RAIRO. ANALYSE NUMÉRIQUE

M. DEFILIPPI

Sur le calcul de la partie principale d'un tore de bifurcation pour un système différentiel périodique

RAIRO. Analyse numérique, tome 15, nº 1 (1981), p. 27-39

<http://www.numdam.org/item?id=M2AN_1981__15_1_27_0>

R A I R O Analyse numérique/Numerical Analysis
(vol 15, n° 1, 1981, p 27 a 40)

SUR LE CALCUL DE LA PARTIE PRINCIPALE D'UN TORE DE BIFURCATION POUR UN SYSTÈME DIFFÉRENTIEL PÉRIODIQUE (*)

par M. DEFILIPPI (1)

Communiqué par P -A RAVIART

Résumé — *On propose un nouvel algorithme de calcul de la partie principale d'un tore invariant de bifurcation qui ne fait pas appel a la détermination explicite de l'application de Poincaré. Des résultats numériques sont donnés dans le cas d'un système différentiel 2π-périodique du quatrième ordre*

Abstract — *We give in this paper a new algorithm to compute the principal part of a bifurcating invariant torus for which there is no need to work out the Poincaré mapping Numerical results are carried out in the case of a 2π-periodic differential system of fourth order*

1. INTRODUCTION

Le problème, traité dans [1], de la bifurcation d'une solution 2π-périodique en un tore invariant (par l'application de Poincaré) pour un système différentiel 2π-périodique non linéaire est repris dans un cadre mieux adapté aux équations différentielles ordinaires. En effet, suivant G. Iooss et D. D. Joseph [4], il est possible d'éviter le calcul explicite de l'application de Poincaré pour déterminer la partie principale du tore. La réduction en coordonnées polaires se fait directement à partir du système différentiel. De plus, la méthode peut éventuellement conduire à des approximations d'ordre supérieur.

Il faut souligner ici que les solutions situées sur le tore décrivent des oscillations non périodiques qui apparaissent dans certains phénomènes de vibrations forcées [2, 7]. Leurs effets pouvant être destructifs, il est intéressant de

(*) Reçu le 16 novembre 1979
(1) Université de Provence, Département Automatique et Dynamique Non Linéaire, Marseille

savoir caractériser ces oscillations quant à leurs fréquences fondamentales et de prévoir les valeurs des paramètres correspondant à leur apparition.

Dans ce but, l'aspect constructif de la méthode proposée permet le calcul effectif de la bifurcation au moyen d'un algorithme numérique qui simplifie le procédé de calcul établi dans [1]. En particulier le temps d'exécution et l'encombrement mémoire sont réduits dans de fortes proportions.

2. POSITION DU PROBLÈME. RÉSULTATS PRÉLIMINAIRES

Soit Λ un domaine ouvert de $\mathbb{R}$ et $X : \mathbb{R}^n \times \Lambda \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, $(x, \mu, t) \mapsto X(x, \mu, t)$ une application C^k telle que $\forall (x, \mu, t)$,

$$X(x, \mu, t) = X(x, \mu, t + 2\pi).$$

Considérons alors le système

$$\dot{x} = X(x, \mu, t) \quad \left(\cdot = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right) \tag{2.1}$$

satisfaisant les hypothèses suivantes.

H 1 : Pour $\mu = 0$, (2.1) possède une solution 2π-périodique $x_0^{\#}$.

L'équation aux variations correspondante est :

$$\dot{y} = \frac{\partial X}{\partial x}(x_0^{\#}(t), 0, t)\, y. \tag{2.2}$$

On note par $S_0(t)$ une matrice fondamentale ($\in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$) telle que $S_0(0) = \mathbf{1}$.

X est supposée être suffisamment régulière pour que dans un voisinage $\mathscr{V}(0)$ de $\mu = 0$, (2.1) possède une solution $x_\mu^{\#}(t)$ telle que $(\mathbf{1} - S_\mu(2\pi))^{-1}$ existe.

Alors pour $y_0 \in V(0)$ (voisinage de 0 dans $\mathbb{R}^n$) et pour tout $\mu \in \mathscr{V}(0)$ l'application C^k, $(y_0, t, \mu) \mapsto y(y_0, \mu, t)$ définie par

$$y(y_0, \mu, t) = x(y_0 + x_\mu^{\#}(0), \mu, t) - x_\mu^{\#}(t)$$

est solution unique de l'équation

$$\dot{y} = \frac{\partial X}{\partial x}(x_\mu^{\#}(t), \mu, t)\, y + M_\mu(y, t) \quad y(0) \in V(0),\ \mu \in \mathscr{V}(0). \tag{2.3}$$

On pose

$$\frac{\partial X}{\partial x}(x_\mu^{\#}(t), \mu, t) = A_\mu(t).$$

$M_\mu(y, t)$ contient les termes d'ordre au moins 2 et s'écrit :

$$M_\mu(y, t) = M_\mu^{(2)}(y, y, t) + M_\mu^{(3)}(y, y, y, t) + \cdots$$

où

$$\begin{aligned} M_\mu^{(2)}(y, y, t) &= \frac{1}{2} \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} (x_\mu^{\#}(t), \mu, t) . y^{(2)} \\ M_\mu^{(3)}(y, y, y, t) &= \frac{1}{3\,!} \frac{\partial^3 X}{\partial x^3} (x_\mu^{\#}(t), \mu, t) . y^{(3)} . \end{aligned} \tag{2.4}$$

2.1. Caractéristiques de la bifurcation

Les hypothèses suivantes précisent la nature de la bifurcation considérée.

H 2 : $S_0(2\pi)$ possède deux valeurs propres λ_0 et $\bar{\lambda}_0$ simples, distinctes, de module 1, telles que $\lambda_0^p \neq 1$ pour $p = 1, 2, \ldots, 2N + 3$, $N \geqslant 1$.

La théorie des perturbations [6] assure l'existence, pour $\mu \in \mathcal{V}(0)$, de deux valeurs propres, distinctes, complexes conjuguées, du résolvant fondamental $S_\mu(2\pi)$, notées $\lambda(\mu)$, $\bar{\lambda}(\mu)$ telles que $\lambda(0) = \lambda_0$; le reste du spectre se trouve à l'intérieur du cercle unité.

Les exposants de Floquet de $A_\mu(t)$, notés $\sigma(\mu)$ et tels que

$$\begin{aligned} e^{2\pi\sigma(\mu)} &= \lambda(\mu) \quad \text{satisfont :} \\ \sigma(\mu) &= i\omega_0 + \mu(\xi_1(\mu) + i\omega_1(\mu)) \end{aligned} \tag{2.5}$$

H 3 : $\xi_1(0) > 0$.

Cette dernière hypothèse signifie que $x_\mu^{\#}(t)$ est stable pour $\mu < 0$, instable pour $\mu > 0$, $\mu \in \mathcal{V}(0)$. Plus généralement, il faut préciser la façon dont a lieu la perte de stabilité.

Remarque 2.1 : La condition sur λ_0 dans H 2 peut être modifiée pour traiter les cas résonnants [2].

2.2. Décomposition du système (2.3)

Soit u_μ et $\bar{u}_\mu$ les vecteurs propres associés aux valeurs propres λ_μ et $\bar{\lambda}_\mu$, w_μ le vecteur propre relatif à la valeur propre $\bar{\lambda}_\mu$ de la matrice adjointe $S_\mu^*(2\pi)$, tels que $(u_\mu, w_\mu) = 1$.

Il est bien connu que $(S_\mu^{-1}(t))^*$ est résolvant fondamental de l'équation adjointe correspondant à (2.2) [3]. Soit alors les fonctions propres $\zeta_\mu(t)$ et $\zeta_\mu^*(t)$ qui satisfont à :

$$\begin{aligned} \zeta_\mu(t) &= e^{-\sigma(\mu)t} S_\mu(t)\, u_\mu \\ \zeta_\mu^*(t) &= e^{\bar{\sigma}(\mu)t} (S_\mu^{-1}(t))^*\, w_\mu \end{aligned} \tag{2.6}$$

et telles que

$$\zeta_\mu(t + 2\pi) = \zeta_\mu(t)\,; \quad \zeta^*_\mu(t + 2\pi) = \zeta^*_\mu(t)\,.$$

La relation

$$(\mathbf{1} - \mathbb{P}_\mu(t))\, r = (r, \zeta^*_\mu(t))\, \zeta_\mu(t) + (r, \overline{\zeta}^*_\mu(t))\, \overline{\zeta}_\mu(t) \quad \forall r \in \mathbb{R}^n \tag{2.7}$$

définit une projection telle que tout $y \in \mathbb{R}^n$ se décompose en

$$y = z\zeta_\mu(t) + \overline{z}\overline{\zeta}_\mu(t) + Y \tag{2.8}$$

où

$$z = (y, \zeta^*_\mu(t)) \in \mathbb{C} \quad \text{et} \quad Y = \mathbb{P}_\mu(t)\, y\,.$$

En appliquant $\mathbb{P}_\mu$ à (2.3), il vient :

$$\begin{aligned} \dot{z} &= \sigma(\mu)\, z + b(\mu, z, Y, t) \\ \dot{Y} &= A_\mu(t)\, Y + B(\mu, z, Y, t) \end{aligned} \tag{2.9}$$

avec

$$\begin{aligned} b(\mu, z, Y, t) &= (M_\mu(y, t), \zeta^*_\mu(t)) \\ B(\mu, z, Y, t) &= \mathbb{P}_\mu(t)\, M_\mu(y, t) \end{aligned} \tag{2.10}$$

b et B sont 2π-périodiques en t, et y est donné par (2.8).

2.3. Lemmes préliminaires

Les résultats suivants, établis de façon classique [3, 4], sont nécessaires par la suite.

LEMME 2.1 : *Si* $(p - q - 1)\,\omega_0 \notin \mathbb{Z}$ *et* $a \in C^k(\mathbb{C})$ *et* 2π*-périodique*

$$(a(t + 2\pi) = a(t))$$

alors l'équation

$$\dot{\gamma}(\mu, t) + (\sigma(\mu)(p - 1) + q\overline{\sigma}(\mu))\, \gamma(\mu, t) + a(\mu, t) = 0 \tag{2.11}$$

admet une solution 2π*-périodique unique* $\gamma \in C^{k+1}(\mathbb{C})$ *pour* $\mu \in \mathscr{V}(0)$.

LEMME 2.2 : *Si* $\exists n_0 \in \mathbb{Z}$ *satisfaisant* $n_0 + (p - q - 1)\,\omega_0 \neq 0$ *et si*

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} a(s)\, e^{-in_0 s}\, ds = 0\,,$$

alors (2.11) *possède une solution unique*

$$\gamma \in C^{k+1}(\mathbb{C}) \quad \textit{telle que} \quad \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \gamma(s)\, e^{-in\sigma s}\, ds = 0\,.$$

LEMME 2.3 : *Si* $t \to B(\mu, t) \in \mathbb{P}_\mu(t)\, \mathbb{R}^n$ *est* C^k *et* 2π*-périodique, alors l'équation*

$$\dot{\Gamma}(\mu, t) + (p\sigma(\mu) + q\overline{\sigma}(\mu))\, \Gamma(\mu, t) = A_\mu(t)\, \Gamma(\mu, t) + B(\mu, t)$$

admet une solution unique 2π*-périodique* $\Gamma \in C^{k+1}(\mathbb{P}_\mu(t)\, \mathbb{R}^n)$.

3. MISE EN ÉVIDENCE D'UN TORE DE SOLUTIONS POUR (2.3)

3.1. Réduction en coordonnées polaires

Il est possible dans (2.9) de réduire les termes indépendants de Y par un changement de variables en z, Y qui dépend de μ et t. Ce changement de variables est précisé de la façon suivante :

$$\begin{aligned} z' &= z + \gamma(\mu, z, t) \\ Y' &= Y + \Gamma(\mu, z, t) \end{aligned} \tag{3.1}$$

avec

$$\gamma(\mu, z, t) = \sum_{j=2}^{2N+2} \gamma_j(\mu, z, t)$$

$$\Gamma(\mu, z, t) = \sum_{j=2}^{2N+2} \Gamma_j(\mu, z, t)\,.$$

Les coefficients γ_j et Γ_j sont réguliers en (μ, t), 2π-périodiques en t, homogènes de degré j en z, $\overline{z}$ et prennent leur valeur respectivement dans $\mathbb{C}$ et $\mathbb{P}_\mu(t)\, \mathbb{R}^n$.

Le lemme suivant est alors établi en appliquant (3.1) à (2.9) par étapes successives en incrémentant j à chaque étape.

LEMME 3.1 : *Si l'hypothèse* H 2 *est vérifiée, le système* (2.9) *se transforme par* (3.1) *en*

$$\begin{aligned} \dot{z} &= \sigma(\mu)\, z + \sum_{m=1}^{N} a_{2m+1}(\mu)\, z^{m+1}\, \overline{z}^m + 0(|\, z\,|^{2N+3} + \|\, Y\,\|^2) \\ \dot{Y} &= A_\mu(t)\, Y + B_1(\mu, z, t) + B_2(\mu, z, Y, t) \end{aligned} \tag{3.2}$$

où $\sigma(\mu)$ *est donné par* (2.5) *et*

$$\| B_1(\mu, z, t) \| = 0(| z |^{2N+3})$$
$$\| B_2(\mu, z, Y, t) \| = 0(| z | \| Y \| + \| Y \|^2) .$$

Ce changement de variables sera effectué de façon explicite au paragraphe suivant.

Il suffit alors d'exprimer z en coordonnées polaires pour obtenir la réduction cherchée. Soit

$$z = \rho \, e^{2i\pi\varphi} \tag{3.3}$$

en utilisant (2.5) et en remarquant que

$$\dot{\rho} = \frac{1}{\rho} \mathcal{R}e \, (\bar{z}\dot{z}) \quad \text{et} \quad \dot{\varphi} = \frac{1}{2\pi\rho^2} \mathcal{I}m \, (\bar{z}\dot{z})$$

il vient :

$$\begin{aligned} \dot{\rho} &= \rho\left(\mu\xi_1(\mu) + \sum_{m=1}^{N} \alpha_{2m}(\mu)\, \rho^{2m}\right) + 0(\rho^{2N+3} + \| Y \|^2) \\ \dot{\varphi} &= \frac{1}{2\pi}(\omega_0 + \mu\omega_1(\mu)) + \sum_{m=1}^{N} \beta_{2m}(\mu)\, \rho^{2m} + 0\left(\rho^{2N+2} + \frac{1}{\rho} \| Y \|^2\right) \\ \dot{Y} &= A_\mu(t)\, Y + \widetilde{B}_1(\mu, \rho, \varphi, t) + \widetilde{B}_2(\mu, \rho, \varphi, Y, t) \end{aligned} \tag{3.4}$$

avec

$$\| \widetilde{B}_1 \| = 0(\rho^{2N+3}) \quad \text{et} \quad \alpha_{2m} \text{ analytique en } \mu .$$

3.2. Existence d'un tore invariant

Pour que la bifurcation ait lieu, il est suffisant que :

H 4 : $\alpha_2(0) \neq 0$.

Soit $\rho_0(\mu)$ la solution, analytique en $\mu^{1/2}$, de

$$\mu\xi_1(\mu) + \sum_{m=1}^{N} \alpha_{2m}(\mu)\, \rho^{2m} = 0 \tag{3.5}$$

qui satisfait

$$\rho_0^2(\mu) = \mu\left(\frac{\xi_1(0)}{-\alpha_2(0)}\right) + 0(\mu^2) . \tag{3.6}$$

A l'ordre μ^N, $\rho = \rho_0(\mu)$, $Y = 0$, $\varphi = \omega(\mu)\,t$ est solution de (3.4). Alors par le changement de variables

$$\begin{aligned} \rho &= \rho_0(\mu)\,(1 + \mu^{(2N-1)/2}\,\chi) \\ Y &= \mu^{N+1}\ \hat{Y} \end{aligned} \tag{3.7}$$

et grâce à (3.5), le système (3.4) se transforme en

$$\begin{aligned} \dot{\chi} &= -\,2\,\mu\xi_1(0)\,\chi + 0(\mu^{3/2}) \\ \dot{\varphi} &= \frac{\omega_0}{2\,\pi} + \sum_{j=1}^{N} \mu^j\,\tilde{\omega}_j + 0(\mu^{N+1/2}\,|\,\chi\,| + \mu^{N+1}) \\ \dot{\hat{Y}} &= A_\mu(t)\,\hat{Y} + \hat{B}_1(\mu, \chi, \varphi, t) + \hat{B}_2(\mu, \chi, \varphi, \hat{Y}, t) \end{aligned} \tag{3.8}$$

avec

$$\|\,\hat{B}_1\,\| = 0(\mu^{1/2})\,; \quad \|\,\hat{B}_2\,\| = 0(\mu^{1/2})\,.$$

En utilisant les résultats de [1] il est alors possible d'établir pour (3.8) et par suite pour (2.3) l'existence d'un tore de dimension deux, invariant par l'application de Poincaré qui satisfait les conditions d'un théorème de variété centrale. Il faut noter que l'application de Poincaré n'intervient pas ici dans la détermination de $\rho_0(\mu)$.

Dans (3.6), le signe de $\xi_1(0)$ dépend de la façon dont $x_\mu^{\#}(t)$ perd sa stabilité pour $\mu = 0$ et le signe de $\alpha_2(0)$ doit rendre ρ_0^2 positif. Dans ces conditions, suivant [1], si

$\alpha_2(0) < 0$ dans un voisinage à droite de $\mu = 0$, le tore bifurqué est attractif;

$\alpha_2(0) > 0$ dans un voisinage à gauche de $\mu = 0$, il est répulsif.

La partie principale de ce tore donne une approximation de la solution bifurquée, analogue à celle obtenue dans [1]. Limité à l'ordre μ^N, $z(t)$ s'exprime par :

$$z(t) = \rho_0(\mu)\,e^{2i\pi\varphi(t)} + 0(\mu^{N+1}) \tag{3.9}$$

où

$$2\,\pi\varphi(t) = 2\,\pi\varphi_0 + \tilde{\omega}(\mu)\,t + \tilde{\psi}(\mu, t) \tag{3.10}$$

avec

$$\left|\frac{d\tilde{\psi}(\mu, t)}{dt}\right| = 0(\mu^{N+1/2})$$

et $\varphi_0 \in [0, 1]$

$$y(t) = \rho_0(\mu)\,(e^{2i\pi\varphi_0}\,S_0(t)\,u_0 + e^{-2i\pi\varphi_0}\,S_0(t)\,\bar{u}_0) + 0(\mu) \tag{3.11}$$

pour $t = 0(1)$.

Les deux fréquences fondamentales sont $1/2\,\pi$ et $\omega_0/2\,\pi$.

4. ALGORITHME DE CALCUL DE $\alpha_2(0)$

4.1. Détermination de $\alpha_2(0)$

Le terme $\xi_1(0)$ étant connu, pour μ donné, directement à partir de (2.5), il est nécessaire de déterminer la valeur de $\alpha_2(0)$. Son expression est obtenue en explicitant le changement de variables (3.1) jusqu'à un ordre suffisant pour faire apparaître les termes en $z^2\,\bar{z}$ dans la première équation (2.9). Soit suivant (3.1)

$$\begin{aligned}\gamma(\mu, z, t) = \gamma_{20}(\mu, t)\, z^2 + \gamma_{11}(\mu, t)\, z\bar{z} + \gamma_{02}(\mu, t)\,\bar{z}^2 + \gamma_{30}(\mu, t)\, z^3 + &\\ + \gamma_{21}(\mu, t)\, z^2\,\bar{z} + \gamma_{12}(\mu, t)\, z\bar{z}^2 + \gamma_{03}(\mu, t)\,\bar{z}^3 + 0(|\, z\,|^4) &\quad (4.1)\\ \Gamma(\mu, z, t) = \Gamma_{20}(\mu, t)\, z^2 + \Gamma_{11}(\mu, t)\, z\bar{z} + \Gamma_{02}(\mu, t)\,\bar{z}^2 + 0(|\, z\,|^3)\,. &\end{aligned}$$

Avec les mêmes notations, le terme $b(\mu, z, Y, t)$ de la première équation (2.9) se développe suivant les puissances de z

$$\begin{aligned}b(\mu, z, Y, t) = b_{20}(\mu, t)\, z^2 + b_{11}(\mu, t)\, z\bar{z} + b_{02}(\mu, t)\,\bar{z}^2 + b_{30}(\mu, t)\, z^3 + &\\ + b_{21}(\mu, t)\, z^2\,\bar{z} + b_{12}(\mu, t)\, z\bar{z}^2 + b_{03}\,\bar{z}^3 + 0(|\, z\,|^4)\,. &\quad (4.2)\end{aligned}$$

Les coefficients b_{pq} sont construits à l'aide de (2.10).

En dérivant la première équation (3.1), il vient :

$$\dot{z}' = \dot{z} + \dot{\gamma}(\mu, z, t)\,. \tag{4.3}$$

Dans cette équation z et γ s'expriment en fonction de z' par :

$$\left.\begin{aligned} z &= z' - \gamma(\mu, z', t) + \gamma'(\mu, z', t)\,\gamma(\mu, z', t) + 0(|\, z\,|^4)\\ \gamma(\mu, z, t) &= \gamma(\mu, z', t) - \gamma'(\mu, z', t)\,\gamma(\mu, z', t) + \cdots\end{aligned}\right. \tag{4.4}$$

où γ' représente la dérivée de γ par rapport à son second argument. Il suffit alors de développer le second membre de (4.3) suivant les puissances de z' en utilisant (4.2) et (4.4). Il est alors possible, grâce au lemme 2.1, d'éliminer certains des coefficients ainsi obtenus. Les termes d'ordre 2 ont pour expression :

$$\hat{b}_{pq}(\mu, t) = \dot{\gamma}_{pq}(\mu, t) + (\sigma(\mu)\,(p-1) + q\bar{\sigma}(\mu))\,\gamma_{pq}(\mu, t) + b_{pq}(\mu, t)\,, \qquad p + q = 2 \tag{4.5}$$

où $\sigma(\mu)$ est donné par (2.5) et les b_{pq} par (2.10).

L'hypothèse H 2 permet d'appliquer le lemme 2.1 et d'annuler les $\hat{b}_{pq}$ qui satisfont :

$$\dot{\gamma}_{pq}(\mu, t) + (\sigma(\mu)\,(p-1) + q\bar{\sigma}(\mu))\,\gamma_{pq}(\mu, t) + b_{pq}(\mu, t) = 0\,. \tag{4.6}$$

Les coefficients γ_{pq} du changement de variables (3.1) sont alors obtenus comme solutions de (4.6).

De même, les termes d'ordre 3 s'éliminent à l'aide d'équations du type (4.6) à l'exception de $z'^2\,\overline{z}'$ qui a pour coefficient :

$$\hat{b}_{21} = \dot{\gamma}_{21}(\mu, t) + (\sigma(\mu) + \overline{\sigma}(\mu))\,\gamma_{21}(\mu, t) + a(\mu, t) \tag{4.7}$$

où

$$a(\mu, t) = b_{21}(\mu, t) + 2\,\gamma_{20}(\mu, t)\,b_{11}(\mu, t) + \gamma_{11}(\mu, t)\,(b_{20}(\mu, t) + \overline{b}_{11}(\mu, t)) + \\ + 2\,\gamma_{02}(\mu, t)\,\overline{b}_{02}(\mu, t)\,. \tag{4.8}$$

Les γ_{pq} sont connus par (4.6) et les b_{pq} par (2.10).

L'expression (4.7) ne peut être annulée car pour $p = 2$, $q = 1$ la condition du lemme 2.1 n'est pas remplie. Toutefois le lemme 2.2, avec $n_0 = 0$, permet de réduire le coefficient de $z'^2\,\overline{z}'$ à

$$\hat{b}_{21} = a_3(\mu)$$

avec

$$a_3(\mu) = \frac{1}{2\,\pi}\int_0^{2\pi} a(\mu, t)\,\mathrm{d}t \tag{4.9}$$

qui est le premier terme de la somme figurant dans (3.2).

De la même façon, en effectuant le changement de variables dans la seconde équation (2.9) et en utilisant le lemme 2.3 pour annuler les coefficients des termes quadratiques en z' les Γ_{pq} sont obtenus comme solutions de

$$\dot{\Gamma}_{pq}(\mu, t) + (p\sigma(\mu) + q\overline{\sigma}(\mu))\,\Gamma_{pq}(\mu, t) = A_\mu(t)\,\Gamma_{pq}(\mu, t) - B_{pq}(\mu, t)\,, \\ p + q = 2 \tag{4.10}$$

les B_{pq} étant connus par (2.10).

Il est alors possible de calculer pour $\mu = 0$ l'expression

$$\alpha_2(0) = \mathscr{R}\mathrm{e}\left(\frac{1}{2\,\pi}\int_0^{2\pi} a(0, t)\,\mathrm{d}t\right) \tag{4.11}$$

Remarque 4.1 : En augmentant l'ordre des développements de γ et Γ il est possible d'envisager le calcul des coefficients des approximations supérieures pour (3.1). Dans [5], D. D. Joseph utilise une méthode fondée sur l'emploi de deux échelles de temps susceptible de simplifier ce calcul.

4.2. Récapitulation des différents termes à calculer

A partir de (2.10), il vient :

$$\begin{aligned}
b_{20}(0,t) &= (M_0^{(2)}(\zeta_0(t),\zeta_0(t)),\zeta_0^*(t))\\
b_{11}(0,t) &= 2(M_0^{(2)}(\zeta_0(t),\overline{\zeta}_0(t)),\zeta_0^*(t))\\
b_{02}(0,t) &= (M_0^{(2)}(\overline{\zeta}_0(t),\overline{\zeta}_0(t)),\zeta_0^*(t)) \qquad (4.12)\\
b_{21}(0,t) &= 3(M_0^{(3)}(\zeta_0(t),\zeta_0(t),\overline{\zeta}_0(t)),\zeta_0^*(t)) - 2((M_0^{(2)}(\zeta_0(t),\Gamma_{11}(0,t)) +\\
&\quad + M_0^{(2)}(\overline{\zeta}_0(t),\Gamma_{20}(0,t))),\zeta_0^*(t)) .
\end{aligned}$$

Dans b_{21} les termes Γ_{20} et Γ_{11}, solutions de (4.10), sont donnés par :

$$\begin{aligned}
\Gamma_{20}(0,t) &= -\, e^{2i\omega_0 t} S_0(t)\ (\lambda_0^2 - S_0(2\pi))^{-1}\int_0^{2\pi} e^{2i\omega_0 s}\, S_0(2\pi,s)\, B_{20}(0,s)\, ds -\\
&\quad - e^{-2i\omega_0 t}\int_0^t e^{2i\omega_0 s}\, S_0(t,s)\, B_{20}(0,s)\, ds \qquad (4.13)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_{11}(0,t) &= -\, S_0(t)\,(\mathbf{1} - S_0(2\pi))^{-1}\int_0^{2\pi} S_0(2\pi,s)\, B_{11}(0,s)\, ds -\\
&\quad - \int_0^t S_0(t,s)\, B_{11}(0,s)\, ds \qquad (4.14)
\end{aligned}$$

avec, d'après la seconde équation (2.10)

$$\begin{aligned}
B_{20}(0,t) &= \mathbb{P}_0\, M_0^{(2)}(\zeta_0(t),\zeta_0(t))\\
B_{11}(0,t) &= 2\,\mathbb{P}_0\, M_0^{(2)}(\zeta_0(t),\overline{\zeta}_0(t)) \qquad (4.15)
\end{aligned}$$

et $$S_0(t,s) = S_0(t)\, S_0^{-1}(s) .$$

De même, les termes γ_{pq}, solutions de (4.6), satisfont

$$\begin{aligned}
\gamma_{pq}(0,t) &= \frac{e^{-i\omega_0 t(p-q-1)}}{1-\lambda_0^{p-1}\,\overline{\lambda}_0^q}\int_0^{2\pi} b_{pq}(0,t)\, e^{i\omega_0 t(p-q-1)}\, dt -\\
&\quad - \int_0^t b_{pq}(0,s)\, e^{-i\omega_0(p-q-1)(t-s)}\, ds \qquad (4.16)
\end{aligned}$$

La quantité $a(0,t)$ est alors fournie par (4.8) et sa valeur moyenne donne $\alpha_2(0)$.

Remarque 4.2 : Les expressions précédentes, bien que formellement comparables aux relations (3.29), (3.30) et (3.31) de [1], sont plus simples à mettre en œuvre. L'amélioration porte essentiellement sur la réduction du nombre de séquences faisant intervenir des matrices et vecteurs d'ordre n d'une part et sur le calcul des intégrales d'autre part.

5. ESSAIS NUMÉRIQUES

Pour mettre en œuvre la procédure décrite, il est nécessaire de disposer d'une bonne approximation de la solution $(x_0^{\#}(t))$ et de la matrice fondamentale $S_0(t, s)$ associée. Dans ce qui suit, comme dans [1], $(x_0^{\#}(t))$ est approché par un polynôme trigonométrique d'ordre élevé, dont l'existence est assuré sous les hypothèses H 1, H 2, H 3 et pour lequel on sait estimer l'écart à la solution exacte (Méthode de Galerkin-Urabe [2, 8]).

Pour tester l'algorithme élaboré, on reprend l'exemple traité dans [1], issu de la physique des vibrations. Il correspond au système différentiel suivant :

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= x_3 \\
\dot{x}_2 &= x_4 \\
\dot{x}_3 &= -\Omega_0^2 x_1 + k\Omega_0^2 x_2 - 2q\Omega_0(1 + 8a_1 x_1^2) x_3 - \frac{8}{3}\Omega_0^2(a_1 x_1^3 - ka_2 x_2^3) + \\
&\qquad + 2\Omega\Omega_0 E \cos \Omega t \qquad (5.1) \\
\dot{x}_4 &= -\Omega_0^2 x_2 + k\Omega_0^2 x_1 - 2q\Omega_0(1 + 8a_2 x_2^2) x_4 - \frac{8}{3}\Omega_0^2(a_2 x_2^3 - ka_1 x_1^3).
\end{aligned}$$

Les caractéristiques physiques, décrites dans [2], conduisent aux valeurs suivantes des paramètres,

$$\begin{array}{lll}
a_1 = 0{,}707\,262 & q = 0{,}002\,678 & E = 0{,}364\,403 \\
a_2 = 0{,}813\,827 & k = 0{,}2 & \Omega_0 = 1\,382{,}300
\end{array}$$

les solutions périodiques de (5.1) y sont étudiées en détail.

Suivant que la perte de stabilité a lieu, pour $\Omega = \Omega_c$, par valeurs croissantes ou décroissantes de Ω, le paramètre de bifurcation est soit $(\Omega - \Omega_c)/\Omega_0$, soit $\Omega_0(\Omega_c - \Omega)/\Omega\Omega_c$.

Soit alors $(x_\mu^{\#}(t))$ la solution sous-harmonique d'ordre trois qui est stable pour $\Omega < \Omega_{1c}$ et $\Omega > \Omega_{2c}$, instable pour $\Omega_{1c} < \Omega < \Omega_{2c}$. Les fréquences critiques ont pour valeurs :

$$\Omega_{1c} = 4\,855{,}118 \quad \Omega_{2c} = 5\,829{,}858\,.$$

Pour ne pas alourdir le texte, seuls les résultats relatifs à la première bifurcation sont donnés en détail.

La solution $(x_0^{\#}(t))$ est approchée avec une erreur de $1{,}5 \times 10^{-7}$ [1]. Les valeurs propres de $S_0(2\pi)$ ont pour valeurs :

$$\lambda_0, \bar{\lambda}_0 = 0{,}797\,096\,3 \pm i \times 0{,}603\,851\,4\,; \quad |\lambda_0| = 0{,}999\,999\,5$$

$$\lambda_1, \bar{\lambda}_1 = 0{,}770\,209\,8 \pm i \times 0{,}578\,584\,3\,; \quad |\lambda_1| = 0{,}963\,318\,6$$

$$\omega_0 = 0{,}103\,184\,0\,.$$

Le calcul donne

$$\alpha_2(0) = -\ 103{,}921$$

et par suite il existe pour (5.1) un tore attractif dans un voisinage à droite de Ω_{1c}. La valeur du « rayon » de la partie principale de ce tore calculée pour $\Omega = 4\,855{,}164\,9$ est égale à :

$$\rho_0 = 1{,}259\,897 \times 10^{-3}\,.$$

La valeur calculée dans [1] était $1{,}259\,908 \times 10^{-3}$.

A la seconde valeur critique Ω_{2c} correspond une bifurcation telle que

$$\alpha_2(0) = 0{,}823\,112$$

ce qui conduit à l'existence pour (5.1) d'un tore répulsif dans un voisinage à gauche de Ω_{2c}, avec pour $\Omega = 5\,829{,}924$, une valeur de $\rho_0 = 2{,}910\,195 \times 10^{-3}$ au lieu de $2{,}941\,522 \times 10^{-3}$.

Les deux algorithmes conduisent à des résultats numériques équivalents. Toutefois, les simplifications évoquées plus haut permettent un gain important, aussi bien en encombrement mémoire qu'en temps d'exécution. En effet, les calculs étant effectués sur CII-IRIS 80 sous système SIRIS 8 version CO9B dans les deux cas, l'encombrement mémoire passe de 30 208 mots à 23 040 mots et le temps d'exécution de 0,75 à 0,14 min.

Il m'est agréable de remercier ici G. Iooss dont j'ai utilisé avec profit les remarques et les conseils.

BIBLIOGRAPHIE

1. R. Bouc, M. Defilippi, G. Iooss, *On a problem of forced nonlinear oscillations. Numerical example of bifurcation into an invariant torus*. Nonlinear Analysis, Theory, Methods and Applications, *2*, n° 2, 211-224 (1978).
2. M. Defilippi, *Quelques aspects des oscillations sous-harmoniques et irrégulières de deux circuits couplés non linéaires*. Thèse de Doctorat d'État, Marseille (1974).

3. J. K. HALE, *Ordinary differential equations*. Wiley Interscience (1969).
4. G. IOOSS, D. D. JOSEPH, *Elementary stability and bifurcation theory*. Chap. X (à paraître).
5. D. D. JOSEPH, *Remarks about bifurcation and stability of quasiperiodic solutions which bifurcate from periodic solutions of the Navier-Stokes equations*. Springer Lecture Notes in Mathematics, nº 322 (1973).
6. T. KATO, *Perturbation theory for linear operators*. Springer-Verlag (1976).
7. L. PUST, *Vibrations of nonlinear undamped two-degree of freedom system*. Nakladatelstin Cekoslovenske akademieved (1959).
8. M. URABE, *Galerkin's procedure for nonlinear periodic systems*. Arch. Ration. Mech. Analysis, *20*, 120 (1965).