

MARIE-NOËLLE LE ROUX

**Semi-discrétisation en temps pour les
équations d'évolution paraboliques lorsque
l'opérateur dépend du temps**

RAIRO. Analyse numérique, tome 13, n° 2 (1979), p. 119-137

http://www.numdam.org/item?id=M2AN_1979__13_2_119_0

© AFCET, 1979, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « RAIRO. Analyse numérique » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SEMI-DISCRÉTISATION EN TEMPS POUR LES ÉQUATIONS D'ÉVOLUTION PARABOLIQUES LORSQUE L'OPÉRATEUR DÉPEND DU TEMPS (*)

par Marie-Noëlle LE ROUX ⁽¹⁾

Communiqué par P A RAVIART

Résumé — On étudie la semi-discrétisation en temps d'une équation d'évolution parabolique où l'opérateur dépend du temps. Cette équation est discrétisée par une méthode multi-pas. On obtient des majorations d'erreur lorsque l'opérateur est maximal sectoriel et la méthode multi-pas utilisée d'ordre p ($p \geq 1$), fortement $A(\theta)$ -stable ($0 \leq \theta \leq \pi/2$).

Abstract — We study the error due to the discretization in time of a parabolic problem with time dependent operator. The discretization is carried out by means of a multistep method. Error estimates are obtained for a maximal sectorial operator and a multistep strongly $A(\theta)$ -stable ($0 \leq \theta \leq \pi/2$) method of the order p ($p \geq 1$).

1. POSITION DU PROBLÈME

Soit $A(t)$ un opérateur linéaire, non borné sur un espace de Hilbert H , de domaine $D(A)$ indépendant de t , dense dans H . On suppose que $A(t)$ est maximal sectoriel et on considère l'équation

$$\left. \begin{aligned} u'(t) + A(t)u(t) &= f(t), & 0 < t \leq T, \\ u(0) &= u_0, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

On se donne alors deux polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à q :

$$\rho(\zeta) = \sum_{i=0}^q \alpha_i \zeta^i \quad \text{et} \quad \sigma(\zeta) = \sum_{i=0}^q \beta_i \zeta^i \quad (\alpha_q > 0).$$

L'approximation u_n de la solution $u(t_n)$ de (1) est obtenue au moyen du schéma

$$\sum_{i=0}^q (\alpha_i + \Delta t \beta_i A(t_{n+i})) u_{n+i} = \Delta t \sum_{i=0}^q \beta_i f(t_{n+i}). \quad (2)$$

les valeurs de démarrage u_0, u_1, \dots, u_{q-1} étant obtenues par une autre méthode.

(*) Reçu mai 1978

(1) Université de Rennes, Département de Mathématiques Informatique, Rennes

On suppose alors que l'opérateur A vérifie l'hypothèse

$$\forall s, t \geq 0, \quad \|A^{-1}(s)A(t)\|_{\mathcal{L}(H, H)} \leq C, \quad (3)$$

ce qui permet de définir u_n ($n \geq 0$) de façon unique dans H si u_0, \dots, u_{q-1} sont dans H . D'autre part, si les β_i ($0 \leq i \leq q-1$) sont nuls, l'hypothèse (3) devient inutile.

On suppose que la méthode (ρ, σ) utilisée est d'ordre p , ce qui a lieu si et seulement si, on a

$$\sum_{i=0}^q i^l \alpha_i = l \sum_{i=0}^q i^{l-1} \beta_i, \quad l=0, 1, \dots, p. \quad (4)$$

On suppose aussi que la méthode (ρ, σ) est fortement $A(\theta)$ -stable. On pose

$$\begin{aligned} \varpi(\zeta; z) &= \rho(\zeta) + z \sigma(\zeta), \\ S_\theta &= \{z \in \overline{\mathbf{C}} / z = \infty \text{ ou } 0 \text{ ou } -\theta \leq \text{Arg } z \leq +\theta\}. \end{aligned}$$

La méthode est fortement $A(\theta)$ -stable ($0 < \theta \leq \pi/2$) si et seulement si pour tout z intérieur à S_θ , les racines des polynômes $\varpi(\cdot, z)$ et σ sont toutes de modules < 1 . Dans le cas où $\theta = 0$, on dit que la méthode est fortement $A(\theta)$ -stable si et seulement si pour tout $x > 0$, les racines de $\varpi(\cdot, x)$ et de σ sont de modules < 1 , les racines essentielles ζ_i de ρ sont simples et leurs facteurs de croissance λ_i vérifient $\text{Re } \lambda_i > 0$ où les λ_i sont donnés par

$$\lambda_i = \frac{\sigma(\zeta_i)}{\zeta_i \rho'(\zeta_i)}.$$

On pose alors :

$$\begin{aligned} \delta_i(z) &= \frac{\alpha_i + \beta_i z}{\alpha_q + \beta_q z}, \quad 0 \leq i \leq q. \\ L(z) &= \begin{bmatrix} -\delta_{q-1}(z) & \dots & -\delta_1(z) & -\delta_0(z) \\ 1 & & 0 & 0 \\ & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & & 0 & \vdots \\ & & & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad L(z) \in \mathcal{L}(\mathbf{C}^q, \mathbf{C}^q). \end{aligned}$$

On définit l'erreur de troncature ε_n :

$$\begin{aligned} \varepsilon_n &= \frac{1}{\Delta t} \sum_{i=0}^q [\alpha_i u(t_{n+i}) + \Delta t \beta_i A(t_{n+i}) u(t_{n+i}) - \Delta t \beta_i f(t_{n+i})] \\ &= \frac{1}{\Delta t} \sum_{i=0}^q [\alpha_i u(t_{n+i}) - \Delta t \beta_i u'(t_{n+i})] \end{aligned}$$

et on pose

$$y_n = u(t_n) - u_n,$$

y_n est alors solution de

$$\sum_{i=0}^q (\alpha_i + \Delta t \beta_i A(t_{n+i})) y_{n+i} = \Delta t \varepsilon_n \quad (5)$$

Soient Y_n et E_n les vecteurs de H^q définis par

$$Y_n = \begin{pmatrix} y_{n+q-1} \\ y_{n+q-2} \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \quad E_n = \begin{pmatrix} E_{n,1} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

où

$$E_{n,1} = (\alpha_q + \Delta t \beta_q A(t_{n+q}))^{-1} \varepsilon_n.$$

On note : I l'opérateur identité,

$$\Delta_{n,i} = (\alpha_q + \Delta t \beta_q A(t_{n+q}))^{-1} (\alpha_i + \Delta t \beta_i A(t_{n+i})),$$

$$\bar{\Delta}_{n,i} = (\alpha_q + \Delta t \beta_q A(t_{n+q}))^{-1} (\alpha_i + \Delta t \beta_i A(t_{n+q})) = \delta_i (\Delta t A(t_{n+q})),$$

$$\Lambda_n = \begin{bmatrix} -\Delta_{n,q-1} & \cdots & -\Delta_{n,1} & -\Delta_{n,0} \\ 1 & & 0 & 0 \\ & & \vdots & \vdots \\ 0 & \ddots & 0 & \vdots \\ & & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{\Lambda}_n = \begin{bmatrix} -\bar{\Delta}_{n,q-1} & \cdots & -\bar{\Delta}_{n,1} & -\bar{\Delta}_{n,0} \\ 1 & & 0 & 0 \\ & & \vdots & \vdots \\ 0 & \ddots & 0 & \vdots \\ & & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

La relation (5) peut alors s'écrire :

$$Y_{n+1} = \Lambda_n Y_n + \Delta t E_n$$

et Y_{n+1} s'exprime alors en fonction des données initiales par la relation

$$Y_{n+1} = \Lambda_n \cdots \Lambda_0 Y_0 + \Delta t \sum_{k=1}^n \Lambda_n \cdots \Lambda_{n-k+1} E_{n-k} + \Delta t E_n. \quad (6)$$

Pour majorer Y_n , il faut donc obtenir une majoration de

$$\|\Lambda_n \cdots \Lambda_{n-k}\|_{\mathcal{L}(H^q, H^q)}, \quad 0 \leq k \leq n.$$

Admettons provisoirement les propositions suivantes

PROPOSITION 1 *On suppose qu'il existe une constante $a > 0$ telle que $A(t) - aI$ soit un opérateur auto-adjoint positif vérifiant*

$$\left. \begin{aligned} &\exists \varepsilon \in]0, 1[\text{ et } M > 0 \text{ tels que } \forall t, t' \geq 0, \\ &\| A^{-\varepsilon}(t)(A(t) - A(t'))A^{-1+\varepsilon}(t') \|_{\mathcal{L}(H, H)} \leq M |t - t'| \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

$$\forall t, t', s \geq 0, \quad \| A^{-1}(s)(A(t) - A(t')) \|_{\mathcal{L}(H, H)} \leq M |t - t'| \quad (8)$$

$$\beta_1 = \beta_2 = \dots = \beta_{q-1} = 0 \quad (8 \text{ bis})$$

On suppose aussi que la méthode (ρ, σ) utilisée est fortement $A(0)$ -stable. Alors il existe des constantes positives C, μ telles que l'on ait pour tout $n \geq 0, 1 \leq k \leq n + 1$

$$\| \Lambda_n - \Lambda_{n-k+1} \|_{\mathcal{L}(H^q, H^q)} \leq C e^{(CM-\mu)k\Delta t} \quad (9)$$

PROPOSITION 2 *On suppose que $A(t)$ est un opérateur maximal positif vérifiant les hypothèses (7) et (8) ou (8 bis), ainsi que l'hypothèse (10)*

$$\left. \begin{aligned} &\exists a > 0 \text{ et } \theta_0 \left(0 < \theta_0 < \frac{\pi}{2} \right) \quad \forall t \geq 0, \quad \forall u \in D(A), \\ &((A(t) - aI)u, u) \in S_{\theta_0} \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

On suppose aussi que la méthode (ρ, σ) utilisée est fortement $A(\theta)$ -stable ($\theta_0 < \theta < \pi/2$). Alors il existe des constantes positives C, μ telles que l'on ait pour tout $n \geq 0, 1 \leq k \leq n + 1$

$$\| \Lambda_n - \Lambda_{n-k+1} \|_{\mathcal{L}(H^q, H^q)} \leq C e^{(CM-\mu)k\Delta t} (1 + |\text{Log } \Delta t|) \quad (11)$$

PROPOSITION 3 *On fait les hypothèses de la proposition 2 sur l'opérateur A et on suppose que la méthode (ρ, σ) est fortement A -stable. Alors il existe des constantes positives C, μ telles que l'on ait pour tout $n \geq 0, 1 \leq k \leq n + 1$*

$$\| \Lambda_n - \Lambda_{n-k+1} \|_{\mathcal{L}(H^q, H^q)} \leq C e^{(CM-\mu)k\Delta t} \quad (12)$$

De ces propositions, on déduit alors les théorèmes

THEOREME 1 *On fait les hypotheses des propositions 1 ou 3 et on suppose de plus que la méthode (ρ, σ) est d'ordre p . Alors il existe des constantes positives C_1, C, μ telles que l'on ait pour tout $n \geq q$*

$$\left| u(t_n) - u_n \right|_H \leq C_1 \left\{ e^{(CM-\mu)t_n} \max_{0 \leq s \leq q-1} |u_s - u(t_s)|_H + \Delta t^p \int_0^{t_n} e^{(CM-\mu)(t_n-t)} |u^{(p+1)}(t)|_H dt \right\} \quad (13)$$

Démonstration D'après la relation (6), on a la majoration

$$\begin{aligned} |u(t_{n+q}) - u_{n+q}|_H \leq \|Y_{n+1}\|_{H^q} \leq \|\Lambda_n - \Lambda_0\|_{\mathcal{L}(H^q, H^q)} \|Y_0\|_{H^q} + \Delta t \|E_n\|_{H^q} \\ + \Delta t \sum_{k=1}^n \|\Lambda_n - \Lambda_{n-k+1}\|_{\mathcal{L}(H^q, H^q)} \|E_{n-k}\|_{H^q} \end{aligned}$$

L'utilisation de la formule de Taylor nous permet de montrer que si la méthode (ρ, σ) est d'ordre p et si $u \in C^{p+1}(0, T, H)$, on a

$$|\varepsilon_n| \leq C \Delta t^{p-1} \int_{t_n}^{t_{n+q}} |u^{(p+1)}(t)|_H dt$$

et on a la même majoration pour E_n dans H^q

De plus,

$$\|Y_0\|_{H^q} = \max_{0 \leq s \leq q-1} |u_s - u(t_s)|_H$$

On en déduit immédiatement la majoration (13) en utilisant les propositions 1 ou 3

THEOREME 2 *On fait les hypothèses de la proposition 2 et on suppose de plus que la méthode (ρ, σ) est d'ordre p . Alors il existe des constantes positives C_1, C, μ telles que l'on ait, pour tout $n \geq q$*

$$\begin{aligned} |u(t_n) - u_n|_H \leq C_1 (1 + |\text{Log } \Delta t|) \left\{ e^{(CM-\mu)t_n} \max_{0 \leq s \leq q-1} |u_s - u(t_s)|_H \right. \\ \left. + \Delta t^p \int_0^{t_n} e^{(CM-\mu)(t_n-t)} |u^{(p+1)}(t)|_H dt \right\} \quad (14) \end{aligned}$$

La démonstration de ce théorème est identique à celle du théorème 1

2. RAPPEL DU CAS OU A EST INDEPENDANT DE t

Si l'opérateur A est indépendant de t , on a

$$\Lambda_n = \bar{\Lambda}_n = \Lambda = L(\Delta t A) \quad \text{et} \quad Y_{n+1} = \Lambda^{n+1} Y_0 + \Delta t \sum_{k=0}^n \Lambda^k E_{n-k}$$

Il faut donc majorer $\|\Lambda^k\|_{\mathcal{L}(H^q, H^q)}$. Pour cela, on utilise les lemmes techniques suivants

LEMME 1 *Soit z_0 un point intérieur au domaine de stabilité absolue de la méthode (ρ, σ) . Il existe un voisinage \mathcal{V} de z_0 , une constante c_1 ($0 < c_1 < 1$), une matrice inversible H tels que*

$$\|H^{-1} L(z) H\|_{\mathcal{L}(C^q, C^q)} \leq c_1, \quad \forall z \in \mathcal{V} \quad (15)$$

Démonstration Soit z_0 un point intérieur au domaine de stabilité absolue de la méthode (ρ, σ) , alors les valeurs propres $\zeta_i(z_0)$ de $L(z_0)$ qui sont les racines de $\varpi(\cdot, z_0)$ sont toutes de module < 1

De plus, pour tout $\varepsilon > 0$, on peut trouver une matrice inversible H telle que

$$H^{-1} L(z_0) H = \begin{pmatrix} \zeta_1(z_0) & \varepsilon_1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \varepsilon_{q-1} \\ & & & \zeta_q(z_0) \end{pmatrix}$$

avec $\varepsilon_i = \varepsilon$ ou 0 ($0 \leq i \leq q - 1$) (forme réduite de Jordan)

Donc pour ε suffisamment petit, on obtient

$$\| H^{-1} L(z_0) H \|_2 < 1$$

Et par continuité, on en déduit qu'il existe un voisinage \mathcal{V} de z_0 et une constante c_1 ($0 < c_1 < 1$) tels que

$$\| H^{-1} L(z) H \|_2 \leq c_1 < 1, \quad \forall z \in \mathcal{V}$$

LEMME 2 *On suppose que la méthode (ρ, σ) est fortement $A(\theta)$ -stable ($0 \leq \theta \leq \pi/2$) Il existe un voisinage B_0 de 0 dans S_θ de la forme*

$$B_0 = \{ z \in \mathbb{C} / z = \xi + re^{+\theta}, 0 \leq r \leq \eta_0, 0 \leq \xi \leq \xi_0 \},$$

une application $z \rightarrow H(z) \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^q)$ avec $H(z)$ inversible et une constante $\mu > 0$ tels que pour tout $z \in B_0$, on ait

$$\| H^{-1}(z) L(z) H(z) \|_2 \leq e^{-\mu\xi} \tag{16}$$

Démonstration Notons $\zeta_1(0), \dots, \zeta_s(0)$ les racines de module 1 de $\varpi(\cdot, 0) = \rho(\cdot)$, ces racines sont simples Il existe donc un voisinage \mathcal{V}_1 de 0 dans lequel les racines $\zeta_i(z)$ ($1 \leq i \leq s$) de $\varpi(\cdot, z)$ sont simples et sont des fonctions holomorphes de z et de plus,

$$|\zeta_i(z)| \leq c < 1, \quad s+1 \leq i \leq q$$

Le polynôme caractéristique $\varpi(\cdot, z)$ de $L(z)$ s'écrit alors sous la forme

$$\varpi(\zeta, z) = (\zeta - \zeta_1(z)) \dots (\zeta - \zeta_s(z)) P(\zeta, z),$$

où le polynôme $P(\zeta, z)$ a des coefficients holomorphes en z dans \mathcal{V}_1 On a, pour $z \in \mathcal{V}_1$

$$\mathbb{C}^q = \text{Ker}(L(z) - \zeta_1(z)) \oplus \dots \oplus \text{Ker}(L(z) - \zeta_s(z)) \oplus \text{Ker}(P(L(z)), z)$$

Considérons alors la matrice $H'(z)$ dont les vecteurs colonnes sont des vecteurs de base des $\text{Ker}(L(z) - \zeta_1(z)), \dots, \text{Ker}(L(z) - \zeta_s(z)), (\text{Ker } P(L(z)), z)$; il est possible de choisir ces vecteurs de façon que les coefficients de $H'(z)$ dépendent de manière holomorphe de z dans un voisinage \mathcal{V}_2 de 0 et on a

$$H'^{-1}(z)L(z)H'(z) = \left(\begin{array}{ccc|c} \zeta_1(z) & & & 0 \\ & \dots & & \\ & & \zeta_s(z) & \\ \hline & & 0 & l'(z) \end{array} \right),$$

où les coefficients de $l'(z)$ sont des fonctions holomorphes de z . De plus les valeurs propres de $l'(z)$ sont $\zeta_{s+1}(z) \dots \zeta_q(z)$ et sont donc de module < 1 ; on peut donc trouver une matrice $h \in \mathcal{L}(\mathbf{C}^{q-s})$ telle que

$$\|h^{-1}l'(0)h\| < 1$$

et par continuité, il existe un voisinage \mathcal{V}_3 de 0 et une constante $c_1 \in]0, 1[$ tels que

$$\forall z \in \mathcal{V}_3, \quad \|h^{-1}l'(z)h\| \leq c_1 < 1.$$

On pose alors $H(z) = H'(z) \left(\begin{array}{c|c} I & 0 \\ \hline 0 & h \end{array} \right)$ et $l(z) = h^{-1}l'(z)h$.

On a la relation

$$H^{-1}(z)L(z)H(z) = \left(\begin{array}{ccc|c} \zeta_1(z) & & & 0 \\ & \dots & & \\ & & \zeta_s(z) & \\ \hline & & 0 & l(z) \end{array} \right)$$

d'où

$$\|H^{-1}(z)L(z)H(z)\| \leq (\max_{1 \leq i \leq s} |\zeta_i(z)|, c_1), \quad \forall z \in \mathcal{V}_3.$$

Or il existe un voisinage B_0 de 0 dans S_0 de la forme

$$B_0 = \{z \in \mathbf{C} / z = \zeta + re^{\pm i\theta}, 0 \leq r \leq \eta_0, 0 \leq \zeta \leq \zeta_0\}$$

et une constante $\mu' > 0$ tels que

$$\forall z \in B_0, \quad |\zeta_i(z)| \leq e^{-\mu'\zeta} \quad (1 \leq i \leq q) \quad [4].$$

Donc il existe une constante positive μ telle que

$$\forall z \in B_0 \cap \mathcal{V}_3, \quad H^{-1}(z)L(z)H(z) \leq e^{-\mu\zeta}.$$

LEMME 3 : On suppose la méthode (ρ, σ) fortement $A(\theta)$ -stable $(0 \leq \theta \leq \pi/2)$. Alors il existe des constantes positives R, μ, C telles que pour tout z tel que $-\theta_1 \leq \text{Arg } z \leq \theta_1$ $(0 \leq \theta_1 < \theta)$ si $\theta > 0$ et $z \in \mathbf{R}, z \geq 0$ si $\theta = 0$, on ait

$$\left. \begin{aligned} \|L^n(z)\| &\leq C e^{-\mu n \xi} & \text{si } z = \xi + r e^{\pm i\theta}, \quad \xi \geq 0, \quad |z| \leq R, \\ \|L^n(z)\| &\leq C e^{-\mu n} & \text{si } |z| \geq R. \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

Démonstration : La méthode étant fortement $A(\theta)$ -stable, il existe une matrice inversible H telle que

$$\|H^{-1} L(\infty) H\| < 1,$$

et par continuité, il existe des constantes positives R, μ telles que, pour $|z| \geq R$, on ait

$$\|H^{-1} L(z) H\| \leq e^{-\mu},$$

d'où on déduit

$$\|L^n(z)\| \leq \|H\| \cdot \|H^{-1} L(z) H\|^n \cdot \|H^{-1}\| \leq C e^{-\mu n}, \quad \forall z \in S_\theta, \quad |z| \geq R.$$

D'autre part, d'après le lemme 2, il existe un voisinage B_0 de 0 dans S_θ de la forme

$$B_0 = \{z \in \mathbf{C} / z = \zeta + r e^{\pm i\theta}, 0 \leq r \leq \eta_0, 0 \leq \zeta \leq \zeta_0\},$$

une application holomorphe $z \rightarrow H(z) \in \mathcal{L}(\mathbf{C}^q)$ et une constante $\mu_0 > 0$ tels que

$$\|H^{-1}(z) L(z) H(z)\| \leq e^{-\mu_0 \zeta},$$

donc

$$\|L^n(z)\| \leq \|H(z)\| \cdot \|H^{-1}(z)\| e^{-\mu_0 n \zeta} \leq C_0 e^{-\mu_0 n \zeta} \quad \forall z \in B_0.$$

Par ailleurs d'après le lemme 1, on peut trouver des points $z_j \in S_\theta, 1 \leq j \leq k$, des voisinages B_j de z_j , des matrices H_j inversibles et des constantes μ'_j tels que :

- (i) $\bigcup_{j=1}^k B_j$ recouvre l'ensemble $\{z \in \mathbf{C}, |\text{Arg } z| \leq \theta_1, |z| \leq R, z \notin B_0\}$;
- (ii) on ait, pour tout $z \in B_j, 1 \leq j \leq k$:

$$\|H_j^{-1} L(z) H_j\| \leq e^{-\mu'_j}$$

d'où, pour tout $z \in B_j$:

$$\|L^n(z)\| \leq \|H_j\| \cdot \|H_j^{-1}\| \cdot \|H_j^{-1} L(z) H_j\|^n \leq C_j e^{-\mu'_j n}$$

et en posant

$$z = \zeta + r e^{\pm i\theta}, \quad \mu_j = \frac{\mu'_j}{R}, \quad \|L^n(z)\| \leq C_j e^{-\mu_j n \zeta}.$$

On a donc le résultat cherché en prenant

$$C = \max \{ C_j, 0 \leq j \leq k \}, \quad \mu = \min \{ \mu_j, 0 \leq j \leq k \}$$

LEMME 4 *On suppose la méthode (ρ, σ) fortement $A(\theta)$ -stable. Alors il existe de constantes positives R, μ, C telles que, pour tout z tel que $-\theta_1 \leq \text{Arg } z \leq \theta_1$ ($0 \leq \theta_1 < \theta$) si $\theta > 0$ et $z \in \mathbf{R}, z \geq 0$ si $\theta = 0$, on ait*

$$\|L^n(z) - L^n(\infty)\| \leq C \frac{e^{-\mu n}}{|z|} \quad \text{pour } |z| \geq R \quad (18)$$

Démonstration Pour $n=1$, on a l'égalité

$$L(z) - L(\infty) = - \frac{1}{\beta_q(\alpha_q + \beta_q z)} \begin{bmatrix} \alpha_{q-1} \beta_q - \alpha_q \beta_{q-1}, & \alpha_0 \beta_q - \alpha_q \beta_0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

donc

$$\|L(z) - L(\infty)\| \leq \frac{C}{|z|} \quad \text{pour } |z| \geq R$$

Pour $n > 1$, on a l'égalité

$$L^n(z) - L^n(\infty) = \sum_{k=0}^{n-1} L^k(z)(L(z) - L(\infty))L^{n-1-k}(\infty)$$

d'où en utilisant le lemme 3,

$$\|L^n(z) - L^n(\infty)\| \leq C \sum_{k=0}^{n-1} \frac{e^{-\mu k} e^{-\mu(n-1-k)}}{|z|} \leq C' \frac{e^{-\mu n}}{|z|} \quad \text{pour } |z| \geq R$$

PROPOSITION 4 *On suppose qu'il existe $a > 0$ tel que $A - aI$ soit un opérateur maximal positif et que la méthode (ρ, σ) est fortement A -stable ou fortement $A(0)$ -stable si A est auto-adjoint. Alors il existe deux constantes C et μ_0 ne dépendant que de ρ, a, σ et Δt_0 telles que, pour $\Delta t \leq \Delta t_0$, on ait*

$$\|\Lambda^k\|_{\mathcal{L}(H^q, H^q)} \leq C e^{-\mu_0 k \Delta t} \quad (19)$$

Démonstration Si la méthode est fortement A -stable et $A - aI$ maximal positif, on a

$$\|\Lambda^k\|_{\mathcal{L}(H^q)} = \|L^k(\Delta t A)\|_{\mathcal{L}(H^q)} \leq \sup_{\text{Re } z \geq a} \|L^k(\Delta t z)\|$$

et d'après le lemme 3 :

$$\|L^k(\Delta tz)\| \leq C e^{-\mu k \Delta t \operatorname{Re} z} \leq C e^{-\mu k \Delta t a} \quad \text{pour } |\Delta tz| \leq R$$

et

$$\|L^k(\Delta tz)\| \leq C e^{-\mu k} \quad \text{pour } |\Delta tz| \geq R.$$

On en déduit la majoration (19) avec $\mu_0 = \inf(\mu a, \mu/\Delta t_0)$.

Si la méthode est fortement $A(0)$ -stable et A auto-adjoint, on a

$$\|\Lambda^k\|_{\mathcal{L}(H^q)} \leq \sup_{x \geq a} \|L^k(\Delta tx)\|$$

et le résultat se déduit de la même façon.

PROPOSITION 5 : *On suppose que la méthode (ρ, σ) est fortement $A(\theta)$ -stable ($0 < \theta < \pi/2$) que l'opérateur A est maximal positif et vérifie :*

$$\exists a > 0 \quad \text{et} \quad \theta_0 \left(0 < \theta_0 < \frac{\pi}{2} \right) : \quad \forall u \in D(A), \quad ((A - aI)u, u) \in S_{\theta_0}. \quad (20)$$

Alors pour tout $\Delta t_0 > 0$, il existe deux constantes C et μ_0 ne dépendant que de $\rho, \sigma, a, \theta_0$ et Δt_0 telles que pour $\Delta t \leq \Delta t_0$, on ait

$$\|\Lambda^k\|_{\mathcal{L}(H^q)} \leq C(1 + |\operatorname{Log} \Delta t|) e^{-\mu_0 k \Delta t} \quad (21)$$

Démonstration : On a l'égalité

$$\Lambda^k = L^k(\Delta t A) = L^k(\infty)I + \frac{1}{2\pi i} \int_{a'+\Gamma_{\theta_1}} (L^k(\Delta tz) - L^k(\infty))(zI - \bar{A})^{-1} dz,$$

où $\bar{a}' = a/2$, Γ_{θ_1} est le contour orienté positivement défini par $\operatorname{Arg} z = \pm \theta_1$

($\theta_0 < \theta_1 < \theta$) et $\bar{A} \in \mathcal{L}(H^q)$ est définie par $\bar{A} = \begin{pmatrix} A & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & A \end{pmatrix}$,

D'autre part, on a la majoration [4] :

$$\|(zI - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(H, H)} \leq \frac{C}{\theta - \theta_0} \frac{1}{|z - a'| + a'}, \quad \forall z \in \Gamma_{\theta_1} + a'.$$

On définit Γ_1 et Γ_2 par

$$\Gamma_1 = \left\{ z \in \Gamma_{\theta_1} + a', |z| \leq \frac{R}{\Delta t} \right\}, \quad \Gamma_2 = \left\{ z \in \Gamma_{\theta_1}, = a', |z| \geq \frac{R}{\Delta t} \right\}.$$

On obtient en utilisant le lemme 3

$$\begin{aligned} & \left\| \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_1} (L^k(\Delta t z) - L^k(\infty))(zI - \bar{A})^{-1} dz \right\| \\ & \leq \frac{C}{\theta - \theta_0} \int_0^{R/\Delta t} e^{-\mu_0 k \Delta t (a + r(\sin(\theta - \theta_1)/\sin))} \frac{dr}{r + a'} \\ & \quad + C \frac{e^{-\mu_0 k}}{\theta - \theta_0} \int_0^{R/\Delta t} \frac{dr}{r + a'} \leq \frac{C}{\theta - \theta_0} e^{-\mu_0 k \Delta t} (1 + |\text{Log } \Delta t|) \end{aligned}$$

en posant

$$\mu_0 = \inf \left(\mu a', \frac{\mu}{\Delta t_0} \right),$$

en utilisant le lemme 4, on obtient

$$\left\| \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_2} (L^k(\Delta t z) - L^k(\infty))(zI - \bar{A})^{-1} dz \right\| \leq \frac{C}{\theta - \theta_0} \int_{R/\Delta t}^{\infty} e^{-\mu k} \frac{dr}{\Delta t r^2} \leq \frac{C}{R} \frac{e^{-\mu k}}{\theta - \theta_0},$$

on en déduit donc la majoration (21)

3. ÉTUDE DU CAS OU L'OPÉRATEUR A DÉPEND DE t

Notations on notera $\bar{\Lambda}_\infty = L(\infty)$ et $\bar{A}(t)$ l'opérateur de $\mathcal{L}(H^q)$ défini par

$$\bar{A}(t) = \begin{pmatrix} A(t) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & A(t) \end{pmatrix}$$

LEMME 5 On suppose qu'il existe $a > 0$ tel que pour tout $t \geq 0$, $A(t) - aI$ soit un opérateur auto-adjoint positif. On suppose que la méthode (ρ, σ) est fortement $A(0)$ -stable. Alors pour tout ε , tel que $0 \leq \varepsilon \leq 1$, il existe deux constantes C et μ ne dépendant que de la méthode (ρ, σ) , a et ε telles que

$$\left\| \bar{A}^\varepsilon(t_{n+q})(\bar{\Lambda}_n^k - \bar{\Lambda}_\infty^k) \right\|_{\mathcal{L}(H^q, H^q)} \leq C \frac{e^{-\mu k \Delta t}}{(k \Delta t)^\varepsilon} \tag{22}$$

Démonstration La méthode étant fortement $A(0)$ -stable et $A(t) - aI$ auto-adjoint positif, on a

$$\left\| \bar{A}^\varepsilon(t_{n+q})(\bar{\Lambda}_n^k - \bar{\Lambda}_\infty^k) \right\|_{\mathcal{L}(H^q)} \leq \sup_{x \geq a} \left\| x^\varepsilon (L^k(\Delta t x) - L^k(\infty)) \right\|$$

Soit $x \in \mathbf{R}$, $a \leq x \leq R/\Delta t$ où R est défini dans les lemmes 3 et 4, on a

$$\|x^\varepsilon(L^k(\Delta tx) - L^k(\infty))\| \leq C(e^{-\mu k \Delta tx} + e^{-\mu k})x^\varepsilon \leq C' \frac{e^{-\mu k \Delta t}}{(k \Delta t)^\varepsilon}$$

avec

$$\mu' = \inf\left(\frac{\mu a}{2}, \frac{\mu}{2 \Delta t_0}\right)$$

Soit maintenant $x \geq R/\Delta t$, d'après le lemme 4, on a alors

$$\|x^\varepsilon(L^k(\Delta tx) - L^k(\infty))\| \leq C \frac{e^{-\mu k}}{\Delta tx} x^\varepsilon \leq C'' \frac{e^{-\mu k}}{\Delta t^\varepsilon} \leq C' \frac{e^{-\mu k \Delta t}}{(k \Delta t)^\varepsilon}$$

D'où, on déduit immédiatement la majoration (22)

Si la méthode est fortement $A(\theta)$ -stable ($0 < \theta \leq \pi/2$), on a un lemme analogue

LEMME 6 . On suppose que $A(t)$ est un opérateur maximal positif vérifiant

$$\left. \begin{aligned} \exists a > 0 \quad \text{et} \quad \theta_0 \left(0 < \theta_0 < \frac{\pi}{2}\right), \\ \forall t \geq 0, \quad \forall u \in D(A), \quad ((A(t) - aI)u, u) \in S_{\theta_0} \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

On suppose aussi que la méthode (ρ, σ) utilisée est fortement $A(\theta)$ -stable ($\theta_0 < \theta \leq \pi/2$) Alors pour tout ε tel que $0 < \varepsilon < 1$, il existe deux constantes C et μ ne dépendant que de la méthode (ρ, σ) , a , θ , θ_0 , ε telles que

$$\|\bar{A}^\varepsilon(t_{n+q})(\bar{\Lambda}_n^k - \bar{\Lambda}_\infty^k)\|_{\mathcal{L}(H^\varepsilon, H^\varepsilon)} \leq C \frac{e^{-\mu k \Delta t}}{(k \Delta t)^\varepsilon} \quad (24)$$

Démonstration On a l'égalité

$$\bar{A}^\varepsilon(t_{n+q})(\bar{\Lambda}_n^k - \bar{\Lambda}_\infty^k) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a+\Gamma_{\theta_1}} z^\varepsilon (L^k(\Delta tz) - L^k(\infty))(zI - \bar{A}(t_{n+q}))^{-1} dz,$$

où $a' = a/2$ et Γ_{θ_1} est le contour orienté positivement défini par $\text{Arg } z = \pm \theta_1$ ($\theta_0 < \theta_1 < \theta$)

D'autre part, on a la majoration

$$\|(zI - A(t_{n+q}))^{-1}\|_{\mathcal{L}(H, H)} \leq \frac{C}{|z - a'| + a'}, \quad \forall z \in \Gamma_{\theta_1} + a'$$

On définit Γ_1 et Γ_2 par

$$\Gamma_1 = \left\{ z \in a' + \Gamma_{\theta_1}, |z| \leq \frac{R}{\Delta t} \right\}, \quad \Gamma_2 = \left\{ z \in a' + \Gamma_{\theta_1}, |z| \geq \frac{R}{\Delta t} \right\}$$

On obtient en utilisant le lemme 3 :

$$\left\| \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_1} z^\varepsilon (L^k(\Delta tz) - L^k(\infty))(zI - \bar{A}(t_{n+q}))^{-1} dz \right\| \leq C \left(e^{-\mu k \Delta t a'} \int_0^\infty e^{-\mu k \Delta t r (\sin(\theta - \theta_1)/\sin\theta)} r^{\varepsilon-1} dr + e^{-\mu k} \int_0^{R/\Delta t} r^{\varepsilon-1} dr \right).$$

Dans la première intégrale, on fait le changement de variable $y = (k \Delta t r)^\varepsilon$. On obtient alors :

$$\left\| \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_1} z^\varepsilon (L^k(\Delta tz) - L^k(\infty))(zI - \bar{A}(t_{n+q}))^{-1} dz \right\| \leq C \left(\frac{e^{-\mu k \Delta t a'}}{(k \Delta t)^\varepsilon} \int_0^\infty e^{-\mu (\sin(\theta - \theta_1)/\sin\theta) y^{1/\varepsilon}} dy + \frac{e^{-\mu k}}{\Delta t^\varepsilon} \right) \leq C' \frac{e^{-\mu_0 k \Delta t}}{(k \Delta t)^\varepsilon}.$$

en posant

$$\mu_0 = \inf \left(\mu a', \frac{\mu}{2 \Delta t_0} \right).$$

En utilisant le lemme 4, on obtient :

$$\left\| \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_2} z^\varepsilon (L^k(\Delta tz) - L^k(\infty))(zI - \bar{A}(t_{n+q}))^{-1} dz \right\| \leq C \int_{R/\Delta t}^\infty \frac{e^{-\mu k r^{\varepsilon-2}}}{\Delta t} dr = \frac{C e^{-\mu k}}{\Delta t} \frac{R^{\varepsilon-1}}{\varepsilon-1}.$$

On en déduit donc

$$\| \bar{A}^\varepsilon(t_{n+q})(\bar{\Lambda}_n^k - \bar{\Lambda}_\infty^k) \|_{\mathcal{L}(H^q, H^q)} \leq C \frac{e^{-\mu k \Delta t}}{(k \Delta t)^\varepsilon}.$$

LEMME 7 : On fait les hypothèses des propositions 1, 2 ou 3, sauf l'hypothèse (8) ou (8 bis). Alors il existe une constante C , ne dépendant que de la méthode (p, σ) , a, ε telle que pour tout $a \geq 0$, pour tout $k \geq 1$, on ait

$$\| \bar{\Lambda}_{n+1}^k - \bar{\Lambda}_n^k \|_{\mathcal{L}(H^q, H^q)} \leq CM \Delta t e^{-\mu k \Delta t}. \tag{25}$$

Démonstration : On démontre cette majoration d'abord dans le cas où $k = 1$.

Si $k = 1$, on a d'après la définition de $\bar{\Lambda}_n$:

$$\| \bar{\Lambda}_{n+1} - \bar{\Lambda}_n \|_{\mathcal{L}(H^q)} \leq C \sum_{i=0}^{q-1} \| \bar{\Delta}_{n+1, i} - \bar{\Delta}_{n, i} \|_{\mathcal{L}(H, H)}$$

et

$$\begin{aligned} \overline{\Delta}_{n+1, i} - \overline{\Delta}_{n, i} &= (\alpha_q + \Delta t \beta_q A(t_{n+q+1}))^{-1} \\ &\quad \times \Delta t (\beta_i \alpha_q - \beta_q \alpha_i) (A(t_{n+q+1}) - A(t_{n+q})) (\alpha_q + \Delta t \beta_q A(t_{n+q}))^{-1}, \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} \|\overline{\Delta}_{n+1, i} - \overline{\Delta}_{n, i}\|_{\mathcal{L}(H, H)} &\leq \|(\alpha_q + \Delta t \beta_q A(t_{n+q+1}))^{-1} A^\varepsilon(t_{n+q+1})\|_{\mathcal{L}(H, H)} \Delta t \|\beta_i \alpha_q - \beta_q \alpha_i\|, \\ \|A^{-\varepsilon}(t_{n+q+1})(A(t_{n+q+1}) - A(t_{n+q})) A^{-1+\varepsilon}(t_{n+q})\|_{\mathcal{L}(H, H)} &\times \|A^{1-\varepsilon}(t_{n+q})(\alpha_q + \Delta t \beta_q A(t_{n+q}))^{-1}\|. \end{aligned}$$

Or,

$$\|(\alpha_q + \Delta t \beta_q A(t_{n+q+1}))^{-1} A^\varepsilon(t_{n+q+1})\|_{\mathcal{L}(H, H)} \leq \frac{C}{\Delta t^\varepsilon},$$

$$\|A^{1-\varepsilon}(t_{n+q})(\alpha_q + \Delta t \beta_q A(t_{n+q}))^{-1}\|_{\mathcal{L}(H, H)} \leq \frac{C}{\Delta t^{1-\varepsilon}}$$

et

$$\|A^{-\varepsilon}(t_{n+q+1})(A(t_{n+q+1}) - A(t_{n+q})) A^{-1+\varepsilon}(t_{n+q})\|_{\mathcal{L}(H, H)} \leq M \Delta t,$$

d'après l'hypothèse (7).

On en déduit

$$\|\overline{\Lambda}_{n+1} - \overline{\Lambda}_n\|_{\mathcal{L}(H^q, H^q)} \leq CM \Delta t.$$

Si k est supérieur ou égal à 2, on a alors :

$$\begin{aligned} \overline{\Lambda}_{n+1}^k - \overline{\Lambda}_n^k &= \sum_{p=0}^{k-1} \overline{\Lambda}_{n+1}^p (\overline{\Lambda}_{n+1} - \overline{\Lambda}_n) \overline{\Lambda}_n^{k-p-1} \\ &= \sum_{p=1}^{k-2} (\overline{\Lambda}_{n+1}^p - \overline{\Lambda}_\infty^p) (\overline{\Lambda}_{n+1} - \overline{\Lambda}_n) (\overline{\Lambda}_n^{k-p-1} - \overline{\Lambda}_\infty^{k-p-1}) \\ &\quad + \sum_{p=0}^{k-2} \overline{\Lambda}_\infty^p (\overline{\Lambda}_{n+1} - \overline{\Lambda}_n) (\overline{\Lambda}_n^{k-p-1} - \overline{\Lambda}_\infty^{k-p-1}) \\ &\quad + \sum_{p=1}^{k-1} (\overline{\Lambda}_{n+1}^p - \overline{\Lambda}_\infty^p) (\overline{\Lambda}_{n+1} - \overline{\Lambda}_n) \overline{\Lambda}_\infty^{k-p-1} + \sum_{p=0}^{k-1} \overline{\Lambda}_\infty^p (\overline{\Lambda}_{n+1} - \overline{\Lambda}_n) \overline{\Lambda}_\infty^{k-p-1}. \end{aligned}$$

On majore ensuite séparément chacun des termes de cette somme

$$\begin{aligned} \|(\overline{\Lambda}_{n+1}^p - \overline{\Lambda}_\infty^p) (\overline{\Lambda}_{n+1} - \overline{\Lambda}_n) (\overline{\Lambda}_n^{k-p-1} - \overline{\Lambda}_\infty^{k-p-1})\|_{\mathcal{L}(H^q, H^q)} &\leq \|(\overline{\Lambda}_{n+1}^p - \overline{\Lambda}_\infty^p) \overline{A}^\varepsilon(t_{n+q+1})\|_{\mathcal{L}(H^q)}, \\ \|\overline{A}^{-\varepsilon}(t_{n+q+1}) (\overline{\Lambda}_{n+1} - \overline{\Lambda}_n) \overline{A}^{-1+\varepsilon}(t_{n+q})\|_{\mathcal{L}(H^q)} &\times \|\overline{A}^{1-\varepsilon}(t_{n+q}) (\overline{\Lambda}_n^{k-p-1} - \overline{\Lambda}_\infty^{k-p-1})\|_{\mathcal{L}(H^q)}. \end{aligned}$$

D'après le lemme 5, on a

$$\|(\bar{\Lambda}_{n+1}^p - \bar{\Lambda}_\infty^p) \bar{A}^\varepsilon(t_{n+q+1})\|_{\mathcal{L}(H^q)} \leq C \frac{e^{-\mu p \Delta t}}{(p \Delta t)^\varepsilon}$$

et

$$\|\bar{A}^{1-\varepsilon}(t_{n+q})(\bar{\Lambda}_n^{k-p-1} - \bar{\Lambda}_\infty^{k-p-1})\|_{\mathcal{L}(H^q)} \leq C \frac{e^{-\mu(k-p-1)\Delta t}}{((k-p-1)\Delta t)^{1-\varepsilon}}$$

En outre

$$\begin{aligned} & \| \bar{A}^{-\varepsilon}(t_{n+q+1})(\bar{\Lambda}_{n+1} - \bar{\Lambda}_n) \bar{A}^{-1+\varepsilon}(t_{n+q}) \|_{\mathcal{L}(H^q)} \\ & \leq C \sum_{i=0}^{q-1} \| A^{-\varepsilon}(t_{n+q+1})(\bar{\Delta}_{n+1, i} - \bar{\Delta}_{n, i}) \bar{A}^{-1+\varepsilon}(t_{n+q}) \| \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} & \| A^{-\varepsilon}(t_{n+q+1})(\bar{\Delta}_{n+1, i} - \bar{\Delta}_{n, i}) A^{-1+\varepsilon}(t_{n+q}) \|_{\mathcal{L}(H)} \\ & \leq \Delta t |\alpha_q \beta_i - \alpha_i \beta_q| \| (\alpha_q + \Delta t \beta_q A(t_{n+q+1}))^{-1} \|_{\mathcal{L}(H, H)}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \| A^{-\varepsilon}(t_{n+q+1})(A(t_{n+q+1})^{-1} A(t_{n+q})) A^{-1+\varepsilon}(t_{n+q}) \|_{\mathcal{L}(H, H)} \\ & \| (\alpha_q + \Delta t \beta_q A(t_{n+q}))^{-1} \|_{\mathcal{L}(H, H)} \leq CM \Delta t^2, \end{aligned}$$

d'après l'hypothèse (7)

On en déduit

$$\begin{aligned} & \| (\bar{\Lambda}_{n+1}^p - \bar{\Lambda}_\infty^p)(\bar{\Lambda}_{n+1} - \bar{\Lambda}_n)(\bar{\Lambda}_n^{k-p-1} - \bar{\Lambda}_\infty^{k-p-1}) \|_{\mathcal{L}(H^q, H^q)} \\ & \leq CM \Delta t \frac{e^{-\mu(k-1)\Delta t}}{p^\varepsilon (k-1-p)^{1-\varepsilon}} \end{aligned}$$

On majore ensuite le deuxième terme

$$\begin{aligned} & \| \bar{\Lambda}_\infty^p (\bar{\Lambda}_{n+1} - \bar{\Lambda}_n)(\bar{\Lambda}_n^{k-p-1} - \bar{\Lambda}_\infty^{k-p-1}) \|_{\mathcal{L}(H^q, H^q)} \\ & \leq C e^{-\mu p} \| (\bar{\Lambda}_{n+1} - \bar{\Lambda}_n) \bar{A}^{-1+\varepsilon}(t_{n+q}) \|_{\mathcal{L}(H^q)}, \\ & \| \bar{A}^{1-\varepsilon}(t_{n+q})(\bar{\Lambda}_n^{k-p-1} - \bar{\Lambda}_\infty^{k-p-1}) \|_{\mathcal{L}(H^q, H^q)} \end{aligned}$$

Or,

$$\begin{aligned} & \| (\bar{\Lambda}_{n+1} - \bar{\Lambda}_n) \bar{A}^{-1+\varepsilon}(t_{n+q}) \|_{\mathcal{L}(H^q, H^q)} \\ & \leq C \Delta t \sum_{i=0}^{q-1} |\alpha_q \beta_i - \alpha_i \beta_q| \| (\alpha_q + \Delta t \beta_q A(t_{n+q+1}))^{-1} A^\varepsilon(t_{n+q+1}) \|_{\mathcal{L}(H)}, \\ & \| A^{-\varepsilon}(t_{n+q+1})(A(t_{n+q+1}) - A(t_{n+q})) A^{-1+\varepsilon}(t_{n+q}) \|_{\mathcal{L}(H, H)} \\ & \times \| (\alpha_q + \Delta t \beta_q A(t_{n+q}))^{-1} \|_{\mathcal{L}(H, H)} \leq CM \Delta t^{2-\varepsilon}, \end{aligned}$$

d'après (7). Donc

$$\| \bar{\Lambda}_{\infty}^p (\bar{\Lambda}_{n+1} - \bar{\Lambda}_n) (\bar{\Lambda}_n^{k-p-1} - \bar{\Lambda}_{\infty}^{k-p-1}) \|_{\mathcal{L}(H^s, H^s)} \leq CM \Delta t e^{-\mu p} \frac{e^{-\mu(k-p-1)\Delta t}}{(k-1-p)^{1-\varepsilon}},$$

de même

$$\| (\bar{\Lambda}_{n+1}^p - \bar{\Lambda}_{\infty}^p) (\bar{\Lambda}_{n+1} - \bar{\Lambda}_n) \bar{\Lambda}_{\infty}^{k-p-1} \|_{\mathcal{L}(H^s, H^s)} \leq CM \Delta t e^{-\mu p \Delta t} \frac{e^{-\mu(k-1-p)}}{p^{\varepsilon}}.$$

et

$$\| \bar{\Lambda}_{\infty}^p (\bar{\Lambda}_{n+1} - \bar{\Lambda}_n) \bar{\Lambda}_{\infty}^{k-1-p} \|_{\mathcal{L}(H^s, H^s)} \leq CM \Delta t e^{-\mu(k-1)}.$$

on obtient la majoration

$$\begin{aligned} \| \bar{\Lambda}_{n+1}^k - \bar{\Lambda}_n^k \|_{\mathcal{L}(H^s, H^s)} &\leq CM \Delta t \left\{ \sum_{p=1}^{k-2} \frac{e^{-\mu(k-1)\Delta t}}{p^{\varepsilon} (k-1-p)^{1-\varepsilon}} + \sum_{p=0}^{k-2} \frac{e^{-\mu p} e^{-\mu(k-1-p)\Delta t}}{(k-1-p)^{1-\varepsilon}} \right. \\ &\quad \left. + \sum_{p=1}^{k-1} \frac{e^{-\mu p \Delta t} e^{-\mu(k-1-p)}}{p^{\varepsilon}} + (k-1) e^{-\mu(k-1)} \right\} \\ &\leq CM \Delta t e^{-\mu'(k-1)\Delta t} \left(1 + \sum_{p=1}^{k-2} \frac{1}{p^{\varepsilon} (k-1-p)^{1-\varepsilon}} \right). \end{aligned}$$

Il reste donc à majorer la quantité : $\sum_{p=1}^{k-2} 1/(p^{\varepsilon} (k-1-p)^{1-\varepsilon})$.

On considère pour cela la fonction

$$f(x) = \frac{1}{x^{\varepsilon} (1-x)^{1-\varepsilon}}, \quad 0 < x < 1;$$

cette fonction atteint son minimum en ε , on en déduit

$$\frac{1}{(k-1)(p/k-1)^{\varepsilon} (1-(p/(k-1)))^{1-\varepsilon}} \geq \int_{(p-1)/(k-1)}^{p/(k-1)} \frac{dx}{x^{\varepsilon} (1-x)^{1-\varepsilon}} \quad \text{pour } \frac{p}{k-1} \leq \varepsilon$$

et

$$\frac{1}{(k-1)(p/(k-1))^{\varepsilon} (1-(p/(k-1)))^{1-\varepsilon}} \leq \int_{p/(k-1)}^{(p+1)/(k-1)} \frac{dx}{x^{\varepsilon} (1-x)^{1-\varepsilon}} \quad \text{pour } \frac{p}{k-1} \geq \varepsilon,$$

d'où

$$\sum_{p=1}^{k-2} \frac{1}{p^{\varepsilon} (k-1-p)^{1-\varepsilon}} \leq \int_0^1 \frac{dx}{x^{\varepsilon} (1-x)^{1-\varepsilon}} \leq C \quad \text{pour } 0 < \varepsilon < 1$$

et donc

$$\|\bar{\Lambda}_{n+1}^k - \bar{\Lambda}_n^k\| \leq CM \Delta t e^{-\mu(k-1)\Delta t}$$

Ce lemme nous permet alors de démontrer les propositions 1, 2, 3

Démonstration de la proposition 3 Pour simplifier les notations, nous nous contenterons de faire la démonstration dans le cas $k = n + 1$, la démonstration se généralisant sans difficulté au cas $k \neq n + 1$ On a l'égalité

$$\Lambda_n \quad \Lambda_0 = \bar{\Lambda}_0^{n+1} + \sum_{p=1}^{n+1} (\bar{\Lambda}_p^{n+1-p} \Lambda_{p-1} \quad \Lambda_0 - \bar{\Lambda}_{p-1}^{n+2-p} \Lambda_{p-2} \quad \Lambda_0)$$

En outre,

$$\begin{aligned} & \bar{\Lambda}_p^{n+1-p} \Lambda_{p-1} \quad \Lambda_0 - \bar{\Lambda}_{p-1}^{n+2-p} \Lambda_{p-2} \quad \Lambda_0 \\ & = (\bar{\Lambda}_p^{n+1-p} - \bar{\Lambda}_{p-1}^{n+1-p}) \Lambda_{p-1} \quad \Lambda_0 + \bar{\Lambda}_{p-1}^{n+1-p} (\Lambda_{p-1} - \bar{\Lambda}_{p-1}) \Lambda_{p-2} \quad \Lambda_0, \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} \|\Lambda_n \quad \Lambda_0\|_{\mathcal{L}(H^s, H^s)} & \leq \|\bar{\Lambda}_0^{n+1}\|_{\mathcal{L}(H^s, H^s)} \\ & + \sum_{p=1}^n \|\bar{\Lambda}_p^{n+1-p} - \bar{\Lambda}_{p-1}^{n+1-p}\| \|\Lambda_{p-1} \quad \Lambda_0\| \\ & + \sum_{p=2}^{n+1} \|(\bar{\Lambda}_{p-1}^{n+1-p} - \bar{\Lambda}_\infty^{n+1-p}) \bar{A}^\varepsilon(t_{p-1+q})\| \\ & \times \|\bar{A}^{-\varepsilon}(t_{p-1+q})(\Lambda_{p-1} - \bar{\Lambda}_{p-1})\| \|\Lambda_{p-2} \quad \Lambda_0\| \\ & + \sum_{p=2}^{n+1} \|\bar{\Lambda}_\infty^{n+1-p}\| \|\Lambda_{p-1} - \bar{\Lambda}_{p-1}\| \|\Lambda_{p-2} \quad \Lambda_0\| \\ & + \|(\bar{\Lambda}_0^n - \bar{\Lambda}_\infty^n) \bar{A}^\varepsilon(t_q)\| \|\bar{A}^{-\varepsilon}(t_q)(\Lambda_0 - \bar{\Lambda}_0)\| + \|\bar{\Lambda}_\infty^n\| \|\Lambda_0 - \bar{\Lambda}_0\| \end{aligned}$$

D'après la proposition 5,

$$\|\bar{\Lambda}_0^{n+1}\|_{\mathcal{L}(H^s, H^s)} \leq C e^{-\mu(n+1)\Delta t} (1 + |\text{Log } \Delta t|)$$

d'après le lemme 8,

$$\|\bar{\Lambda}_p^{n+1-p} - \bar{\Lambda}_{p-1}^{n+1-p}\|_{\mathcal{L}(H^s, H^s)} \leq CM \Delta t e^{-\mu(n+1-p)\Delta t},$$

d'après le lemme 6,

$$\|\bar{A}^\varepsilon(t_{p-1+q})(\bar{\Lambda}_{p-1}^{n+1-p} - \bar{\Lambda}_\infty^{n+1-p})\| \leq C \frac{e^{-\mu(n+1-p)\Delta t}}{((n+1-p)\Delta t)^\varepsilon} \leq C \frac{e^{-\mu(n+1-p)\Delta t}}{\Delta t^\varepsilon},$$

d'après le lemme 3 .

$$\|\bar{\Lambda}_\infty^{n+1-p}\| \leq C e^{-\mu(n+1-p)}$$

Il reste à majorer les quantités

$$\|\bar{A}^{-\varepsilon}(t_{p+q})(\Lambda_p - \bar{\Lambda}_p)\| \quad \text{et} \quad \|\Lambda_p - \bar{\Lambda}_p\|.$$

Or,

$$\|\bar{A}^{-\varepsilon}(t_{p+q})(\Lambda_p - \bar{\Lambda}_p)\| \leq C \sum_{i=0}^{q-1} \|A^{-\varepsilon}(t_{p+q})(\Delta_{p,i} - \bar{\Delta}_{p,i})\|_{\mathcal{L}(H,H)}$$

et

$$\begin{aligned} \|\bar{A}^{\varepsilon}(t_{p+q})(\Delta_{p,i} - \bar{\Delta}_{p,i})\| \\ \leq |\beta_i| \|\Delta t A^{1-\varepsilon}(t_{p+q})(\alpha_q + \Delta t \beta_q A(t_{p+q}))^{-1}\|_{\mathcal{L}(H,H)} \\ \|\bar{A}^{-1}(t_{p+q})(A(t_{p+i}) - A(t_{p+q}))\|. \end{aligned}$$

Donc d'après l'hypothèse (8) ou (8 bis), on obtient :

$$\|\bar{A}^{-\varepsilon}(t_{p+q})(\Lambda_p - \bar{\Lambda}_q)\|_{\mathcal{L}(H^q, H^q)} \leq CM \Delta t^{1+\varepsilon};$$

de même

$$\|\Lambda_p - \bar{\Lambda}_p\|_{\mathcal{L}(H^q, H^q)} \leq CM \Delta t.$$

Posons alors :

$$\begin{aligned} a_0 &= 1, \\ a_p &= e^{\mu p \Delta t} \|\Lambda_{p-1} \dots \Lambda_0\|_{\mathcal{L}(H^q, H^q)}, \quad 1 \leq p \leq n+1. \end{aligned}$$

On a alors :

$$a_{n+1} \leq C \left((1 + |\text{Log } \Delta t|) + M \Delta t \sum_{p=0}^n a_p \right)$$

Montrons par récurrence l'inégalité

$$a_n \leq C(1 + |\text{Log } \Delta t|)(1 + CM \Delta t)^n.$$

En effet, ce résultat est vrai pour $n=1$; supposons que cette inégalité ait lieu pour n ; dans ce cas, on a

$$\begin{aligned} a_{n+1} &\leq C(1 + |\text{Log } \Delta t|) \left(1 + CM \Delta t \sum_{p=0}^n (1 + CM \Delta t)^p \right), \\ a_{n+1} &\leq C(1 + |\text{Log } \Delta t|) \left(1 + CM \Delta t \frac{(1 + CM \Delta t)^{n+1} - 1}{CM \Delta t} \right), \end{aligned}$$

d'où

$$a_{n+1} \leq C(1 + |\text{Log } \Delta t|)(1 + CM \Delta t)^{n+1} \leq C(1 + |\text{Log } \Delta t|) e^{CM(n+1)\Delta t}.$$

On obtient donc la majoration

$$\| \Lambda_n - \Lambda_0 \|_{\mathcal{L}(H^s, H^s)} \leq C e^{(CM - \mu)n\Delta t} (1 + |\text{Log } \Delta t|)$$

La démonstration des propositions 1 et 2 est analogue

BIBLIOGRAPHIE

- 1 G A BAKER et J H BRAMBLE *The Construction and Analysis of High Order Single-Step Galerkin Approximation for Parabolic Equations*, Preprint
- 2 G A BAKER J H BRAMBLE et V THOMEE *Single Step Galerkin Approximation for Parabolic Problems* Math Comp (a paraître)
- 3 M CROUZEIX, *Sur l'approximation des equations differentielles operationnelles par des methodes de Runge-Kutta* These, Universite de Paris-VI 1975
- 4 M CROUZEIX et P A RAVIART, *Approximation d'equations d'evolution lineaires par des methodes multi-pas* (a paraître)
- 5 H FUJITA et A MIZUTANI, *On the Finite Element Method for Parabolic Equations I Approximation of Holomorphic Semi-Groups* J Math Soc Japan, vol 28 n° 4, 1976
- 6 T KATO, *Perturbation Theory for Linear Operators* Springer Verlag Berlin, Heidelberg, New York
- 7 P E SOBOLEVSKII *Sur les equations de type parabolique dans les espaces de Banach*, Troudi Mosk Mat Obv vol 10, 1961, p 297-350
- 8 M ZLAMAL *Finite Element Multi Step Methods for Parabolic Equations*, I S N M 28, Birkhauser Verlag, Basel and Stuttgart 1975
- 9 M ZLAMAL *Finite Element Multi Step Discretizations of Parabolic Boundary Value Problems* Math Comp, vol 29 p 350-359
- 10 M ZLAMAL, *Finite Element Methods for non Linear Parabolic Equations* R A I R O Analyse numerique, vol 11, n° 1, 1977, p 93 a 107