RAIRO. ANALYSE NUMÉRIQUE

M. COSNARD

Comportement d'itérations d'un opérateur de renormalisation

RAIRO. Analyse numérique, tome 16, nº 4 (1982), p. 301-318
<http://www.numdam.org/item?id=M2AN_1982__16_4_301_0>

R A I R O Analyse numérique/Numerical Analysis
(vol 16, n° 4, 1982, p 301 à 318)

COMPORTEMENT D'ITÉRATIONS D'UN OPÉRATEUR DE RENORMALISATION

par M. COSNARD [1]

Communiqué par F ROBERT

Résumé — *Nous étudions les propriétés itératives d'un opérateur de renormalisation, appliqué à des fonctions admettant en un point fixe une dérivée égale à un Nous montrons qu'il existe une valeur critique du paramètre de renormalisation pour laquelle la suite des applications renormalisées converge uniformément vers un point fixe non trivial Cette valeur critique ainsi que le point fixe de l'operateur dépendent uniquement d'un développement asymptotique de la fonction au voisinage de son point fixe Le comportement de l'opérateur de renormalisation, pour des valeurs du paramètre différentes de la valeur critique, est étudié et le schéma de bifurcation est totalement explicité*

Abstract — *We study iterative properties of a renormalization operator, applied to a particular class of functions · these with a derivative equal to one at a common fixed point We show that there exists a critical value of the renormalization parameter for which the sequence of renormalized functions is uniformly convergent to a non trivial fixed point This critical value and the fixed point of the operator are shown to be uniquely dependent of an asymptotic expansion of the function in a neighbourhood of its fixed point The behaviour of the renormalization operator, for parameter values different from the critical one, is studied and the bifurcation scheme explicitly given.*

Une méthode, couramment utilisée pour étudier le comportement d'itérations d'une application continue f de [0, 1] dans lui-même, consiste à comparer le graphe de f et celui de ses itérées. En effet les propriétés itératives de f ne dépendent que des propriétés géométriques de son graphe. Il s'agit donc de rechercher des sous-intervalles de [0, 1], invariants par une puissance f^n (au sens de la composition), sur lesquels le graphe de cette puissance « ressemble » à celui de f. Par l'utilisation d'une homothétie on peut agrandir un de ces sous-intervalles à tout [0, 1]. La connaissance partielle des propriétés itératives de f (existence de points fixes, cycles d'ordre petit, convergence, ...) permet alors d'obtenir des propriétés sur le comportement d'itérations de f^n

(*) Reçu en décembre 1981
([1]) Laboratoire d'Informatique et de Mathématiques Appliquees de Grenoble, BP 53, 38041 Grenoble Cedex

et donc de nouvelles propriétés de f elle-même Cette technique s'apparente à une méthode utilisée en physique pour l'étude des phénomènes critiques la renormalisation

Son application à l'étude des valeurs de bifurcation de familles de fonctions dépendant d'un paramètre n'est pas nouvelle (exemple technique des « boîtes emboîtées » de Gumowski et Mira [7], [8]) Cependant un certain nombre de travaux récents [1], [2], [4], [6], [10] ont systématisé son utilisation par la définition d'un opérateur, dit de renormalisation L'étude des propriétés itératives de cet opérateur permettrait de mieux comprendre certaines bifurcations non classiques [2], [6], [10] Pour le moment les résultats obtenus ne sont que partiels

Le but de ce travail est l'étude du comportement d'itération de cet opérateur, appliqué à une classe de fonctions particulièrement simples les applications continues admettant un point fixe globalement attractif Nous montrons que, pour chaque valeur du paramètre de renormalisation, l'operateur admet un point fixe caractérisé par son développement limité à l'origine Ce point fixe est attractif dans la classe des fonctions continues admettant le même développement limité à l'origine, répulsif dans les autres classes Ces résultats sont démontrés pour la renormalisation de la seconde itérée de f, mais peuvent être étendus à la renormalisation d'une itérée quelconque

Les résultats présentés permettent de mieux comprendre les propriétés de l'opérateur de renormalisation Ces propriétés sont proches de celles obtenues ou conjecturées dans le cas de la renormalisation de fonctions unimodales [2] [6] [10]

I. DEFINITIONS ET PROPRIETÉS

Nous définissons $C^0([0, 1])$ comme l'ensemble des applications continues de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$ admettant 0 comme point fixe, c'est-à-dire telles que $f(0) = 0$ $C^0([0, 1], [0, 1])$ est le sous-ensemble de $C^0([0, 1])$ des applications de $[0, 1]$ dans lui-même

DEFINITION 1 *Soit* $\alpha \in]0, 1]$ *Nous appellerons operateur de renormalisation* R_α *l'application d'une partie de* C^0 $([0, 1], [0, 1])$ *dans lui-même définie par*

$$R_\alpha f(x) = \frac{1}{\alpha} f^2(\alpha x) \quad \forall x \in [0, 1]$$

où f^2 *est l'application composée de* f *par elle-même*

$R_\alpha f$ *n'est définie que si* $f^2([0, \alpha]) \subseteq [0, \alpha]$ *Nous dirons alors que* f *est renormalisable et que* $R_\alpha f$ *est l'application renormalisée de* f

Géométriquement cet opérateur consiste à considérer le graphe de f^2 entre 0 et α et, par l'homothétie de rapport $1/\alpha$ et de centre 0, à lui faire correspondre la courbe homothétique dans le carré de côté [0, 1]. L'application renormalisée est celle admettant cette courbe comme graphe.

Dans la suite nous étudierons les propriétés itératives de R_α. Intéressons-nous tout d'abord aux points fixes de R_α, c'est-à-dire aux solutions de l'équation fonctionnelle :

$$R_\alpha f = f \Leftrightarrow \forall x \in [0, 1] \quad f(x) = \frac{1}{\alpha} f^2(\alpha x) . \tag{1}$$

L'équation (1) admet deux solutions triviales : la fonction nulle

$$(\forall x \in [0, 1]\, f(x) = 0)$$

et l'identité ($\forall x \in [0, 1]\, f(x) = x$) pour tout $\alpha \in]0, 1]$.

Si $\alpha = 1$, (1) se réduit à $f^2(x) = f(x)$ $\forall x \in [0, 1]$. Cette équation a déjà été étudiée, voir Kuczma [9], Cosnard *et al.* [3]. Elle admet des solutions de la forme

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si} \quad x \in [0, a] \\ g(x) \quad 0 \leqslant g(x) \leqslant a & \text{si} \quad x \in]a, 1] \end{cases} \quad \text{où} \quad a \in [0, 1] .$$

Nous considérons donc par la suite le cas $\alpha \neq 1$.

Pour chaque valeur du paramètre α, R_α admet une famille de points fixes.

THÉORÈME 1 : *Pour tout réel positif* β *l'application*

$$f_{b,\beta}(x) = \frac{x}{(1 + bx^{1/\beta})^\beta} \qquad b \geqslant 0$$

est solution de (1) *avec* $\alpha = \left(\frac{1}{2}\right)^\beta$.

Démonstration : La condition $b \geqslant 0$ est nécessaire et suffisante pour que $f_{b,\beta} \in C^0([0, 1], [0, 1])$. De plus

$\forall x \in [0, 1]$

$$f_{b,\beta}^2(x) = \frac{x}{(1 + 2\, bx^{1/\beta})^\beta} \Rightarrow R_{(1/2)^\beta} f_{b,\beta}(x) = \frac{x}{\left(1 + \dfrac{2\, bx^{1/\beta}}{2}\right)^\beta} = f_{b,\beta}(x) .$$

Dans toute la suite nous poserons $\alpha = \left(\frac{1}{2}\right)^\beta$ et nous utiliserons la notation

R_β au lieu de $R_{(1/2)^\beta}$ pour simplifier les notations. De plus nous poserons :

$$S_\beta(x) = x^\beta \quad \text{et} \quad \Phi_\beta(x) = 2^\beta\, x\,.$$

PROPOSITION 1 *Les relations suivantes sont vérifiées*

1) $\forall \beta \in \mathbb{R}^{+*}$, $\forall b \in \mathbb{R}^+$ $\quad f_{b,\beta} = S_\beta \circ f_{b,1} \circ S_\beta^{-1}$

2) $\forall \gamma, \delta \in \mathbb{R}^{+*}$ $\quad \Phi_\gamma \circ S_\delta = S_\delta \circ \Phi_{\gamma/\delta} \quad S_\delta^{-1} \circ \Phi_\gamma^{-1} = \Phi_{\gamma/\delta}^{-1} \circ S_\delta^{-1}$

3) $\forall \beta \in \mathbb{R}^{+*}$ $\quad$ *si G est renormalisable par R_β alors*

$$R_\beta\, G = \Phi_\beta \circ G^2 \circ \Phi_\beta^{-1}$$

4) $\forall \gamma, \delta \in \mathbb{R}^{+*}$ $\quad$ *si G est renormalisable par R_γ et si $H = S_\delta^{-1} \circ G \circ S_\delta$ alors*

$$R_\gamma\, G = S_\delta \circ R_{\gamma/\delta}\, H \circ S_\delta^{-1}\,.$$

Démonstration :

1) Conséquence directe des définitions.

2) Provient de l'egalité $2^\gamma . x^\delta = (2^{\gamma/\delta} . x)^\delta$

3) Conséquence directe des définitions.

4) Si G est renormalisable par R_γ, c'est-à-dire si

$$G^2\left[0, \left(\frac{1}{2}\right)^\gamma\right] \subseteq \left[0, \left(\frac{1}{2}\right)^\gamma\right]$$

alors

$$H^2\left[0, \left(\frac{1}{2}\right)^{\gamma/\delta}\right] = S_\delta^{-1} \circ G^2\left[0, \left(\frac{1}{2}\right)^\gamma\right] \subseteq S_\delta^{-1}\left[0, \left(\frac{1}{2}\right)^\gamma\right] \subseteq \left[0, \left(\frac{1}{2}\right)^{\gamma/\delta}\right].$$

Par conséquent H est renormalisable par $R_{\gamma/\delta}$. De plus

$$R_\gamma\, G = \Phi_\gamma \circ G^2 \circ \Phi_\gamma^{-1} = \Phi_\gamma \circ S_\delta \circ H^2 \circ S_\delta^{-1} \circ \Phi_\gamma^{-1} =$$
$$= S_\delta \circ \Phi_{\gamma/\delta} \circ H^2 \circ \Phi_{\gamma/\delta}^{-1} \circ S_\delta^{-1} = S_\delta \circ R_{\gamma/\delta}\, H \circ S_\delta^{-1}\,.$$

Cette proposition et les résultats qui en découlent sont de base dans notre étude. Les parties 1) et 4) mettent en évidence des relations de conjugaison entre $f_{b,\beta}$ et $f_{b,1}$ d'une part et R_γ et $R_{\gamma/\delta}$ d'autre part

Ces relations nous permettront (avec l'aide du corollaire et de la proposition suivants) de généraliser dans la troisième partie les résultats obtenus dans la seconde. La relation (2) qui montre une sorte de propriété de commutativité entre les opérateurs S et Φ sera utilisée de la même façon La relation (3) donne une écriture agréable de l'opérateur de renormalisation Il faut cependant prendre garde à ne pas confondre

$$(R_\beta G)^2 = R_\beta G \circ R_\beta G = \Phi_\beta \circ G^4 \circ \Phi_\beta^{-1}$$

et

$$R_\beta^2 G = R_\beta(R_\beta G) = \Phi_\beta \circ (R_\beta G)^2 \circ \Phi_\beta^{-1} = \Phi_\beta^2 \circ G^4 \circ \Phi_\beta^{-2}$$

Notons de plus que $\mathbb{R}^+$ est l'ensemble des réels positifs et $\mathbb{R}^{+*}$ l'ensemble des réels strictement positifs

COROLLAIRE 1 *$\forall \gamma, \delta \in \mathbb{R}^{+*}$, si G est renormalisable n fois par R_γ et si $H = S_\delta^{-1} \circ G \circ S_\delta$ alors*

$$\forall n \geqslant 1 \quad R_\gamma^n G = S_\delta \circ R_{\gamma/\delta}^n H \circ S_\delta^{-1}$$

Démonstration Par récurrence, la relation est vraie pour $n = 1$, nous la supposons vraie a l'ordre $n - 1$

$$\begin{aligned} R_\gamma^n G &= R_\gamma R_\gamma^{n-1} G = \Phi_\gamma \circ (R_\gamma^{n-1} G)^2 \circ \Phi_\gamma^{-1} \\ &= \Phi_\gamma \circ S_\delta \circ (R_{\gamma/\delta}^{n-1} H)^2 \circ S_\delta^{-1} \circ \Phi_\gamma^{-1} \\ &= S_\delta \circ \Phi_{\gamma/\delta} \circ (R_{\gamma/\delta}^{n-1} H)^2 \circ \Phi_{\gamma/\delta}^{-1} \circ S_\delta^{-1} = S_\delta \circ R_{\gamma/\delta}^n H \circ S_\delta^{-1} \end{aligned}$$

PROPOSITION 2 (i) *Soit h un homéomorphisme croissant de* $[0, 1]$
L'opérateur de $C^0([0, 1], [0, 1])$ muni de la norme uniforme, dans lui-même défini par

$$F \to h \circ F \circ h^{-1}$$

est un homéomorphisme

(ii) *En particulier l'opérateur*

$$F \to S_\beta \circ F \circ S_\beta^{-1}$$

est un homéomorphisme pour tout $\beta \in \mathbb{R}^{+*}$

(iii) *Soit $\alpha \in]0, 1]$. R_α est une application continue de $C^0([0, 1], [0, 1])$ muni de la norme uniforme*

Démonstration . (i) que l'opérateur soit bijectif résulte de l'existence de l'opérateur inverse $F \to h^{-1} \circ F \circ h$ La continuité est conséquence de la continuité de h et h^{-1} pour la norme uniforme,

(ii) direct à partir de (i),

(iii) identique à (i).

La troisième partie de (iii) est agréable puisqu'elle nous permet de nous placer dans le cadre classique de l'itération d'une application continue d'une partie d'un espace de Banach dans elle-même.

Nous introduisons maintenant des sous-ensembles de $C^0([0, 1], [0, 1])$. Pour ce faire nous rappelons la définition de développement asymptotique (voir par exemple Dieudonné [5])

DÉFINITION 2 : *Soient $F \in C^0([0, 1], [0, 1])$ et $\beta \in \mathbb{R}^{+*}$, F admet un développement asymptotique d'ordre $1 + \beta$ à l'origine s'il existe une application continue $\top$ de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$, nulle en 0, et deux réels a_1, a_2 différents de 0 tels que*

$$\forall x \in [0, 1] \quad F(x) = a_1 x + a_2 x^{1+\beta} + x^{1+\beta} \top (x)$$

Nous noterons $C^0_{1+\beta}([0, 1], [0, 1])$ l'ensemble des applications de $C^0([0, 1], [0, 1])$ admettant un développement asymptotique d'ordre $1 + \beta$ à l'origine

DÉFINITION 3 : *Soient $a, \beta \in \mathbb{R}^{+*}$. Nous appellerons $P_a^{1+\beta}$ l'ensemble suivant*

$$P_a^{1+\beta} = \{ F \in C^0_{1+\beta}([0, 1], [0, 1])/a_1 = 1 \quad a_2 = -a \} .$$

Nous appellerons $\mathcal{P}_a^{1+\beta}$ la partie de $P_a^{1+\beta}$ définie par

$$\mathcal{P}_a^{1+\beta} = \{ F \in P_a^{1+\beta}/\forall x \in [0, 1] \quad 0 \leqslant F(x) \leqslant x \} .$$

Nous poserons :

$$P^{1+\beta} = \bigcup_{a \in \mathbb{R}^{+*}} P_a^{1+\beta} \qquad \mathcal{P}^{1+\beta} = \bigcup_{a \in \mathbb{R}^{+*}} \mathcal{P}_a^{1+\beta}$$

Les éléments de $P_a^{1+\beta}$ sont donc les applications de $C^0([0, 1], [0, 1])$ admettant un développement asymptotique à l'origine de la forme suivante :

$$F(x) = x - ax^{1+\beta} + x^{1+\beta}\, T(x)$$

Nous montrons maintenant que $\mathcal{P}_a^{\bar\beta}$ est invariant par R_β et que $\mathcal{P}^{\bar\beta}$ est invariant par R_γ pour tout $\gamma \in \mathbb{R}^{+*}$, où $\bar\beta = 1 + \dfrac{1}{\beta}$.

PROPOSITION 3 : *Soient $a, \beta, \gamma \in \mathbb{R}^{+*}$.*

(i) *R_β est une application de $\mathcal{P}_a^{\bar\beta}$ dans lui-même admettant*

$$f_{a,\beta}(x) = \frac{x}{\left(1 + \dfrac{a}{\beta} x^{1/\beta}\right)^{\beta}} \quad \textit{comme point fixe dans } \mathcal{P}_a^{\bar\beta}$$

(ii) R_γ *est une application de* $\mathcal{P}^{\bar\beta}$ *dans lui-même Plus précisément* R_γ *est une application de* $\mathcal{P}_a^{\bar\beta}$ *dans* $\mathcal{P}_{a'}^{\bar\beta}$, *où* $a' = 2^{1-\frac{\gamma}{\beta}} a$.

Démonstration . Soit $F \in \mathcal{P}_a^{\bar\beta}$

$$\forall x \in [0,1] \quad F(x) = x - ax^{\bar\beta} + x^{\bar\beta}\, T(x) \quad \text{avec} \quad T(0) = 0\,.$$

Comme, pour tout x, $0 \leqslant F(x) \leqslant x$ nous savons que $0 \leqslant F^2(x) \leqslant x$ et donc $0 \leqslant R_\beta F(x) \leqslant x$. De plus

$$\begin{aligned} F^2(x) &= x - ax^{\bar\beta} + x^{\bar\beta}\, T(x) - a(x - ax^{\bar\beta} + x^{\bar\beta}\, T(x))^{\bar\beta} + \\ &\qquad + (x - ax^{\bar\beta} + x^{\bar\beta}\, T(x))^{\bar\beta}\, T(x - ax^{\bar\beta} + x^{\bar\beta}\, T(x)) \\ &= x - 2\,ax^{\bar\beta} + x^{\bar\beta}\, T_1(x) \quad \text{avec} \quad T_1(0) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(i)}\ R_\beta F(x) &= 2^\beta F^2\left(\frac{x}{2^\beta}\right) = 2^\beta\left[\frac{x}{2^\beta} - 2\,a\left(\frac{x}{2^\beta}\right)^{\bar\beta} + \left(\frac{x}{2^\beta}\right)^{\bar\beta} T_1\left(\frac{x}{2^\beta}\right)\right] \\ &= x - 2^{\beta+1}\, a\,\frac{x^{\bar\beta}}{2^{\beta+1}} + \frac{x^{\bar\beta}}{2}\, T_1\left(\frac{x}{2^\beta}\right) \\ &= x - ax^{\bar\beta} + x^{\bar\beta}\, T_2(x) \quad \text{avec} \quad T_2(0) = 0 \end{aligned}$$

et donc $R_\beta F \in \mathcal{P}_a^{\bar\beta}$. La deuxième partie de (i) est conséquence du théorème 1.

$$\begin{aligned} \text{(ii)}\ R_\gamma F(x) &= 2^\gamma F^2\left(\frac{x}{2^\gamma}\right) = 2^\gamma\left[\frac{x}{2^\gamma} - 2\,a\left(\frac{x}{2^\gamma}\right)^{\bar\beta} + \left(\frac{x}{2^\gamma}\right)^{\bar\beta} T_1\left(\frac{x}{2^\gamma}\right)\right] \\ &= x - 2^{\bar\beta}\, ax + x^{\bar\beta}\, T_3(x) \quad \text{avec} \quad T_3(0) = 0 \end{aligned}$$

et donc $R_\gamma F \in \mathcal{P}_{a'}^{\bar\beta} \subset \mathcal{P}^{\bar\beta}$ avec $a' = 2^{1-\frac{\gamma}{\beta}}\, a$.

II. COMPORTEMENT D'ITÉRATIONS DE R_γ DANS $\mathcal{P}_a^2$

Dans cette partie nous nous proposons d'étudier le comportement de R_γ dans $\mathcal{P}_a^2$, c'est-à-dire avec $\beta = 1$. Nous montrons que si F est un élément de $\mathcal{P}_a^2$ alors :

si $0 < \gamma < 1$ $\quad R_\gamma^n F$ converge uniformément vers la fonction nulle
si $\gamma = 1$ $\quad R_1^n F$ converge uniformément vers $f_{a,1}$
si $\gamma > 1$ $\quad R_\gamma^n F$ converge uniformément vers l'identité.

Pour simplifier les notations nous poserons .

$$R = R_1\,, \quad \mathcal{P}_a = \mathcal{P}_a^2\,, \quad f_a = f_{a,1}\,.$$

LEMME 2 : *Pour tout F de $\mathscr{P}_a$, il existe t de $C^0([0, 1])$ tel que*

$$\forall x \in [0, 1] \quad F(x) = f_a(x).(1 + xt(x)).$$

Démonstration : Il existe $T \in C^0([0, 1])$ tel que

$$F(x) = x - ax^2 + x^2\,T(x) \quad \text{(définitions 2 et 3)}$$

si $x \neq 0$

$$1 + xt(x) = \frac{(x - ax^2 + x^2\,T(x)).(1 + ax)}{x} = 1 + x[T(x)(1 + ax) - a^2\,x]$$

$$\Rightarrow \quad t(x) = (1 + ax)\,T(x) - a^2\,x$$

t est donc bien définie et continue sur $]0, 1]$. Nous prolongeons t par continuité en posant $t(0) = 0$.

Considérons F un élément de $\mathscr{P}_a$ pour a fixé de $\mathbb{R}^{+*}$. Du lemme précédent nous déduisons que $\forall x \in [0, 1]$ $F(x) = f_a(x).(1 + xt(x))$ où t appartient à $C^0([0, 1])$. La proposition suivante montre qu'il en est de même pour RF et que RF est plus proche de f_a que F au sens de la norme uniforme.

PROPOSITION 4 : *Si $F \in \mathscr{P}_a$ pour $a \in \mathbb{R}^{+*}$ alors*

(i) *$RF \in \mathscr{P}_a$ et donc $\exists \theta \in C^0[0, 1]$ tel que*

$$\forall x \in [0, 1] \quad RF(x) = f_a(x).(1 + x\theta(x))$$

(ii) $\sup_{x \in [0,1]} |\theta(x)| \leqslant \sup_{x \in [0,1/2]} |t(x)|$.

Démonstration : (i) est une conséquence immédiate du lemme 2 et de la proposition 3 ;

(ii) nous allons tout d'abord expliciter θ :

$$\begin{aligned} F^2(x) &= f_a[F(x)]\,(1 + [F(x)]\,t[F(x)]) \\ &= \frac{x[1 + xt(x)]}{1 + 2\,ax + ax^2\,t(x)}(1 + [F(x)]\,t[F(x)]) \\ &= \frac{x}{1 + 2\,ax}\left[1 + \frac{xt(x) + ax^2\,t(x)}{1 + 2\,ax + ax^2\,t(x)}\right][1 + (F(x))\,t(F(x))] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2\,F^2\left(\frac{x}{2}\right) &= \frac{x}{1 + ax}\left[1 + \frac{x}{2}\,\frac{t\left(\frac{x}{2}\right) + a\,\frac{x}{2}\,t\left(\frac{x}{2}\right)}{1 + ax + a\,\frac{x^2}{4}\,t\left(\frac{x}{2}\right)}\right]\left[1 + \left(F\left(\frac{x}{2}\right)\right)t\left(F\left(\frac{x}{2}\right)\right)\right] \\ &= f_a(x)\,[1 + x\theta(x)] \end{aligned}$$

avec

$$\theta(x) = \frac{1}{2}\left[\frac{\left(1 + a\frac{x}{2}\right)\left(1 + \left[F\left(\frac{x}{2}\right)\right] t\left(F\left(\frac{x}{2}\right)\right)\right)}{1 + ax + a\frac{x^2}{4} t\left(\frac{x}{2}\right)} \times \right.$$

$$\left. \times\, t\left(\frac{x}{2}\right) + \left(\frac{1 + \frac{x}{2} t\left(\frac{x}{2}\right)}{1 + a\frac{x}{2}}\right) \cdot t\left(F\left(\frac{x}{2}\right)\right)\right]$$

pour obtenir une bonne majoration de $\theta(x)$ nous allons utiliser la condition

$$(*) \quad \forall x \in [0, 1] \quad 0 \leqslant F(x) \leqslant x$$

posons

$$\theta_1(x) = \frac{\left(1 + a\frac{x}{2}\right)\left(1 + \left[F\left(\frac{x}{2}\right)\right] t\left(F\left(\frac{x}{2}\right)\right)\right)}{1 + ax + a\frac{x^2}{4} t\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{1 + \left[F\left(\frac{x}{2}\right)\right] t\left(F\left(\frac{x}{2}\right)\right)}{1 + aF\left(\frac{x}{2}\right)}$$

appliquons $(*)$ en $F(x/2)$

$$0 \leqslant F\left(F\left(\frac{x}{2}\right)\right) \leqslant F\left(\frac{x}{2}\right)$$

ceci implique que

$$0 \leqslant \frac{F\left(\frac{x}{2}\right)\left[1 + \left[F\left(\frac{x}{2}\right)\right] t\left(F\left(\frac{x}{2}\right)\right)\right]}{1 + aF\left(\frac{x}{2}\right)} \leqslant F\left(\frac{x}{2}\right)$$

et donc apres division par $F(x/2)$

$$0 \leqslant \theta_1(x) \leqslant 1 \tag{1}$$

(si $F(x/2) = 0$ nous savons que $\theta_1(x) = 0$)

Réappliquons $(*)$ en $x/2$: $0 \leqslant F(x/2) \leqslant x/2$ et donc

$$0 \leqslant \frac{\frac{x}{2}\left(1+\frac{x}{2}t\left(\frac{x}{2}\right)\right)}{1+a\frac{x}{2}} \leqslant \frac{x}{2} \Rightarrow 0 \leqslant \frac{1+\frac{x}{2}t\left(\frac{x}{2}\right)}{1+a\frac{x}{2}} \leqslant 1$$

$$\Rightarrow 0 \leqslant \theta_2(x) \leqslant 1 \tag{2}$$

(si $x/2 = 0$ nous savons que $\theta_2(x) = 0$).

Revenons maintenant à l'expression de $\theta(x)$:

$$|\theta(x)| \leqslant \frac{1}{2}\left[|\theta_1(x)| \cdot \left|t\left(\frac{x}{2}\right)\right| + |\theta_2(x)| \cdot \left|t\left(F\left(\frac{x}{2}\right)\right)\right|\right]$$

appliquons (1) et (2)

$$|\theta(x)| \leqslant \frac{1}{2}\left[\left|t\left(\frac{x}{2}\right)\right| + \left|t\left(F\left(\frac{x}{2}\right)\right)\right|\right]$$

nous en déduisons tout d'abord que $\theta(0) = 0$, de plus d'après $(*)$

$$\operatorname*{Sup}_{x \in [0,1]} \left|t\left(\frac{x}{2}\right)\right| \geqslant \operatorname*{Sup}_{x \in [0,1]} \left|t\left(F\left(\frac{x}{2}\right)\right)\right|$$

et donc

$$|\theta(x)| \leqslant \operatorname*{Sup}_{x \in [0,1]} \left|t\left(\frac{x}{2}\right)\right| = \operatorname*{Sup}_{x \in [0,1/2]} |t(x)|$$

de ceci nous déduisons :

$$\operatorname*{Sup}_{x \in [0,1]} |\theta(x)| \leqslant \operatorname*{Sup}_{x \in [0,1/2]} |t(x)|.$$

Nous pouvons maintenant énoncer un des résultats principaux de cette partie.

THÉORÈME 2 : *Si F est un élément de $\mathscr{P}_a$, pour $a \in \mathbb{R}^{+*}$, alors la suite $R^n F$ converge uniformément, lorsque n tend vers $+\infty$, vers la fonction*

$$f_a(x) = \frac{x}{1+ax}.$$

Démonstration : Du lemme 2 nous savons que

$$\exists t \in C^0[0,1] \quad \text{tel que} \quad \forall x \in [0,1] \;\; F(x) = f_a(x).(1 + xt(x))$$

posons $G_n = R^n F$; des propositions 3 et 4 et du lemme 2 nous déduisons

$$\exists \theta_n \in C^0[0, 1] \quad \text{tel que} \quad \forall x \in [0, 1] \;\; G_n(x) = f_a(x).(1 + x\theta_n(x)),$$

et

$$\operatorname*{Sup}_{x \in [0,1]} |\theta_n(x)| \leqslant \operatorname*{Sup}_{x \in [0,1/2]} |\theta_{n-1}(x)|$$

de la relation précédente nous déduisons :

$$\operatorname*{Sup}_{x \in [0,1]} |\theta_n(x)| \leqslant \operatorname*{Sup}_{x \in [0,1/2^n]} |t(x)|$$

t est continue et $t(0) = 0$; donc $\operatorname*{Sup}_{x \in [0,1/2^n]} |t(x)|$ tend vers 0. Nous en déduisons la convergence uniforme de θ_n vers 0 et aussi celle de G_n vers f_a.

Tournons-nous maintenant vers l'étude du comportement d'itération de R_γ pour $\gamma \in \mathbb{R}^{+*}$. Nous poserons $\alpha = (1/2)^\gamma$.

PROPOSITION 5 : *Soit F un élément de $\mathscr{P}^2$. F s'écrit*

$$\forall x \in [0, 1] \quad F(x) = f_a(x).(1 + xt(x)) \quad \textit{où} \quad t \in C^0[0, 1]$$

alors

(i) $\quad R_\gamma F \in \mathscr{P}^2 \quad$ *et* $\quad R_\gamma F(x) = f_{2\alpha a}(x)\,(1 + x\theta(x))$

(ii) $\quad \operatorname*{Sup}_{x \in [0,1]} |\theta(x)| \leqslant 2\alpha \operatorname*{Sup}_{x \in [0,\alpha]} |t(x)|.$

Démonstration : (i) Conséquence de la proposition 3 avec $\beta = 1$;
(ii) Démonstration identique à celle de la proposition 4.

Nous en déduisons le

THÉORÈME 3 : *Si F est un élément de $\mathscr{P}^2$ alors :*

(i) *Si $\alpha < 1/2$ (c'est-à-dire si $\gamma > 1$), $R_\gamma^n F$ converge uniformément vers l'identité ;*

(ii) *Si $1/2 < \alpha < 1$ (c'est-à-dire si $0 < \gamma < 1$), alors $R_\gamma^n F$ converge uniformément vers la fonction nulle.*

Démonstration : (i) Posons $G_n = R_\gamma^n F$. De la proposition 5 nous déduisons

$$\exists \theta_n \in C^0[0, 1] \quad \text{tel que} \quad \forall x \in [0, 1] \quad G_n(x) = f_{a_n}(1 + x\theta_n(x))$$

$$a_n = 2\,a_{n-1} \quad \text{avec} \quad a_0 = a$$

$$\operatorname*{Sup}_{x \in [0,1]} |\theta_n(x)| \leqslant 2\alpha \operatorname*{Sup}_{x \in [0,\alpha]} |\theta_{n-1}(x)|$$

si $\alpha < 1/2$, a_n tend vers 0 et θ_n converge uniformément vers la fonction nulle. Nous en déduisons la convergence de $G_n = R_\gamma^n F$ vers l'identité.

(ii) Supposons que $\exists a \neq 0$ tel que $\forall x \in [0, 1]$ $F(x) = f_a(x)(1 + xt(x))$ Posons $G_n = R_\gamma^n F$ Reprenons les relations obtenues en (i) Nous en tirons

$$a_n = (2\alpha)^n a \sup_{x \in [0,1]} |\theta_n(x)| \leqslant (2\alpha)^n \sup_{x \in [0,\alpha^n]} |t(x)|$$

nous montrons l'inégalité suivante

$$G_n(x) \leqslant \frac{x}{1 + (2\alpha)^n ax}\left(1 + x(2\alpha)^n \sup_{x \in [0\ \alpha^n]} |t(x)|\right)$$

$$\leqslant \frac{1}{1 + (2\alpha)^n a}\left(1 + (2\alpha)^n \sup_{x \in [0,\alpha^n]} |t(x)|\right)$$

et donc

$$\sup_{x \in [0,1]} |G_n(x)| \leqslant \frac{(1/2\alpha)^n + \sup_{x \in [0\ \alpha^n]} |t(x)|}{(1/2)^n + a}$$

nous en déduisons la convergence uniforme des G_n vers la fonction nulle

Les théorèmes 2 et 3 peuvent être interprétés en termes de bifurcation Pour cela ajoutons à $\mathscr{P}_a^2$ la fonction nulle et l'identite et munissons-le de la distance uniforme Considérons alors la famille d'opérateurs R_α, appliquant ce nouvel ensemble dans lui-même Pour $\alpha < 1/2$, R_α admet un point fixe globalement attractif, l'identité, et un point fixe répulsif, la fonction nulle $\alpha = 1/2$ est une valeur de bifurcation pour laquelle l'identite perd son attractivité et apparaît une infinité de points fixes attractifs, les fonctions f_a Pour $\alpha > 1/2$ les points fixes précédents disparaissent et c'est la fonction nulle qui devient globalement attractive, l'identité restant répulsive Notons que les démonstrations nous fournissent des majorations de l'erreur entre $R_\alpha^n F$ et sa limite Par exemple pour $\alpha = 1/2$ un calcul simple nous permet d'obtenir

$$\sup_{x \in [0\ 1]} |R_{1/2}^n F(x) - f_a(x)| \leqslant \frac{1}{1 + a} \cdot \sup_{x \in [0\ 1/2^n]} |t(x)|$$

III. COMPORTEMENT D'ITERATIONS DE R_γ DANS $\mathscr{P}^{1+\frac{1}{\beta}}$. GENERALISATIONS

Dans cette partie nous allons étendre les résultats obtenus dans la partie précédente au cas où $\beta \neq 1$

LEMME 3 *Soient $a, \beta \in \mathbb{R}^{+*}$ Si $F \in \mathscr{P}_a^{1+\frac{1}{\beta}}$ alors il existe $t \in C^0[0, 1]$ tel que*

$$\forall x \in [0, 1] \quad F(x) = f_{a,\beta}(x) \cdot (1 + x^{1/\beta}\, t(x^{1/\beta}))^\beta$$

Démonstration : F s'écrit

$$\forall x \in [0, 1] \quad F(x) = x - ax^{1+\frac{1}{\beta}} + x^{1+\frac{1}{\beta}} T(x) \quad \text{avec} \quad T(0) = 0$$

supposons $x \neq 0$. Calculons t pour que

$$x - ax^{1+\frac{1}{\beta}} + x^{1+\frac{1}{\beta}} T(x) = \left(\frac{x}{1 + \frac{a}{\beta} x^{1/\beta}}\right) \beta(1 + x^{1/\beta} t(x^{1/\beta}))^{\beta}$$

nous obtenons :

$$(1 + x^{1/\beta} t(x^{1/\beta})) = (1 - ax^{1/\beta} + x^{1/\beta} T(x))\left(1 + \frac{a}{\beta} x^{1/\beta}\right)^{\beta}$$

posons $x^{1/\beta} = y$ et définissons τ de $C^0[0, 1]$ par

$$\tau(y) = T(x)$$

nous avons

$$(1 + yt(y))^{\beta} = (1 - ay + y\tau(y))\left(1 + \frac{a}{\beta} y\right)^{\beta}$$

comme

$$\left(1 + \frac{a}{\beta} y\right)^{\beta} = 1 + ay + yT_1(y) \quad \text{avec} \quad T_1(0) = 0$$

$$\begin{aligned} (1 + yt(y))^{\beta} &= (1 - ay + y\tau(y))(1 + ay + yT_1(y)) \\ &= 1 + yT_2(y) \quad \text{avec} \quad T_2(0) = 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow (1 + yt(y)) = (1 + yT_2(y))^{1/\beta} = 1 + yT_3(y) \quad \text{avec} \quad T_3(0) = 0$$

il suffit donc de prendre $t(y) = T_3(y)$ si $y \neq 0$. Par continuité nous définirons $t(0) = 0$.

PROPOSITION 6 : *Soient a, β, $\gamma \in \mathbb{R}^{+*}$. Quel que soit $F \in \mathscr{P}_a^{1+\frac{1}{\beta}}$ il existe G appartenant à $\mathscr{P}^2_{a/\beta}$ tel que*

(i) $F = S_\beta \circ G \circ S_\beta^{-1}$ *et* $G = S_\beta^{-1} \circ F \circ S_\beta$;

(ii) $\forall n \quad R_\gamma^n F = S_\beta \circ R_{\gamma/\beta}^n G \circ S_\beta^{-1}$.

Démonstration : Du lemme 3 nous savons que F s'écrit

$$\forall x \in [0, 1] \quad F(x) = f_{a,\beta}(x).(1 + x^{1/\beta} t(x^{1/\beta}))^{\beta}$$

or

$$f_{a,\beta} = S_\beta \circ f_{a/\beta,1} \circ S_\beta^{-1} \quad \text{et} \quad (1 + x^{1/\beta} t(x^{1/\beta}))^{\beta} = S_\beta \circ H \circ S_\beta^{-1}(x)$$

où $H(x) = 1 + xt(x)$. Nous avons donc

$$\begin{aligned} F(x) &= S_\beta \circ f_{a/\beta} \circ S_\beta^{-1}(x) . S_\beta \circ H \circ S_\beta^{-1}(x) \\ &= \frac{(x^{1/\beta})^\beta}{\left(1 + \frac{a}{\beta} x^{1/\beta}\right)^\beta} \cdot (1 + x^{1/\beta}\, t(x^{1/\beta}))^\beta \\ &= \left[\frac{x^{1/\beta} . (1 + x^{1/\beta}\, t(x^{1/\beta}))}{1 + \frac{a}{\beta} x^{1/\beta}}\right]^\beta \\ &= \left[\frac{y . (1 + yt(y))}{1 + \frac{a}{\beta} y}\right]^\beta \quad \text{où} \quad y = x^{1/\beta} \\ &= S_\beta \circ [f_{a/\beta,1} . H] \circ S_\beta^{-1}(x) \end{aligned}$$

posons $G = f_{a/\beta,1} . H$ Il est évident que G appartient à $\mathscr{P}^2_{a/\beta}$ ce qui démontre (i)

La relation (ii) découle de ce qui précède et du corollaire 1

La proposition 6 montre que R est compatible avec la relation de conjugaison La continuité de l'opérateur de conjugaison, pour la distance uniforme (proposition 2), implique donc que le comportement de $R_\gamma^n F$ et celui de $R^n_{\gamma/\beta} G$ sont identiques, d'où le

THEORÈME 4 *Soient* a, β, $\gamma \in \mathbb{R}^{+*}$ *Si* $F \in \mathscr{P}_a^{1+\frac{1}{\beta}}$ *alors*

(i) *si* $\gamma < \beta$ $R_\gamma^n F$ *converge uniformément vers la fonction nulle*,

(ii) *si* $\gamma = \beta$ $R_\beta^n F$ *converge uniformément vers* $f_{a,\beta}$,

(iii) *si* $\gamma > \beta$ $R_\gamma^n F$ *converge uniformément vers l'identité*

Démonstration : A F nous associons $G \in \mathscr{P}^2_{a/\beta}$ défini dans la proposition 6.

(i) Si $\gamma < \beta$ $R^n_{\gamma/\beta} G$ converge vers la fonction nulle (théorème 3). L'opérateur $H \to S_\beta \circ H \circ S_\beta^{-1}$ étant continu (proposition 2), nous en déduisons la convergence de $R_\gamma^n F$ vers la fonction nulle

(ii) Si $\gamma = \beta$ $R_1^n G$ converge vers $f_{a/\beta,1}$ (théorème 2) et donc $R_\beta^n F$ converge vers $S_\beta \circ f_{a/\beta,1} \circ S_\beta^{-1} = f_{a,\beta}$ (proposition 1)

(iii) Si $\gamma > \beta$ $R^n_{\gamma/\beta} G$ converge vers l'identité Il en est de même pour $R_\gamma^n F$.

Le théorème 4 s'interprète, de la même façon que le théorème 3, en termes de bifurcation Il s'agit simplement de remplacer la valeur de bifurcation (1/2) par $(1/2)^\beta$

Nous allons maintenant étendre les résultats précédents au cas de fonctions n'appliquant pas nécessairement $[0, x]$ dans lui-même.

PROPOSITION 7 : *Soient* $a, \beta, \gamma \in \mathbb{R}^{+*}$ *et* $F \in P_a^{1+\frac{1}{\beta}}$. *Il existe :*

(i) $\eta > 0$, $\forall x \in [0, \eta]$, $F(x) \leqslant x$;

(ii) $p \in \mathbb{N}$, $R_\gamma^p F \in \mathscr{P}^{1+\frac{1}{\beta}}$.

Démonstration : (i) En effectuant une démonstration identique à celle du lemme 3, on obtient :

$$F(x) = x \cdot \frac{(1 + x^{1/\beta}\, t(x^{1/\beta}))^\beta}{\left(1 + \frac{a}{\beta} x^{1/\beta}\right)^\beta}$$

la continuité de t en 0 implique :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta \ x^{1/\beta} \leqslant \delta \Rightarrow |\, t(x^{1/\beta}) \,| \leqslant \varepsilon$$

prenons $\varepsilon \leqslant a/\beta$.

$$\exists \delta \ \forall x \leqslant \delta^\beta \quad F(x) \leqslant x \left(\frac{1 + \frac{a}{\beta} x^{1/\beta}}{1 + \frac{a}{\beta} x^{1/\beta}} \right)^\beta \leqslant x$$

ce qui démontre la proposition avec $\eta = \delta^\beta$.

(ii) De ce qui précède nous déduisons

$$\exists \eta > 0 \quad \text{tel que} \quad \forall x \in [0, \eta] \ F(x) \leqslant x$$

donc si

$$0 \leqslant \frac{x}{2^\gamma} \leqslant \eta \quad F\left(\frac{x}{2^\gamma}\right) \leqslant \frac{x}{2^\gamma}$$

ceci implique que

$$F^2\left(\frac{x}{2^\gamma}\right) \leqslant F\left(\frac{x}{2^\gamma}\right) \leqslant \frac{x}{2^\gamma} \quad \text{et} \quad 2^\gamma F^2\left(\frac{x}{2^\gamma}\right) \leqslant x$$

par conséquent

$$\text{si} \quad 0 \leqslant x \leqslant 2^\gamma \eta \quad F_1(x) = R_\gamma F(x) \leqslant x$$

si nous réappliquons le raisonnement :

$$\text{si} \quad 0 \leqslant x \leqslant 2^{n\gamma} \eta \ ; \quad F_n(x) = R_\gamma F_{n-1}(x) = R_\gamma^n F(x) \leqslant x$$

soit p le plus petit entier tel que $2^{p\gamma} \eta \geqslant 1$, nous déduisons que

$$\forall x \in [0, 1] \quad R_\gamma^p F(x) \leqslant x$$

THEOREME 5 *Soient $a, \beta, \gamma \in \mathbb{R}^{+*}$ Si $F \in P_a^{1+\frac{1}{\beta}}$ alors*

(i) *il existe un entier $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $\forall n \geqslant p$ la suite $R_\gamma^n F$ est bien définie,*
(ii) *si $\gamma < \beta$ $R_\gamma^n F$ converge uniformement vers la fonction nulle,*
(iii) *si $\gamma = \beta$ $R_\beta^n F$ converge uniformément vers $f_{a\,\beta}$,*
(iv) *si $\gamma > \beta$ $R_\gamma^n F$ converge uniformément vers l'identité*

Démonstration Conséquence directe de la proposition 11 et du théorème 4

L'ensemble des résultats démontrés dans les pages précedentes peut être étendu à un opérateur de renormalisation plus général

$$R_\beta F(x) = i^\beta F^i\left(\frac{x}{i^\beta}\right)$$

où i est un entier supérieur à 1 fixé

En particulier nous avons le

THEOREME 6 *Soient $a, \beta, \gamma \in \mathbb{R}^{+*}$ Si $F \in P_a^{1+\frac{1}{\beta}}$ alors*

(i) *il existe un entier $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $\forall n \geqslant p$ la suite $R_\gamma^n F$ est bien définie,*
(ii) *si $\gamma < \beta$ $R_\gamma^n F$ converge uniformement vers la fonction nulle,*
(iii) *si $\gamma = \beta$ $R_\beta^n F$ converge uniformément vers $f_{a,\beta}$,*
(iv) *si $\gamma > \beta$ $R_\gamma^n F$ converge uniformement vers l'identité*

$$\textit{pour tout entier } i \geqslant 1 \quad \textit{avec} \quad R_\gamma^n F(x) = i^\gamma F^i\left(\frac{x}{i^\gamma}\right)$$

IV. RESULTATS NUMERIQUES

On peut vérifier numériquement les différents comportements itératifs de l'opérateur de renormalisation Cependant lorsque le paramètre de renormalisation est egal à la valeur critique, on observe un phénomène intéressant pour les applications admettant un développement en série la suite des séries tronquées a un ordre donné converge vers la série tronquée du point fixe non trivial

L'exemple type pour étudier $R_\gamma^n F$ lorsque F appartient à $\mathscr{P}_a^{1+\frac{1}{\beta}}$ consiste à prendre $F(x) = x - ax^{1+\frac{1}{\beta}}$ Nous présentons donc, à titre d'illustration, les résultats obtenus pour la renormalisation d'un de ces exemples

Considérons $\beta = 1$, $a = 3$ et $\alpha = 0{,}5 = \left(\frac{1}{2}\right)^{\beta}$. $F(x) = x - 3x^2$ et nous savons que $R_\beta^n F$ converge uniformément vers $f_{3\,1}(x) = \frac{x}{1+3x}$ Il est bien évident que les applications renormalisées sont des polynômes de degré de plus en plus élevé, nous les avons tronqués à l'ordre 10 On vérifie que les coefficients de ces polynômes convergent vers les coefficients de la série tronquée à l'ordre 10 de $\frac{x}{1+3x}$

Les coefficients des termes de degré 1 et 2 restent inchangés au cours de l'itération Voici l'évolution des coefficients des termes de degré 3, 6 et 10 Sur la dernière ligne nous proposons les résultats théoriques (coefficients de $\frac{x}{1+3x}$)

n	a_3	a_6	a_{10}
1	4,5	0	0
2	6,75	− 28,001 95	− 22,375
3	7,875	− 97,799 2	− 1 652,954
4	8,437 5	− 158,730 9	− 6 426,959
6	8,859 37	− 219,503 3	− 15 141,05
9	8,982 42	− 239,968 3	− 19 058,76
∞	9	− 243	− 19 683

Après 10 renormalisations, le polynôme tronque à l'ordre 10 est

$$R_\beta^{10} F = x - 3x^2 + 8{,}991\,x^3 - 26{,}93\,x^4 + 80{,}66\,x^5 - 241{,}48\,x^6 + 722{,}83\,x^7 - 2\,163{,}3\,x^8 + 6\,473{,}4\,x^9 - 19\,368{,}7\,x^{10},$$

à comparer avec la limite theorique

$$\frac{x}{1+3x} = x - 3x^2 + 9x^3 - 27x^4 + 81x^5 - 243x^6 + 729x^7 - 2\,187\,x^8 + 6\,561\,x^9 - 19\,683\,x^{10} +$$

La convergence des tronquées d'ordre 10 de $R_\beta^n F$ vers la tronquée de $\frac{x}{1+3x}$ est lente (linéaire) et régulière

Cette propriété nous a permis de nous rendre compte, au début de ce travail, de l'existence des points fixes non triviaux pour l'operateur de renormalisation