset{k}{x})$. Il reste à montrer que pour $\overset{k}{x} \notin C$, le choix $C_{\underset{x}{k}}$ comme « contrainte » non vérifiée et utilisée à l'étape suivante est tel qu'il existe $0 \in]0, 1]$ satisfaisant à $F(\overset{k}{x}, \overset{k}{x}) \leqslant \theta \inf_{y \in \mathbf{R}^n - \{a\}} F(\overset{k}{x}, y)$.

$$F(\overset{k}{x}, \overset{k}{x}) = \min_{j \in J(\overset{k}{x})} \frac{\nabla g_j(u_j(\overset{k}{x}))}{\|\nabla g_j(u_j(\overset{k}{x}))\|} \cdot (\overset{k}{x} - u_j(\overset{k}{x}))$$

D'autre part appelons $\overset{k}{t}_j$ la projection de $\overset{k}{x}$ sur C_j. L'expression $\dfrac{\nabla g_j(u_j(y))}{\|\nabla g_j(u_j(y))\|}$ $(\overset{k}{x} - u_j(y))$ n'est autre que la distance algébrique de $\overset{k}{x}$ à la contrainte $L_j(y)$, et pour j fixé cette distance est minimum pour le point $y = \overset{k}{t}_j$.

Par suite

$$\inf_{y \in \mathbf{R}^n - \{a\}} F(\overset{k}{x}, y) = \inf_{y \in \mathbf{R}^n - \{a\}} \min_{j \in J(y)} \frac{\nabla g_j(u_j(y))}{\|\nabla g_j(u_j(y))\|} \cdot (\overset{k}{x} - u_j(y))$$

s'écrit encore en permutant les symboles Min et Inf :

$$\inf_{y \in \mathbf{R}^n - \{a\}} F(\overset{k}{x}, y) = \min_{j \in J(y)} \frac{\nabla g_j(\overset{k}{t}_j)}{\|\nabla g_j(\overset{k}{t}_j)\|} \cdot (\overset{k}{x} - \overset{k}{t}_j)$$

Soit j' l'indice qui donne cette valeur minimum ($\inf_{y \in \mathbf{R}^n - \{a\}} F(\overset{k}{x}, y)$ est la plus petite distance algébrique du point $\overset{k}{x}$ aux contraintes C_j).

Nous aurons alors : $F(\overset{k}{x}, \overset{k}{x}) \leqslant \dfrac{\nabla g_{j'}(u_{j'}(\overset{k}{x}))}{\|\nabla g_{j'}(u_{j'}(\overset{k}{x}))\|} \cdot (\overset{k}{x} - u_{j'}(\overset{k}{x}))$

Notons $co(\{ a \}, U)$ l'enveloppe convexe de l'ensemble $\{ a \} \cup U$; c'est un compact. Un calcul simple montre que :

$$\frac{\nabla g_{j'}(u_{j'}(\overset{k}{x}))}{\|\nabla g_{j'}(u_{j'}(\overset{k}{x}))\|} \cdot (\overset{k}{x} - \overset{k}{u}_{j'}(\overset{k}{x})) \leqslant \theta_{j'} \frac{\nabla g_{j'}(\overset{k}{t}_{j'})}{\|\nabla g_{j'}(\overset{k}{t}_{j'})\|} \cdot (\overset{k}{x} - \overset{k}{t}_{j'})$$

où $\theta_{j'} = \inf \left\{ \dfrac{r_{j'}}{\|a - y\|} \mid y \in \text{Frontière}(C_j) \cap co(\{ a \}, U) \right\}$, $r_{j'}$ étant le rayon d'une boule de centre a contenue dans $C_{j'}$.

En prenant $\theta = \inf_{j = 1, 2, \cdots m} \theta_j$ nous obtenons l'inégalité

$$F(\overset{k}{x}, \overset{k}{x}) \leqslant \theta \inf_{y \in \mathbf{R}^n - \{a\}} F(\overset{k}{x}, y).$$

REMARQUE 3 : Contrairement à l'algorithme 1 nous ne pouvons pas utiliser le résultat de Zangwill [15, p. 91] pour démontrer la convergence, que ce soit avec (H) ou (H'). En effet comme nous l'avons déjà dit la fonction Γ_1 n'est pas sup-continue (donc continue). Pour pouvoir la rendre continue il suffit que le domaine de linéarisation le soit. La construction d'un tel domaine continu a été faite dans Fiorot et Huard [3, p. 19].

REMARQUE 4 : Les programmes intermédiaires peuvent être résolus par diverses méthodes : gradient réduit [2], gradient projeté [13], gradient conjugué [1], [5] ou de Frank et Wolfe [4].

REMARQUE 5 : Dans le cas où nous nous proposons de remplacer les programmes intermédiaires (qui sont à fonction économique strictement concave) par des programmes linéaires (en linéarisant également la fonction économique par exemple) nous nous heurtons à un problème difficile comme nous pouvons le voir en nous reportant à [3] où une étude préliminaire a été faite. Le polyèdre linéarisé a en effet besoin d'être limité pour obtenir la convergence.

Désignons par x le point courant. Ce qui a été trouvé comme ensemble délimitant le polyèdre linéarisé est l'ensemble $G(x) = \overline{co(\{x\}, C)/C}$, c'est-à-dire la partie du cône de sommet x circonscrit à C, entre x et C.

En définissant de plus : $S : x \to \bigcap_{j \in E\, x} L_j(x)$, où $E(x)$ est l'ensemble des contraintes qui ne sont pas satisfaites par x, puis $\Omega : x \to G(x) \cap S(x) \cap B$ et $M(x)$ l'ensemble des points qui maximisent $\nabla f(x) . t$ pour $t \in \Omega(x)$, l'algorithme consiste à prendre comme successeur du point x un point de $M(x)$.

La propriété d'optimalité des points d'accumulation est assurée pour une fonction simplement concave.

REFERENCES

1. M. J. BEST, *A feasible conjugate-direction method to solve linearly constrained minimization problems*, J.O.T.A. 16, 1975, p. 25-38.
2. P. FAURE et P. HUARD, *Résolution de grogrammes mathématiques à fonction non linéaire par la méthode du gradient réduit*, Revue Française de Recherche Opérationnelle (AFIRO) n° 36, 1965, p. 167-206.
3. J. C. FIOROT et P. HUARD, *Une approche théorique du problème de linéarisation en programmation convexe*, Publication n° 42 du Laboratoire de Calcul, Université de Lille I, Colloque d'Analyse Numérique de Gourette, 1974.
4. M. FRANK and P. WOLFE, *An algorithm for quadratic programming*, Naval Research Logistics quaterly 3, 1956, p. 95-120.
5. D. GOLFARB, *Extension of Davidon's variable metric method to maximization under linear inequality and equality constraints*, SIAM Journal on Applied Math. 17, 1969, 739-764.
6. Y. HAUGAZEAU, *Sur la minimization des formes quadratiques avec contrainte*, C.R. Acad. Sc. Paris, série A, 264, 1967, p. 322-324.

7. Y. HAUGAZEAU, *Sur les inéquations variationnelles et la minimization de fonctionnelles convexes*, Thèse Paris, 1967.
8. P. HUARD, *Programmation mathématique convexe*, RIRO 7, 1968, p. 43-59.
9. P. HUARD, *Optimisation dans R^n (programmation mathématique)*, Cours de 3[e] cycle, 2[e] partie. Laboratoire de Calcul, Université de Lille 1, 1971.
10. A. KAPLAN, *Determination of the extremum of a linear function on a convex set*, Doklady Akademii Nauk SSSR (1968) (en russe), traduction anglaise : Soviet Mathematics 9, 1969, p. 269-271.
11. J. E. KELLEY, *The cutting plane method for solving convex programs*, SIAM Journal 8, 1960, p. 703-712.
12. P. J. LAURENT et B. MARTINET, *Méthodes duales pour le calcul du minimum d'une fonction convexe sur une intersection de convexes*, Symposium on optimization (Nice June 29th – July 5th 1969), Lectures Notes in Math. 132, Springer-Verlag, 1970, p. 159-179.
13. J. B. ROSEN, *The gradient projection method for nonlinear programming part 1 : linear constraints*, Journal of the SIAM 8, 1960, p. 180-217.
14. E. POLAK, *Computational methods in optimization, a unified approach*, Academic Press, 1971.
15. W. I. ZANGWILL, *Non linear programming : a unified approach*, Prentice Hall, 1969.
16. G. ZOUTENDIJK, *Methods of feasible direction*, Elsevier Publishing Co. Amsterdam, 1960.