

RAIRO. ANALYSE NUMÉRIQUE

JEAN JACQUES MOREAU

Approximation en graphe d'une évolution discontinue

RAIRO. Analyse numérique, tome 12, n° 1 (1978), p. 75-84

http://www.numdam.org/item?id=M2AN_1978__12_1_75_0

© AFCET, 1978, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « RAIRO. Analyse numérique » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques*
<http://www.numdam.org/>

APPROXIMATION EN GRAPHE D'UNE ÉVOLUTION DISCONTINUE (*)

par Jean Jacques MOREAU ⁽¹⁾

Communiqué par P. J. Laurent

Résumé. — *Une mesure de la qualité de l'approximation d'une fonction est définie, tenant compte à la fois des incertitudes sur les valeurs de la variable et les valeurs de la fonction. Application à un algorithme pour la résolution d'un certain processus d'évolution.*

1. INTRODUCTION

Soit f une fonction définie sur un ensemble E , à valeurs dans un espace métrique (F, d_F) . La connaissance d'une suite de fonctions calculables (f_n) convergeant uniformément vers f est usuellement reconnue, si la convergence est assez rapide, comme un fondement confortable pour l'approximation numérique de f .

Toutefois l'approximation uniforme peut être incompatible avec l'information effectivement disponible. Supposons que E soit un intervalle réel I (intervalle de temps, par exemple, auquel cas on dira que $f : I \rightarrow F$ est une *évolution*) et que f présente des discontinuités en des points isolés τ_i de I . Les fonctions (f_n) d'une suite convergeant uniformément vers f devront nécessairement posséder aussi des discontinuités. De façon précise, si ρ_i est l'oscillation de f au point τ_i , toute fonction f_n approchant f uniformément à moins de ρ_i devra admettre τ_i comme point de discontinuité. L'approximation uniforme implique de la sorte la connaissance exacte des points de discontinuité de f . L'information possédée, sur le processus évolutif que f représente, comportera parfois cette connaissance exacte; dans d'autres cas non, et alors l'espoir d'approximations uniformes est exclu.

L'objet de cet article est de présenter, si (E, d_E) et (F, d_F) sont deux espaces métriques, un concept d'approximation d'une fonction $f : E \rightarrow F$ prenant en compte à la fois l'incertitude sur la valeur de la variable et sur la valeur de la fonction. Pour deux fonctions f et g est défini un écart noté $h(f, g)$. Si on fait de l'espace produit $E \times F$ un espace métrique par

$$d_{E \times F}((x, y), (x', y')) = \max \{ d_E(x, x'), d_F(y, y') \},$$

(*) Reçu mai 1977.

(¹) Mathématiques, Université des Sciences et Techniques du Languedoc, Montpellier.

il vient que $h(f, g)$ égale l'écart de Hausdorff entre les graphes $\text{gr } f$ et $\text{gr } g$ dans cet espace produit. On parlera donc d'*approximation en graphe*.

Le paragraphe 2 ci-après formalise les définitions et leurs conséquences immédiates.

L'écart de Hausdorff entre deux sous-ensembles de $E \times F$ est nul si et seulement si ces sous-ensembles ont même adhérence. D'où l'intérêt qu'il y a ici à caractériser des classes de fonctions f telles qu'on ait correspondance bijective entre f et l'adhérence de son graphe; c'est l'objet du paragraphe 3. En particulier pour E intervalle réel, les fonctions *continues à droite* (resp. à gauche) forment une telle classe. Or bien d'autres raisons concourent à imposer la continuité à droite dans des problèmes d'évolution usuels (cf. [2]).

Le reste du papier illustre le concept par l'exemple du *processus de rafle par un convexe mobile d'un espace hilbertien* H , un problème auquel l'auteur a déjà consacré un nombre imposant de pages du Séminaire d'Analyse Convexe (tous les éléments invoqués pourront être trouvés dans les articles de synthèse [1] et [3]). Le processus est étudié ici sur un intervalle de temps compact $[t_0, t_0 + T]$. La base des études antérieures était une procédure de discrétisation du temps dite *algorithme de rattrapage* : à toute subdivision finie

$$s : t_0 < t_1 < \dots < t_n = t_0 + T$$

est associée une fonction en escalier $x_s : [t_0, t_0 + T] \rightarrow H$. L'ensemble des subdivisions telles que s , ordonné par l'inclusion (i. e. $s < s'$ signifie que s' est un raffinement de s), est filtrant à droite. Moyennant des hypothèses convenables il a été prouvé que la « suite généralisée » des x_s converge uniformément sur $[t_0, t_0 + T]$ vers la solution u du processus. Evidemment, si u possède des points de discontinuité, une telle convergence exige que chacun de ces points figure exactement dans les subdivisions s à partir d'un certain raffinement. La conclusion obtenue ici est plus satisfaisante en pratique pour l'approximation numérique : pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\alpha > 0$ tel que

$$\max(t_{i+1} - t_i) < \alpha \Rightarrow h(x_s, u) < \varepsilon.$$

Ce n'est donc plus une convergence uniforme qu'on obtient, mais une *convergence en graphe*.

2. ÉCART DE DEUX FONCTIONS

DÉFINITION 1: Soient (E, d_E) , (F, d_F) deux espaces métriques et soient deux fonctions $f, g : E \rightarrow F$. On dira que f et g sont proches à moins de ε (réel strictement positif donné) si on a

$$\forall x \in E, \exists x' \in E : d_E(x, x') < \varepsilon, \quad d_F(f(x), g(x')) < \varepsilon, \quad (2.1)$$

$$\forall x \in E, \exists x' \in E : d_E(x, x') < \varepsilon, \quad d_F(g(x), f(x')) < \varepsilon. \quad (2.2)$$

L'inf des $\varepsilon > 0$ tels que (2.1) et (2.2) aient lieu sera appelé écart de f et g ; notation $h(f, g)$ (cet inf vaut $+\infty$ si l'ensemble des ε en question est vide).

Faisons du produit $E \times F$ un espace métrique en posant, pour deux éléments $(x, y), (x', y')$ de ce produit,

$$d_{E \times F}((x, y), (x', y')) = \max \{ d_E(x, x'), d_F(y, y') \}. \tag{2.3}$$

PROPOSITION 1: Si $E \times F$ est muni de la distance (2.3), l'écart des deux fonctions f et g est égal à l'écart de Hausdorff de leurs graphes.

Preuve : La propriété (2.1) équivaut à

$$\forall (x, y) \in \text{gr } f, \exists (x', y') \in \text{gr } g : d_{E \times F}((x, y), (x', y')) < \varepsilon \tag{2.4}$$

ce qui équivaut à (notation de distance d'un point à un ensemble) :

$$\forall (x, y) \in \text{gr } f : d_{E \times F}((x, y), \text{gr } g) < \varepsilon. \tag{2.5}$$

Même remarque en échangeant f et g . On en conclut que si ε majore strictement $h(f, g)$, on a, en notant $h_{E \times F}$ l'écart de Hausdorff entre parties de $E \times F$,

$$\varepsilon \geq h_{E \times F}(\text{gr } f, \text{gr } g).$$

Inversement, soit ε vérifiant cette inégalité strictement; cela entraîne (2.5), d'où (2.4) et la même conclusion en échangeant f et g ce qui fait que $\varepsilon \geq h(f, g)$.

COROLLAIRE 1 : L'écart $h(f, g)$ est nul si et seulement si les graphes $\text{gr } f$ et $\text{gr } g$ ont même adhérence dans $E \times F$.

COROLLAIRE 2 : Pour trois fonctions quelconques f_1, f_2, f_3 on a l'inégalité triangulaire

$$h(f_1, f_3) \leq h(f_1, f_2) + h(f_2, f_3). \tag{2.6}$$

3. CONVERGENCE EN GRAPHE

DÉFINITION 2 : On dit qu'une suite (f_n) converge en graphe vers une fonction f si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} h(f, f_n) = 0. \tag{3.1}$$

Il résulte de l'inégalité triangulaire (2.6) qu'une autre fonction g possède la même propriété si et seulement si $h(f, g) = 0$, c'est-à-dire vu la proposition 1,

$$\text{adh gr } f = \text{adh gr } g \tag{3.2}$$

dans l'espace produit $E \times F$. Cette notion de convergence n'est donc confortable que si l'on se restreint à des classes de fonctions correspondant bijectivement avec les adhérences de leurs graphes dans $E \times F$. Le lemme topologique suivant aide à découvrir de telles classes :

LEMME 1 : Soit E un espace topologique quelconque et F un espace topologique régulier. Soient $f, g : E \rightarrow F$ telles que, dans l'espace topologique $E \times F$, on ait

$$\text{gr } f \subset \text{adh gr } g. \quad (3.3)$$

Soit B une base de filtre constituée d'ouverts de E . Si $\lim_B g$ existe, $\lim_B f$ existe et lui est égale.

Preuve : Puisque F est régulier, l'élément $\lim_B g$ possède un système fondamental de voisinages qui sont fermés. Quel que soit un tel voisinage V , il existe $\omega \in B$ tel que

$$\forall x \in \omega : g(x) \in V.$$

Montrons que la même propriété a lieu pour f . Soit $x' \in \omega$ et supposons $f(x') \in F \setminus V$. Le produit $\omega \times (F \setminus V)$ est un ouvert de $E \times F$ contenant le point $(x', f(x')) \in \text{gr } f$. D'après l'hypothèse (3.3) cet ouvert rencontre $\text{gr } g$, c'est-à-dire

$$\exists x \in \omega : g(x) \in F \setminus V,$$

contradictoire.

On s'intéresse dans ce qui vient à des *problèmes d'évolution*; désormais E sera donc un intervalle réel (intervalle de temps) muni de la distance usuelle de \mathbf{R} .

PROPOSITION 2 : Soit I un intervalle réel ouvert à droite. Si $f, g : I \rightarrow (F, d_F)$ sont continues à droite on a l'implication

$$h(f, g) = 0 \Rightarrow f = g. \quad (3.4)$$

En effet, si f (resp. g) est continue à droite, pour tout $t \in I$, la valeur $f(t)$ est la limite de f selon la base de filtre constituée par les intervalles ouverts $I \cap]t, t + (1/n)[$, $n \in \mathbf{N}$.

En fait beaucoup d'études de problèmes d'évolution sont développés plutôt pour un *intervalle compact* et on pose souvent :

CONVENTION : Une fonction f est dite continue à droite sur l'intervalle compact $[t_0, t_0 + T]$ si elle est continue à droite en tout point de $[t_0, t_0 + T[$.

L'exemple suivant montre que cette convention ne sauvegarde pas en général l'implication (3.4). Définir les deux fonctions f et g sur l'intervalle compact $[-1, 0]$ par

$$f(t) = g(t) = \sin \frac{1}{t} \quad \text{si } t \in [-1, 0[$$

$$f(0) = 1, \quad g(0) = -1.$$

Les deux fonctions sont continues à droite et leurs graphes dans $[-1, 0] \times \mathbf{R}$ ont visiblement même adhérence.

Toutefois le cas suivant est très usuel :

PROPOSITION 3 : *Soient f, g à valeurs dans l'espace métrique (F, d_F) , continues à droite sur l'intervalle compact $[t_0, t_0 + T]$ au sens de la convention ci-dessus. Si les deux fonctions possèdent des limites à gauche au point $t_0 + T$ on a l'implication (3.4).*

En effet, l'existence de la limite à gauche, soit l , de f au point $t_0 + T$ fait que $\text{adh gr } f$ rencontre l'ensemble $\{t_0 + T\} \times F$ aux deux seuls points $(t_0 + T, l)$ et $(t_0 + T, f(t_0 + T))$. Par ailleurs, en vertu du lemme 1, l'hypothèse $h(f, g) = 0$ entraîne que f et g ont même limite à gauche en $t_0 + T$.

Cette proposition 3 s'applique en particulier dès que F est un espace de Banach et que les fonctions f et g sont réglées (*a fortiori* si elles sont à variation bornée).

REMARQUE : Notons une incommodité de la notion de convergence en graphe : pour une suite de fonctions (f_n) , par exemple continues à droite sur l'intervalle I , il se peut que la suite des ensembles $\text{gr } f_n$ dans l'espace métrique $I \times F$ converge au sens de l'écart de Hausdorff vers un ensemble limite L , sans qu'il existe de fonction f , continue à droite vérifiant $L = \text{adh gr } f$. Exemple : prendre $f_n(t) = \sin nt$ sur $I = [0, \pi]$. Le rectangle $L = [0, \pi] \times [-1, +1]$ est limite de $\text{gr } f_n$ au sens de l'écart de Hausdorff. Si une fonction f est continue à droite en un point $t_0 \in [0, \pi[$, il existe un sous-intervalle $]t_0, t_0 + \varepsilon[$ sur lequel la fonction prend ses valeurs dans $[f(t_0) - (1/2), f(t_0) + (1/2)]$. On en conclut $L \neq \text{adh gr } f$.

4. APPLICATION AU PROCESSUS DE RAFLE

Soit $I = [t_0, t_0 + T]$ un intervalle réel compact ; soit H un espace hilbertien réel et soit $t \mapsto C(t)$ une multifonction de I dans H , à valeurs convexes fermées non vides. Si I est interprété comme un intervalle de temps, on dit que C est un *convexe mobile* de H . Soit $x \mapsto \psi(t, x)$ la fonction indicatrice de $C(t)$ [i. e. $\psi(t, x) = 0$ si $x \in C(t)$ et $+\infty$ dans le cas contraire]. On sait que l'ensemble $\partial\psi(t, x)$, *sous-différentiel* de $\psi(t, \cdot)$ en un point quelconque x de H est le cône convexe constitué par les éléments de H qui sont, en un sens classique, normaux au convexe C au point x [cône vide si et seulement si $x \notin C$; réduit à $\{0\}$ en particulier si x est un point interne de $C(t)$].

Dans sa formulation forte, le *problème de rafle* consiste dans la détermination d'une fonction $u : I \rightarrow H$ (ou point mobile dans H), absolument continue et telle que, pour presque tout $t \in I$,

$$-\frac{du}{dt} \in \partial\psi(t, u) \tag{4.1}$$

avec une *condition initiale*

$$u(t_0) = a \text{ donné dans } C(t_0). \tag{4.2}$$

L'auteur a consacré un grand nombre de pages à étudier ce problème, motivé par des questions de mécanique, en introduisant notamment divers concepts de *solutions faibles* : pour le dernier état de la question le lecteur pourra consulter [3]. On se limite ici à des hypothèses simples.

HYPOTHÈSE H 1 : La multifonction $C : I \rightarrow H$ est à variation bornée au sens de l'écart de Hausdorff entre sous-ensembles de H .

On introduit alors la fonction variation $v : I \rightarrow \mathbf{R}^+$:

$$v(t) = \text{var}(C; t_0, t) \quad (4.3)$$

et on suppose de plus :

HYPOTHÈSE H 2 : La fonction v est continue à droite en chaque point de $[t_0, t_0 + T[$.

Cela équivaut à dire que la multifonction C , vérifiant l'hypothèse H 1, est en outre continue à droite au sens de l'écart de Hausdorff en chaque point de $[t_0, t_0 + T[$.

Moyennant ces deux hypothèses (en fait l'exposé [3] repose sur le concept plus faible de *rétraction* [1], analogue « unilatéral » de la variation utilisée ici) on montre que le problème (4.1), (4.2) possède une *unique solution faible* dans le sens suivant :

Cette solution faible $u : I \rightarrow H$ est à variation bornée, continue à droite; elle vérifie la condition initiale (4.2); il existe (de manière non unique) une mesure scalaire positive $d\mu$ sur I et une fonction $u' \in \mathcal{L}^1(d\mu, H)$ telles que la mesure vectorielle du (« mesure différentielle » de la fonction à variation bornée u) soit égale à $u' d\mu$ avec, pour tout $t \in I$,

$$-u'(t) \in \partial\psi(t, u(t)). \quad (4.4)$$

Le fait que, pour tout $x \in H$, l'ensemble $\partial\psi(t, x)$ soit *conique* joue ici un rôle essentiel : remplacer $d\mu$ par une mesure positive « équivalente » revient en effet à multiplier, pour chaque t , l'élément $u'(t) \in H$ par un scalaire ≥ 0 . On montre que si u est solution faible la propriété précédente a lieu notamment avec $d\mu = dv$; en conséquence, dans le cas particulier où v est absolument continue (autrement dit, lorsque la multifonction C est absolument continue sur I au sens de l'écart de Hausdorff), la solution faible est en fait *forte*, c'est-à-dire qu'elle vérifie (4.1).

Pour l'approximation numérique de la solution u , une procédure de discrétisation se dégage naturellement :

On considère une subdivision finie

$$t_0 < t_1 < \dots < t_n = t_0 + T. \quad (4.5)$$

Si le quotient

$$\frac{u(t_{i+1}) - u(t_i)}{t_{i+1} - t_i}$$

est adopté comme une approximation de $(du/dt)(t_{i+1})$, (4.1) est remplacée par

$$u(t_i) - u(t_{i+1}) \in \partial\psi(t_{i+1}, u(t_{i+1}))$$

(se rappeler que $\partial\psi$ est un cône), ce qui équivaut classiquement à

$$u(t_{i+1}) = \text{proj}(u(t_i), C(t_{i+1})).$$

De là l'idée d'associer à la subdivision (4.5) une *fonction en escalier continue à droite* que nous noterons $t \mapsto x(t)$ et définie comme suit :

$$\forall t \in [t_i, t_{i+1}[: x(t) = x_i, \tag{4.6}$$

$$x(t_n) = x_n, \tag{4.7}$$

où la suite des $x_i, i = 0, 1, \dots, n$, est construite par récurrence :

$$x_0 = a \tag{4.8}$$

$$x_{i+1} = \text{proj}(x_i, C_{i+1}) \tag{4.9}$$

(on écrit abrégativement C_{i+1} pour $C(t_{i+1})$). C'est ce que nous appelons l'*algorithme de rattrapage*. En particulierisant une proposition de [3] on obtient une majoration de l'erreur commise lorsque la fonction x est adoptée comme approximation de la solution (faible) u . Soit p un majorant de la variation de C sur chacun des intervalles $[t_i, t_{i+1}[$ [c'est-à-dire un majorant des quantités $\lim_{t \uparrow t_{i+1}} v(t) - v(t_i)$ pour $i = 0, 1, \dots, n-1$]; alors la proposition en question donne

$$\forall t \in I : \|x(t) - u(t)\| \leq 2\sqrt{p \text{ var}(C, I)}. \tag{4.10}$$

L'ensemble S des subdivisions finies de I , ordonné par l'inclusion est filtrant à droite. Notant s un élément de S tel qu'il est écrit en (4.5) et x_s la fonction en escalier continue à droite qui lui est associée avec toujours la même donnée initiale a , on conclut de (4.10) que la *suite généralisée* $(x_s), s \in S$, converge uniformément vers la solution u ; en effet, remplacer s par un de ses raffinements ne peut que diminuer p et il existe évidemment des subdivisions rendant p aussi petit qu'on le veut : prendre les images réciproques par v d'intervalles $[\nu\eta, (\nu+1)\eta[$, $\eta > 0$ suffisamment petit, $\nu \in \mathbb{N}$.

Une remarque essentielle est que, si v est discontinu, l'exploitation de (4.10) pour obtenir une fonction x_s approchant uniformément u à moins d'un $\varepsilon > 0$ près donné, exige que les points de I , où v présente un saut dépassant ε soient des points de la subdivision s ; il faudra donc connaître exactement ces points de discontinuité du convexe mobile C .

L'objet du paragraphe qui vient sera d'établir la proposition suivante qui tourne cette difficulté.

PROPOSITION 4 : Moyennant les hypothèses 1 et 2 formulées plus haut, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\alpha > 0$ tel que, toute subdivision s de la forme (4.5) vérifiant

$$\max_i (t_{i+1} - t_i) < \alpha \quad (4.11)$$

fournit une fonction en escalier x_s dont l'écart à u est moindre que ε .

5. PREUVE DE LA PROPOSITION 4

D'après les hypothèses, la fonction numérique v définie en (4.3) est (faiblement) croissante continue à droite. Elle admet une décomposition

$$v = v_c + v_d$$

où la fonction v_c est continue croissante tandis que la fonction v_d croissante continue à droite possède les mêmes sauts que v et est constante entre ses points de discontinuité.

Soit $\varepsilon_1 > 0$; comme l'intervalle I est compact, il existe $\alpha_1 > 0$ tel que pour τ et τ' dans I on a l'implication

$$|\tau' - \tau| < \alpha_1 \Rightarrow |v_c(\tau') - v_c(\tau)| < \varepsilon_1. \quad (5.1)$$

Soit $\varepsilon_2 > 0$; il existe un ensemble fini F de points de discontinuité de v_d tel que la somme des sauts de cette fonction en ses autres points de discontinuité soit moindre que ε_2 . Soit $\alpha_2 > 0$ strictement inférieur à la plus courte distance entre deux points de F .

Soit une subdivision finie de I ,

$$t_0 < t_1 < \dots < t_n = t_0 + T, \quad (5.2)$$

telle que, pour tout $i = 0, 1, \dots, n-1$ on ait

$$t_{i+1} - t_i < \min \left\{ \frac{\alpha_1}{2}, \alpha_2 \right\} \quad (5.3)$$

Chaque intervalle $]t_i, t_{i+1}[$ contient au plus un point de F . Construisons une autre subdivision de I ,

$$t_0 = t'_0 < t'_1 < \dots < t'_n \leq t_0 + T \quad (5.4)$$

de la façon suivante :

1° si $]t_i, t_{i+1}[$ contient un point de F , soit θ , on prend $t'_{i+1} = \theta$;

2° si $]t_i, t_{i+1}[$ ne contient pas de point de F , on prend $t'_{i+1} = t_{i+1}$.

Noter que, dans le cas 1°, vu (5.3), t_{i+1} n'est pas un point de F , donc l'intervalle $]t'_{i+1}, t'_{i+2}[$ ne contient pas d'autre point de F que son origine;

cette remarque s'applique en particulier à l'éventualité $i+1 = n$ et alors $t'_n < t_0 + T = t'_{n+1}$.

Bref chaque intervalle $[t'_i, t'_{i+1}[$, $i = 0, 1, \dots, n$ contient au plus un point de F : son origine. On en conclut que la variation de v_d , continue à droite, sur un tel intervalle est moindre que ε_2 . Par ailleurs, vu (5.3), la longueur de cet intervalle est moindre que α_1 ; d'après (5.1) la variation de v_c y est donc moindre que ε_1 . Donc la variation de v sur $[t'_i, t'_{i+1}[$ est moindre que $\varepsilon_1 + \varepsilon_2$.

A la subdivision (5.4) on associe, comme au paragraphe précédent, une fonction en escalier continue à droite notée x' :

$$\forall t \in [t'_i, t'_{i+1}[: x'(t) = x'_n,$$

où la suite x'_n est définie par

$$x'_0 = a, \tag{5.5}$$

$$x'_{i+1} = \text{proj}(x'_i, C'_{i+1}) \tag{5.6}$$

(on note $C'_{i+1} = C(t'_{i+1})$). La majoration (4.10) devient ici

$$\forall t \in I : \|x'(t) - u(t)\| \leq 2\sqrt{(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \text{var}(C, I)}. \tag{5.7}$$

Cette majoration uniforme de $\|x' - u\|$ fournit *a fortiori* une majoration de l'écart $h(x', u)$.

Cherchons maintenant une majoration de $h(x, x')$. Vu (4.9) et (5.6), une inégalité élémentaire concernant les projections dans un espace hilbertien (*cf.* [3], lemme 2.g) donne

$$\begin{aligned} & \|x_{i+1} - x'_{i+1}\|^2 - \|x_i - x'_i\|^2 \\ & \leq 2(\|x_{i+1} - x_i\| + \|x'_{i+1} - x'_i\|)h(C_{i+1}, C'_{i+1}). \end{aligned} \tag{5.8}$$

Or, d'après la définition de la variation,

$$\begin{aligned} h(C_{i+1}, C'_{i+1}) & \leq v(t_{i+1}) - v(t'_{i+1}) \\ & \leq v_c(t_{i+1}) - v_c(t'_{i+1}) + v_d(t_{i+1}) - v_d(t'_{i+1}). \end{aligned}$$

Comme $]t'_{i+1}, t_{i+1}[$ ne contient pas de point de F , on a

$$v_d(t_{i+1}) - v_d(t'_{i+1}) < \varepsilon_2.$$

Compte tenu d'autre part de (5.1) et (5.3), cela laisse

$$h(C_{i+1}, C'_{i+1}) \leq \varepsilon_1 + \varepsilon_2.$$

On additionne les inégalités telles que (5.8), pour $i = 0, 1, \dots, j \leq n-1$; il reste

$$\|x_{j+1} - x'_{j+1}\|^2 \leq 2(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \left(\sum_{i=0}^j \|x_{i+1} - x_i\| + \sum_{i=0}^j \|x'_{i+1} - x'_i\| \right). \tag{5.9}$$

Or $\|x_{i+1} - x_i\|$ est la distance de x_i , élément de $C_i = C(t_i)$, à $C_{i+1} = C(t_{i+1})$; de même pour les x'_i ; les deux \sum du second membre sont donc majorés par $\text{var}(C, I)$.

L'élément x_{j+1} est la valeur constante de la fonction x sur l'intervalle $[t_{j+1}, t_{j+2}[$ (resp. la valeur de x au point $t_n = t_0 + T$ si $j = n-1$); l'élément x'_{j+1} est la valeur constante de x' sur l'intervalle $[t'_{j+1}, t'_{j+2}[$. Par construction l'écart de Hausdorff de ces deux intervalles est moindre que $\alpha_1/2$. On conclut donc de (5.9) :

$$h(x, x') \leq \max \left\{ \frac{\alpha_1}{2}, 2\sqrt{(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \text{var}(C, I)} \right\}.$$

Vu (5.7) on a donc, par l'inégalité triangulaire,

$$h(u, x) \leq \frac{\alpha_1}{2} + 4\sqrt{(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \text{var}(C, I)}. \quad (5.10)$$

Reprenons alors l'énoncé de la proposition 4 : $\varepsilon > 0$ étant donné, on choisit ε_1 et ε_2 de manière que le dernier terme du second membre de (5.10) soit moindre que $\varepsilon/2$, par exemple

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \frac{\varepsilon^2}{128 \text{var}(C, I)}.$$

A ε_1 ainsi fixé correspond un α_1 assurant (5.1); imposons de plus $\alpha_1 < \varepsilon$; alors le second membre de (5.10) est moindre que ε . A ε_2 fixé ci-dessus correspond un α_2 ; si l'on prend $\alpha = \min \{ \alpha_1/2, \alpha_2 \}$ la proposition est établie.

BIBLIOGRAPHIE

1. J. J. MOREAU, *Multiapplications à rétraction finie.*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, Cl. Sc., serie IV, 1, 1974, p. 169-203.
2. J. J. MOREAU, *Sur les mesures différentielles de fonctions vectorielles et certains problèmes d'évolution*, C.R. Acad. Sc., Paris, 282, série A-B, 1976, p. 837-840.
3. J. J. MOREAU, *Evolution Problem Associated with a Moving Convex Set in a Hilbert Spaces*, J. Diff. Equ. 26, 1977, p. 347-374.