RAIRO. Analyse numérique

Jean Jacques Moreau

Approximation en graphe d'une évolution discontinue

RAIRO. Analyse numérique, tome 12, nº 1 (1978), p. 75-84

<http://www.numdam.org/item?id=M2AN_1978__12_1_75_0>

R.A.I.R.O. Analyse numérique/Numerical Analysis
(vol. 12, n° 1, 1978, p. 75 à 84)

APPROXIMATION EN GRAPHE D'UNE ÉVOLUTION DISCONTINUE (*)

par Jean Jacques MOREAU [1]

Communiqué par P. J. Laurent

Résumé. — *Une mesure de la qualité de l'approximation d'une fonction est définie, tenant compte à la fois des incertitudes sur les valeurs de la variable et les valeurs de la fonction. Application à un algorithme pour la résolution d'un certain processus d'évolution.*

1. INTRODUCTION

Soit f une fonction définie sur un ensemble E, à valeurs dans un espace métrique (F, d_F). La connaissance d'une suite de fonctions calculables (f_n) convergeant uniformément vers f est usuellement reconnue, si la convergence est assez rapide, comme un fondement confortable pour l'approximation numérique de f.

Toutefois l'approximation uniforme peut être incompatible avec l'information effectivement disponible. Supposons que E soit un intervalle réel I (intervalle de temps, par exemple, auquel cas on dira que $f : I \to F$ est une *évolution*) et que f présente des discontinuités en des points isolés τ_i de I. Les fonctions (f_n) d'une suite convergeant uniformément vers f devront nécessairement posséder aussi des discontinuités. De façon précise, si ρ_i est l'oscillation de f au point τ_i, toute fonction f_n approchant f uniformément à moins de ρ_i devra admettre τ_i comme point de discontinuité. L'approximation uniforme implique de la sorte la connaissance exacte des points de discontinuité de f. L'information possédée, sur le processus évolutif que f représente, comportera parfois cette connaissance exacte; dans d'autres cas non, et alors l'espoir d'approximations uniformes est exclu.

L'objet de cet article est de présenter, si (E, d_E) et (F, d_F) sont deux espaces métriques, un concept d'approximation d'une fonction $f : E \to F$ prenant en compte à la fois l'incertitude sur la valeur de la variable et sur la valeur de la fonction. Pour deux fonctions f et g est défini un écart noté $h(f, g)$. Si on fait de l'espace produit $E \times F$ un espace métrique par

$$d_{E\times F}((x, y), (x', y')) = \max\{d_E(x, x'), d_F(y, y')\},$$

(*) Reçu mai 1977.

[1] Mathématiques, Université des Sciences et Techniques du Languedoc, Montpellier.

il vient que $h(f, g)$ égale l'écart de Hausdorff entre les graphes $\operatorname{gr} f$ et $\operatorname{gr} g$ dans cet espace produit. On parlera donc d'*approximation en graphe.*

Le paragraphe 2 ci-après formalise les définitions et leurs conséquences immédiates.

L'écart de Hausdorff entre deux sous-ensembles de $E \times F$ est nul si et seulement si ces sous-ensembles ont même adhérence. D'où l'intérêt qu'il y a ici à caractériser des classes de fonctions f telles qu'on ait correspondance bijective entre f et l'adhérence de son graphe; c'est l'objet du paragraphe 3. En particulier pour E intervalle réel, les fonctions *continues à droite* (resp. à gauche) forment une telle classe. Or bien d'autres raisons concourent à imposer la continuité à droite dans des problèmes d'évolution usuels (*cf.* [2]).

Le reste du papier illustre le concept par l'exemple du *processus de rafle par un convexe mobile d'un espace hilbertien H*, un problème auquel l'auteur a déjà consacré un nombre imposant de pages du Séminaire d'Analyse Convexe (tous les éléments invoqués pourront être trouvés dans les articles de synthèse [1] et [3]). Le processus est étudié ici sur un intervalle de temps compact $[t_0, t_0 + T]$. La base des études antérieures était une procédure de discrétisation du temps dite *algorithme de rattrapage* : à toute subdivision finie

$$s: \quad t_0 < t_1 < \ldots < t_n = t_0 + T$$

est associée une fonction en escalier $x_s : [t_0, t_0 + T] \to H$. L'ensemble des subdivisions telles que s, ordonné par l'inclusion (i. e. $s < s'$ signifie que s' est un raffinement de s), est filtrant à droite. Moyennant des hypothèses convenables il a été prouvé que la « suite généralisée » des x_s converge uniformément sur $[t_0, t_0 + T]$ vers la solution u du processus. Evidemment, si u possède des points de discontinuité, une telle convergence exige que chacun de ces points figure exactement dans les subdivisions s à partir d'un certain raffinement. La conclusion obtenue ici est plus satisfaisante en pratique pour l'approximation numérique : pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\alpha > 0$ tel que

$$\max(t_{i+1} - t_i) < \alpha \quad \Rightarrow \quad h(x_s, u) < \varepsilon.$$

Ce n'est donc plus une convergence uniforme qu'on obtient, mais une *convergence en graphe.*

2. ÉCART DE DEUX FONCTIONS

DÉFINITION 1: *Soient (E, d_E), (F, d_F) deux espaces métriques et soient deux fonctions $f, g : E \to F$. On dira que f et g sont proches à moins de ε (réel strictement positif donné) si on a*

$$\forall x \in E, \quad \exists x' \in E: \quad d_E(x, x') < \varepsilon, \quad d_F(f(x), g(x')) < \varepsilon, \tag{2.1}$$

$$\forall x \in E, \quad \exists x' \in E: \quad d_E(x, x') < \varepsilon, \quad d_F(g(x), f(x')) < \varepsilon. \tag{2.2}$$

*L'*inf *des* $\varepsilon > 0$ *tels que* (2.1) *et* (2.2) *aient lieu sera appelé écart de* f *et* g*; notation* $h(f, g)$ (*cet* inf *vaut* $+\infty$ *si l'ensemble des* ε *en question est vide*).

Faisons du produit $E \times F$ un espace métrique en posant, pour deux éléments (x, y), (x', y') de ce produit,

$$d_{E\times F}((x, y), (x', y')) = \max\{d_E(x, x'), d_F(y, y')\}. \tag{2.3}$$

PROPOSITION 1 : *Si* $E \times F$ *est muni de la distance* (2.3), *l'écart des deux fonctions* f *et* g *est égal à l'écart de Hausdorff de leurs graphes.*

Preuve : La propriété (2.1) équivaut à

$$\forall (x, y) \in \operatorname{gr} f, \quad \exists (x', y') \in \operatorname{gr} g : \qquad d_{E\times F}((x, y), (x', y')) < \varepsilon \tag{2.4}$$

ce qui équivaut à (notation de distance d'un point à un ensemble) :

$$\forall (x, y) \in \operatorname{gr} f : \quad d_{E\times F}((x, y), \operatorname{gr} g) < \varepsilon. \tag{2.5}$$

Même remarque en échangeant f et g. On en conclut que si ε majore strictement $h(f, g)$, on a, en notant $h_{E\times F}$ l'écart de Hausdorff entre parties de $E \times F$,

$$\varepsilon \geqq h_{E\times F}(\operatorname{gr} f, \operatorname{gr} g).$$

Inversement, soit ε vérifiant cette inégalité strictement; cela entraîne (2.5), d'où (2.4) et la même conclusion en échangeant f et g ce qui fait que $\varepsilon \geqq h(f, g)$.

COROLLAIRE 1 : *L'écart* $h(f, g)$ *est nul si et seulement si les graphes* $\operatorname{gr} f$ *et* $\operatorname{gr} g$ *ont même adhérence dans* $E \times F$.

COROLLAIRE 2 : *Pour trois fonctions quelconques* f_1, f_2, f_3 *on a l'inégalité triangulaire*

$$h(f_1, f_3) \leqq h(f_1, f_2) + h(f_2, f_3). \tag{2.6}$$

3. CONVERGENCE EN GRAPHE

DÉFINITION 2 : *On dit qu'une suite* (f_n) *converge en graphe vers une fonction* f *si*

$$\lim_{n\to\infty} h(f, f_n) = 0. \tag{3.1}$$

Il résulte de l'inégalité triangulaire (2.6) qu'une autre fonction g possède la même propriété si et seulement si $h(f, g) = 0$, c'est-à-dire vu la proposition 1,

$$\operatorname{adh} \operatorname{gr} f = \operatorname{adh} \operatorname{gr} g \tag{3.2}$$

dans l'espace produit $E \times F$. Cette notion de convergence n'est donc confortable que si l'on se restreint à des classes de fonctions correspondant bijectivement avec les adhérences de leurs graphes dans $E \times F$. Le lemme topologique suivant aide à découvrir de telles classes :

LEMME 1 : *Soit E un espace topologique quelconque et F un espace topologique régulier. Soient f, g : $E \to F$ telles que, dans l'espace topologique $E \times F$, on ait*

$$\operatorname{gr} f \subset \operatorname{adh} \operatorname{gr} g. \tag{3.3}$$

Soit B une base de filtre constituée d'ouverts de E. Si $\lim_B g$ *existe*, $\lim_B f$ *existe et lui est égale.*

Preuve : Puisque F est régulier, l'élément $\lim_B g$ possède un système fondamental de voisinages qui sont fermés. Quel que soit un tel voisinage V, il existe $\omega \in B$ tel que

$$\forall x \in \omega : \quad g(x) \in V.$$

Montrons que la même propriété a lieu pour f. Soit $x' \in \omega$ et supposons $f(x') \in F \setminus V$. Le produit $\omega \times (F \setminus V)$ est un ouvert de $E \times F$ contenant le point $(x', f(x')) \in \operatorname{gr} f$. D'après l'hypothèse (3.3) cet ouvert rencontre $\operatorname{gr} g$, c'est-à-dire

$$\exists x \in \omega : \quad g(x) \in F \setminus V,$$

contradictoire.

On s'intéresse dans ce qui vient à des *problèmes d'évolution*; désormais E sera donc un intervalle réel (intervalle de temps) muni de la distance usuelle de $\mathbf{R}$.

PROPOSITION 2 : *Soit I un intervalle réel ouvert à droite. Si f, g : $I \to (F, d_F)$ sont continues à droite on a l'implication*

$$h(f, g) = 0 \quad \Rightarrow \quad f = g. \tag{3.4}$$

En effet, si f (resp. g) est continue à droite, pour tout $t \in I$, la valeur $f(t)$ est la limite de f selon la base de filtre constituée par les intervalles ouverts $I \cap \,]t, t+(1/n)[$, $n \in \mathbf{N}$.

En fait beaucoup d'études de problèmes d'évolution sont développés plutôt pour un *intervalle compact* et on pose souvent :

CONVENTION : *Une fonction f est dite continue à droite sur l'intervalle compact $[t_0, t_0+T]$ si elle est continue à droite en tout point de $[t_0, t_0+T[$.*

L'exemple suivant montre que *cette convention ne sauvegarde pas en général l'implication* (3.4). Définir les deux fonctions f et g sur l'intervalle compact $[-1, 0]$ par

$$f(t) = g(t) = \sin\frac{1}{t} \qquad \text{si} \quad t \in [-1, 0[$$

$$f(0) = 1, \qquad g(0) = -1.$$

Les deux fonctions sont continues à droite et leurs graphes dans $[-1, 0] \times \mathbf{R}$ ont visiblement même adhérence.

Toutefois le cas suivant est très usuel :

PROPOSITION 3 : *Soient f, g à valeurs dans l'espace métrique (F, d_F), continues à droite sur l'intervalle compact $[t_0, t_0+T]$ au sens de la convention ci-dessus. Si les deux fonctions possèdent des limites à gauche au point t_0+T on a l'implication* (3.4).

En effet, l'existence de la limite à gauche, soit l, de f au point t_0+T fait que adh gr f rencontre l'ensemble $\{t_0+T\} \times F$ aux deux seuls points (t_0+T, l) et $(t_0+T, f(t_0+T))$. Par ailleurs, en vertu du lemme 1, l'hypothèse $h(f, g) = 0$ entraîne que f et g ont même limite à gauche en t_0+T.

Cette proposition 3 s'applique en particulier dès que F est un espace de Banach et que les fonctions f et g sont réglées (*a fortiori* si elles sont à variation bornée).

REMARQUE : Notons une incommodité de la notion de convergence en graphe : pour une suite de fonctions (f_n), par exemple continues à droite sur l'intervalle I, il se peut que la suite des ensembles gr f_n dans l'espace métrique $I \times F$ converge au sens de l'écart de Hausdorff vers un ensemble limite L, sans qu'il existe de fonction f, continue à droite vérifiant L = adh gr f. Exemple : prendre $f_n(t) = \sin nt$ sur $I = [0, \pi]$. Le rectangle $L = [0, \pi] \times [-1, +1]$ est limite de gr f_n au sens de l'écart de Hausdorff. Si une fonction f est continue à droite en un point $t_0 \in [0, \pi[$, il existe un sous-intervalle $]t_0, t_0+\varepsilon[$ sur lequel la fonction prend ses valeurs dans $[f(t_0)-(1/2), f(t_0)+(1/2)]$. On en conclut $L \neq$ adh gr f.

4. APPLICATION AU PROCESSUS DE RAFLE

Soit $I = [t_0, t_0+T]$ un intervalle réel compact; soit H un espace hilbertien réel et soit $t \mapsto C(t)$ une multifonction de I dans H, à valeurs convexes fermées non vides. Si I est interprété comme un intervalle de temps, on dit que C est un *convexe mobile* de H. Soit $x \mapsto \psi(t, x)$ la fonction indicatrice de $C(t)$ [i. e. $\psi(t, x) = 0$ si $x \in C(t)$ et $+\infty$ dans le cas contraire]. On sait que l'ensemble $\partial\psi(t, x)$, *sous-différentiel* de $\psi(t, .)$ en un point quelconque x de H est le cône convexe constitué par les éléments de H qui sont, en un sens classique, normaux au convexe C au point x [cône vide si et seulement si $x \notin C$; réduit à $\{0\}$ en particulier si x est un point interne de $C(t)$].

Dans sa formulation forte, le *problème de rafle* consiste dans la détermination d'une fonction $u : I \to H$ (ou point mobile dans H), absolument continue et telle que, pour presque tout $t \in I$,

$$-\frac{du}{dt} \in \partial\psi(t, u) \tag{4.1}$$

avec une *condition initiale*

$$u(t_0) = a \quad \text{donné dans } C(t_0). \tag{4.2}$$

L'auteur a consacré un grand nombre de pages à étudier ce problème, motivé par des questions de mécanique, en introduisant notamment divers concepts de *solutions faibles* : pour le dernier état de la question le lecteur pourra consulter [3]. On se limite ici à des hypothèses simples.

HYPOTHÈSE H 1 : *La multifonction $C : I \to H$ est à variation bornée au sens de l'écart de Hausdorff entre sous-ensembles de H.*

On introduit alors la fonction *variation* $v : I \to \mathbf{R}^+$:

$$v(t) = \operatorname{var}(C; t_0, t) \tag{4.3}$$

et on suppose de plus :

HYPOTHÈSE H 2 : *La fonction v est continue à droite en chaque point de $[t_0, t_0+T[$.*

Cela équivaut à dire que la multifonction C, vérifiant l'hypothèse H 1, est en outre continue à droite au sens de l'écart de Hausdorff en chaque point de $[t_0, t_0+T[$.

Moyennant ces deux hypothèses (en fait l'exposé [3] repose sur le concept plus faible de *rétraction* [1], analogue « unilatéral » de la variation utilisée ici) on montre que le problème (4.1), (4.2) possède une *unique solution faible* dans le sens suivant :

Cette solution faible $u : I \to H$ est à variation bornée, continue à droite; elle vérifie la condition initiale (4.2); il existe (de manière non unique) une mesure scalaire positive $d\mu$ sur I et une fonction $u' \in \mathscr{L}^1(d\mu, H)$ telles que la mesure vectorielle du (« mesure différentielle » de la fonction à variation bornée u) soit égale à $u'\, d\mu$ avec, pour tout $t \in I$,

$$-u'(t) \in \partial\psi(t, u(t)). \tag{4.4}$$

Le fait que, pour tout $x \in H$, l'ensemble $\partial\psi(t, x)$ soit *conique* joue ici un rôle essentiel : remplacer $d\mu$ par une mesure positive « équivalente » revient en effet à multiplier, pour chaque t, l'élément $u'(t) \in H$ par un scalaire $\geqq 0$. On montre que si u est solution faible la propriété précédente a lieu notamment avec $d\mu = dv$; en conséquence, dans le cas particulier où v est absolument continue (autrement dit, lorsque la multifonction C est absolument continue sur I au sens de l'écart de Hausdorff), la solution faible est en fait *forte*, c'est-à-dire qu'elle vérifie (4.1).

Pour l'approximation numérique de la solution u, une procédure de discrétisation se dégage naturellement :

On considère une subdivision finie

$$t_0 < t_1 < \ldots < t_n = t_0 + T. \tag{4.5}$$

Si le quotient

$$\frac{u(t_{i+1}) - u(t_i)}{t_{i+1} - t_i}$$

est adopté comme une approximation de $(du/dt)(t_{i+1})$, (4.1) est remplacée par

$$u(t_i)-u(t_{i+1})\in\partial\psi(t_{i+1},\,u(t_{i+1}))$$

(se rappeler que $\partial\psi$ est un cône), ce qui équivaut classiquement à

$$u(t_{i+1})=\operatorname{proj}(u(t_i),\,C(t_{i+1})).$$

De là l'idée d'associer à la subdivision (4.5) une *fonction en escalier continue à droite* que nous noterons $t\mapsto x(t)$ et définie comme suit :

$$\forall t\in[t_i,\,t_{i+1}[:\quad x(t)=x_i, \tag{4.6}$$

$$x(t_n)=x_n, \tag{4.7}$$

où la suite des x_i, $i=0,1,\ldots,n$, est construite par récurrence :

$$x_0=a \tag{4.8}$$

$$x_{i+1}=\operatorname{proj}(x_i,\,C_{i+1}) \tag{4.9}$$

(on écrit abréviativement C_{i+1} pour $C(t_{i+1})$). C'est ce que nous appelons l'*algorithme de rattrapage*. En particularisant une proposition de [3] on obtient une majoration de l'erreur commise lorsque la fonction x est adoptée comme approximation de la solution (faible) u. Soit p un majorant de la variation de C sur chacun des intervalles $[t_i,\,t_{i+1}[$ [c'est-à-dire un majorant des quantités $\lim\limits_{t\uparrow t_{i+1}} v(t)-v(t_i)$ pour $i=0,1,\ldots,n-1$]; alors la proposition en question donne

$$\forall t\in I:\quad \|x(t)-u(t)\|\leqq 2\sqrt{p\operatorname{var}(C,\,I)}. \tag{4.10}$$

L'ensemble S des subdivisions finies de I, ordonné par l'inclusion est filtrant à droite. Notant s un élément de S tel qu'il est écrit en (4.5) et x_s la fonction en escalier continue à droite qui lui est associée avec toujours la même donnée initiale a, on conclut de (4.10) que la *suite généralisée* (x_s), $s\in S$, *converge uniformément* vers la solution u; en effet, remplacer s par un de ses raffinements ne peut que diminuer p et il existe évidemment des subdivisions rendant p aussi petit qu'on le veut : prendre les images réciproques par v d'intervalles $[\nu\eta,\,(\nu+1)\eta[$, $\eta>0$ suffisamment petit, $\nu\in\mathbf{N}$.

Une remarque essentielle est que, si v est discontinu, l'exploitation de (4.10) pour obtenir une fonction x_s approchant uniformément u à moins d'un $\varepsilon>0$ près donné, exige que les points de I, où v présente un saut dépassant ε soient des points de la subdivision s; il faudra donc connaître exactement ces points de discontinuité du convexe mobile C.

L'objet du paragraphe qui vient sera d'établir la proposition suivante qui tourne cette difficulté.

Proposition 4 : *Moyennant les hypothèses* 1 *et* 2 *formulées plus haut, pour tout* $\varepsilon > 0$, *il existe* $\alpha > 0$ *tel que, toute subdivision* s *de la forme* (4.5) *vérifiant*

$$\max_i (t_{i+1} - t_i) < \alpha \tag{4.11}$$

fournit une fonction en escalier x_s *dont l'écart à* u *est moindre que* ε.

5. PREUVE DE LA PROPOSITION 4

D'après les hypothèses, la fonction numérique v définie en (4.3) est (faiblement) croissante continue à droite. Elle admet une décomposition

$$v = v_c + v_d$$

où la fonction v_c est continue croissante tandis que la fonction v_d croissante continue à droite possède les mêmes sauts que v et est constante entre ses points de discontinuité.

Soit $\varepsilon_1 > 0$; comme l'intervalle I est compact, il existe $\alpha_1 > 0$ tel que pour τ et τ' dans I on a l'implication

$$|\tau' - \tau| < \alpha_1 \quad \Rightarrow \quad |v_c(\tau') - v_c(\tau)| < \varepsilon_1. \tag{5.1}$$

Soit $\varepsilon_2 > 0$; il existe un ensemble fini F de points de discontinuité de v_d tel que la somme des sauts de cette fonction en ses autres points de discontinuité soit moindre que ε_2. Soit $\alpha_2 > 0$ strictement inférieur à la plus courte distance entre deux points de F.

Soit une subdivision finie de I,

$$t_0 < t_1 < \ldots < t_n = t_0 + T, \tag{5.2}$$

telle que, pour tout $i = 0, 1, \ldots, n-1$ on ait

$$t_{i+1} - t_i < \min\left\{\frac{\alpha_1}{2}, \alpha_2\right\} \tag{5.3}$$

Chaque intervalle $]t_i, t_{i+1}[$ contient au plus un point de F. Construisons une autre subdivision de I,

$$t_0 = t'_0 < t'_1 < \ldots < t'_n \leqq t_0 + T \tag{5.4}$$

de la façon suivante :

1° si $]t_i, t_{i+1}[$ contient un point de F, soit θ, on prend $t'_{i+1} = \theta$;

2° si $]t_i, t_{i+1}[$ ne contient pas de point de F, on prend $t'_{i+1} = t_{i+1}$.

Noter que, dans le cas 1°, vu (5.3), t_{i+1} n'est pas un point de F, donc l'intervalle $[t'_{i+1}, t'_{i+2}[$ ne contient pas d'autre point de F que son origine;

cette remarque s'applique en particulier à l'éventualité $i+1 = n$ et alors $t'_n < t_0+T = t'_{n+1}$.

Bref chaque intervalle $[t'_i, t'_{i+1}[$, $i = 0, 1, \ldots, n$ contient au plus un point de F : son origine. On en conclut que la variation de v_d, continue à droite, sur un tel intervalle est moindre que ε_2. Par ailleurs, vu (5.3), la longueur de cet intervalle est moindre que α_1; d'après (5.1) la variation de v_c y est donc moindre que ε_1. Donc la variation de v sur $[t'_i, t'_{i+1}[$ est moindre que $\varepsilon_1+\varepsilon_2$.

A la subdivision (5.4) on associe, comme au paragraphe précédent, une fonction en escalier continue à droite notée x' :

$$\forall t \in [t'_i, t'_{i+1}[: \quad x'(t) = x'_n,$$

où la suite x'_n est définie par

$$x'_0 = a, \tag{5.5}$$

$$x'_{i+1} = \operatorname{proj}(x'_i, C'_{i+1}) \tag{5.6}$$

(on note $C'_{i+1} = C(t'_{i+1})$). La majoration (4.10) devient ici

$$\forall t \in I : \quad \|x'(t)-u(t)\| \leqq 2\sqrt{(\varepsilon_1+\varepsilon_2)\operatorname{var}(C, I)}. \tag{5.7}$$

Cette majoration uniforme de $\|x'-u\|$ fournit *a fortiori* une majoration de l'écart $h(x', u)$.

Cherchons maintenant une majoration de $h(x, x')$. Vu (4.9) et (5.6), une inégalité élémentaire concernant les projections dans un espace hilbertien (*cf.* [3], lemme 2.*g*) donne

$$\begin{aligned} &\|x_{i+1}-x'_{i+1}\|^2-\|x_i-x'_i\|^2 \\ &\quad \leqq 2(\|x_{i+1}-x_i\|+\|x'_{i+1}-x'_i\|)\,h(C_{i+1}, C'_{i+1}). \end{aligned} \tag{5.8}$$

Or, d'après la définition de la variation,

$$\begin{aligned} h(C_{i+1}, C'_{i+1}) &\leqq v(t_{i+1})-v(t'_{i+1}) \\ &\leqq v_c(t_{i+1})-v_c(t'_{i+1})+v_d(t_{i+1})-v_d(t'_{i+1}). \end{aligned}$$

Comme $]t'_{i+1}, t_{i+1}]$ ne contient pas de point de F, on a

$$v_d(t_{i+1})-v_d(t'_{i+1}) < \varepsilon_2.$$

Compte tenu d'autre part de (5.1) et (5.3), cela laisse

$$h(C_{i+1}, C'_{i+1}) \leqq \varepsilon_1+\varepsilon_2.$$

On additionne les inégalités telles que (5.8), pour $i = 0, 1, \ldots, j \leqq n-1$; il reste

$$\|x_{j+1}-x'_{j+1}\|^2 \leqq 2(\varepsilon_1+\varepsilon_2)\left(\sum_{i=0}^{j}\|x_{i+1}-x_i\|+\sum_{i=0}^{j}\|x'_{i+1}-x'_i\|\right). \tag{5.9}$$

Or $\| x_{i+1} - x_i \|$ est la distance de x_i, élément de $C_i = C(t_i)$, à $C_{i+1} = C(t_{i+1})$; de même pour les x'_i; les deux $\sum$ du second membre sont donc majorés par var (C, I).

L'élément x_{j+1} est la valeur constante de la fonction x sur l'intervalle $[t_{j+1}, t_{j+2}[$ (resp. la valeur de x au point $t_n = t_0 + T$ si $j = n-1$); l'élément x'_{j+1} est la valeur constante de x' sur l'intervalle $[t'_{j+1}, t'_{j+2}[$. Par construction l'écart de Hausdorff de ces deux intervalles est moindre que $\alpha_1/2$. On conclut donc de (5.9) :

$$h(x, x') \leqq \max \left\{ \frac{\alpha_1}{2}, 2\sqrt{(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \operatorname{var}(C, I)} \right\}.$$

Vu (5.7) on a donc, par l'inégalité triangulaire,

$$h(u, x) \leqq \frac{\alpha_1}{2} + 4\sqrt{(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \operatorname{var}(C, I)}. \tag{5.10}$$

Reprenons alors l'énoncé de la proposition 4 : $\varepsilon > 0$ étant donné, on choisit ε_1 et ε_2 de manière que le dernier terme du second membre de (5.10) soit moindre que $\varepsilon/2$, par exemple

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \frac{\varepsilon^2}{128 \operatorname{var}(C, I)}.$$

A ε_1 ainsi fixé correspond un α_1 assurant (5.1); imposons de plus $\alpha_1 < \varepsilon$; alors le second membre de (5.10) est moindre que ε. A ε_2 fixé ci-dessus correspond un α_2; si l'on prend $\alpha = \min \{ \alpha_1/2, \alpha_2 \}$ la proposition est établie.

BIBLIOGRAPHIE

1. J. J. MOREAU, *Multiapplications à rétraction finie.*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, Cl. Sc., serie IV, 1, 1974, p. 169-203.
2. J. J. MOREAU, *Sur les mesures différentielles de fonctions vectorielles et certains problèmes d'évolution*, C.R. Acad. Sc., Paris, 282, série A-B, 1976, p. 837-840.
3. J. J. MOREAU, *Evolution Problem Associated with a Moving Convex Set in a Hilbert Spaces*, J. Diff. Equ. 26, 1977, p. 347-374.