RAIRO. ANALYSE NUMÉRIQUE

M. ATTEIA
C. FAGE
J. GACHES

Étude et convergence de fonctions « spline » complexes

RAIRO. Analyse numérique, tome 18, nº 3 (1984), p. 219-236
<http://www.numdam.org/item?id=M2AN_1984__18_3_219_0>

R.A.I.R.O. Analyse numérique/Numerical Analysis
(vol. 18, n° 3, 1984, p. 219 à 236)

ÉTUDE ET CONVERGENCE DE FONCTIONS « SPLINE » COMPLEXES (*)

par M. ATTEIA, C. FAGE, J. GACHES (¹)

Résumé. — *On établit dans cet article l'existence et l'unicité de fonctions « spline » complexes d'interpolation d'ordre m sur un ouvert Ω borné simplement connexe de $\mathbb{C}$. On caractérise ces fonctions à l'aide des noyaux d'Aronszajn-Bergman et on étudie leurs propriétés de convergence vers certaines fonctions holomorphes sur Ω.*

Enfin, on explicite une application de ces resultats aux fonctions harmoniques reelles sur Ω.

Abstract. — *We prove the existence and the uniqueness of a complex interpolating spline function of order m, on a simply connected, bounded open subset Ω in $\mathbb{C}$. Using the Aronszajn-Bergman kernels, we characterize these functions and study their convergence properties to some analytic functions on Ω.*

Finally, we give an application of these results to the harmonic real functions on Ω.

0. INTRODUCTION

Les fonctions « spline » réelles dont la théorie s'est très rapidement développée au cours de la dernière décennie, possèdent des propriétés de lissage remarquables mais leurs dérivées, à partir d'un certain rang, présentent des singularités.

Les fonctions « spline » d'interpolation sur un ouvert Ω borné, simplement connexe de $\mathbb{C}$ introduites par M. Atteia [1] ne présentent pas cet inconvénient. Leurs parties réelles, en particulier, sont des fonctions « spline » d'interpolation analytiques sur l'ouvert Ω considéré.

(*) Reçu en novembre 1982.

(¹) Laboratoire d'Analyse Numérique, Université Paul-Sabatier, 118, route de Narbonne, 31062 Toulouse Cedex.

Cet article a pour but de présenter les premières propriétés des fonctions « spline » complexes d'ordre m dont une étude plus complète sur certains points a été faite par C. Simpson-Fage [3] dans sa thèse.

Au paragraphe 1, l'existence et l'unicité de telles fonctions s'inscrit dans le cadre théorique classique.

Le paragraphe 2 met en évidence des propriétés de minimisation de la partie réelle harmonique de la fonction « spline », qui peuvent être exploitées pour des problèmes à données réelles.

Le paragraphe suivant étudie des sous-espaces hilbertiens de $\mathbb{C}^\Omega$ et leurs bases ; on donne une relation importante liant leurs noyaux reproduisants — d'Aronszajn-Bergman — à celui de $\mathscr{L}^2(\Omega)$.

L'expression de la fonction « spline » est obtenue à partir de cette étude, dans le paragraphe 4. Comme dans le cas réel, l'explicitation du noyau fournit celle de la « spline » ; on l'obtient ici, lorsque Ω est un disque, centré à l'origine pour une spline d'ordre 0 ou 1 (soit à partir de la relation entre les noyaux, soit à partir des bases de sous-espaces hilbertiens). Pour un ordre supérieur ou égal à 2, seule la décomposition en série est utilisable.

Enfin, le paragraphe 5 donne la convergence de la suite des fonctions « spline » d'ordre m, interpolant une fonction analytique donnée sur un ensemble de points, distribués sur une courbe Γ contenue dans Ω.

Soient Ω un ouvert borné de $\mathbb{C}$, simplement connexe, m et n deux entiers naturels ($n > m$), $\{ z_k = x_k + iy_k \}_{k=1,\dots,n}$, $(i^2 = -1)$ un ensemble de n points *distincts* de Ω, $\{ \alpha_k \}_{k=1,\dots,n}$ un ensemble de n nombres complexes.

Notons $\mathscr{A}_m(\Omega)$, l'ensemble des fonctions analytiques sur Ω telles que :

$$\int_\Omega \sum_{p=0}^{m} |f^{(p)}(z)|^2 \, d\omega_z < +\infty \quad (\text{où } z = x + iy, \, d\omega_z = dx\,dy) .$$

et $\mathscr{A}_0(\Omega) = \mathscr{L}^2(\Omega)$.

On désignera dans la suite par $\mathscr{X}$ l'espace $\mathbb{C}^\Omega$ muni de la topologie de la convergence simple, par $\mathscr{X}'$ son dual topologique et par $\langle \cdot, \cdot \rangle$ la dualité entre $\mathscr{X}$ et $\mathscr{X}'$.

On notera aussi $\mathscr{P}_k(\Omega)$ l'ensemble des polynômes complexes définis sur Ω qui sont de degré inférieur ou égal à k et par N_m, l'espace $\mathscr{P}_{m-1}(\Omega)$ muni de la topologie induite par celle de $\mathscr{X}$.

φ_m désignera l'homomorphisme canonique de $\mathscr{X}$ sur $\tilde{\mathscr{X}} = \mathscr{X}/N_m$.

On posera : $\tilde{\mathscr{A}}_m(\Omega) = \varphi_m(\mathscr{A}_m(\Omega))$ et $\tilde{f} = \varphi_m(f)$ pour $f \in \mathscr{A}_m(\Omega)$.

On notera : $\mathscr{C}_m = \{ f \in \mathscr{A}_m(\Omega) ; \, f(z_k) = \alpha_k, \, k = 1, \dots, n \}$; $\mathscr{C}_m$ est un hyperplan fermé de $\mathscr{X}$.

1. EXISTENCE ET UNICITÉ DE LA FONCTION « SPLINE » COMPLEXE D'INTERPOLATION D'ORDRE m SUR Ω

On énoncera tout d'abord deux lemmes classiques :

LEMME 1.1 : *Quelle que soit $f \in \mathscr{L}^2(\Omega)$, quel que soit $p \in \mathbb{N}$,*

$$\forall z \in \Omega, \quad |f^{(p)}(z)| \leqslant \frac{p\,!\sqrt{p+1}}{\sqrt{\pi}(R(z))^{p+1}}\left(\int_{\Omega} |f(z)|^2 \, d\omega_z\right)^{1/2}$$

où $R(z)$ est la borne supérieure des rayons des cercles de centre z contenus dans Ω.

LEMME 1.2 : *Quel que soit le compact K contenu dans Ω et quelle que soit $f \in \mathscr{L}^2(\Omega)$,*

$$\mathrm{Sup}\,\{\, |f(z)| \,;\, z \in K \,\} \leqslant A_K\left(\int_{\Omega} |f(z)|^2 \, d\omega_z\right)^{1/2}$$

où A_K est un nombre réel indépendant de $z \in K$ et de $f \in \mathscr{L}^2(\Omega)$.

De ces deux lemmes, on déduit que $\mathscr{L}^2(\Omega)$ est un sous-espace hilbertien de $\mathscr{X}$, quand on le munit du produit scalaire $(f, g) \to \int_{\Omega} f(z).\overline{g(z)} \, d\omega_z$.

D'autre part, $\forall f, g \in \mathscr{A}_m(\Omega)$, $(\tilde{f}, \tilde{g}) \to ((\tilde{f} \mid \tilde{g}))_m = \int_{\Omega} f^{(m)}(z).\overline{g^{(m)}(z)} \, d\omega_z$ définit un produit scalaire sur $\tilde{\mathscr{A}}_m(\Omega)$.

Muni de ce produit scalaire, $\tilde{\mathscr{A}}_m(\Omega)$ est un espace de Hilbert. On notera $|||\,.\,|||_m$ la norme associée à $((.\quad.))_m$. De plus, on a immédiatement :

LEMME 1.3 : *Quel que soit $m \in \mathbb{N}^*$, l'application :*

$$\left|\begin{array}{l} \mathscr{A}_m(\Omega) \to \mathscr{L}^2(\Omega) \\ \quad f \mapsto f^{(m)} \end{array}\right. \quad \textit{est une surjection}.$$

Des lemmes 1.2 et 1.3, on déduit facilement que $\tilde{\mathscr{A}}_m(\Omega)$ muni du produit scalaire $((.\,|\,.))_m$ est un sous-espace hilbertien de $\tilde{\mathscr{X}}$.

De plus, posons : $\tilde{\mathscr{C}}_m = \varphi_m(\mathscr{C}_m)$.

Comme $\mathscr{C}_m + N_m$ est fermé dans $\mathscr{X}$ et comme φ_m est l'homomorphisme canonique de $\mathscr{X}$ sur $\tilde{\mathscr{X}}$, $\tilde{\mathscr{C}}_m$ est une partie (convexe) fermée de $\tilde{\mathscr{A}}_m(\Omega)$.

THÉORÈME 1.1 : *Quel que soit $m \in \mathbb{N}$, il existe une seule fonction « spline » complexe d'interpolation d'ordre m, que nous noterons σ_m, solution du problème* :

$$\operatorname{Min}\left\{ \int_\Omega |f^{(m)}(z)|^2 \, d\omega_z \, ; \, f \in \mathscr{C}_m \right\}.$$

Preuve : Puisque $\tilde{\mathscr{C}}_m$ est convexe fermé dans $\tilde{\mathscr{A}}_m(\Omega)$, il existe un seul élément $\sigma_m \in \mathscr{A}_m(\Omega)$ tel que :

$$|||\, \tilde{\sigma}_m \,|||_m = \operatorname{Min}\{ |||\tilde{f}|||_m \, ; \tilde{f} \in \tilde{\mathscr{C}}_m \}$$

σ_m est le seul élément de $\mathscr{C}_m$ appartenant à la classe $\tilde{\sigma}_m$. ||

2. APPLICATION AUX FONCTIONS « SPLINE » RÉELLES HARMONIQUES A DEUX VARIABLES

LEMME 2.1 : *Quel que soit $m \in \mathbb{N}$, quelle que soit f, analytique sur Ω, on a :*

$$\forall z \in \Omega, \quad \left| \frac{d^m(z)}{dm^z} \right|^2 = \frac{1}{2^{m-1}} \sum_{p=0}^{m} \binom{m}{p} \left(\frac{\partial^m \mathscr{R}e\, f(x, y)}{\partial x^{m-p} \, \partial y^p} \right)^2 .$$

Preuve : *Cf.* [3] et [5].

THÉORÈME 2.1 : *Quel que soit $m \in \mathbb{N}$, la partie réelle de la fonction « spline » complexe d'interpolation d'ordre m sur Ω est la fonction « spline » réelle harmonique à deux variables qui minimise l'intégrale :*

$$\int_\Omega \left[\sum_{p=0}^{m} \binom{m}{p} \left(\frac{\partial^m g(x, y)}{\partial x^{m-p} \, \partial y^p} \right)^2 \right] dx \, dy$$

parmi toutes les fonctions g de l'espace de Sobolev réel $H^m(\Omega)$ qui sont harmoniques dans Ω et telles que :

$$g(x_k, y_k) = \mathscr{R}e\,(\alpha_k), \qquad k = 1, \ldots, n .$$

Preuve : Soit $\mathscr{G}_m = \{ g \in H^m(\Omega) \, ; \, g(x_k, y_k) = \mathscr{R}e\,(\alpha_k), k = 1, \ldots, n \}$; $\mathscr{R}e\,(\sigma_m)$ est une fonction harmonique contenue dans $H^m(\Omega) \cap \mathscr{G}_m$.

En effet, puisque $\sigma_m \in \mathscr{A}_m(\Omega)$, $\displaystyle\int_\Omega \sum_{m=0}^{m} |\sigma_m^{(p)}(z)|^2 \, d\omega_z < +\infty$ et donc, d'après le lemme précédent :

$$\int_\Omega \left[(\mathscr{R}e\,(\sigma_m)(x, y))^2 + \sum_{p=1}^{m} \frac{1}{2^{p-1}} \sum_{q=0}^{p} \binom{p}{q} \left(\frac{\partial^p \mathscr{R}e\,(\sigma_m)(x, y)}{\partial x^{p-q} \, \partial y^q} \right)^2 \right] dx \, dy < +\infty .$$

Ainsi : $\forall p \in \{ 0, \dots, m \}$, $\forall q \in \{ 0, \dots, m \}$, $\dfrac{\partial^p \mathscr{R}e\,(\sigma_m)}{\partial x^{p-q}\,\partial y^q} \in L^2(\Omega)$.

Réciproquement, soit g une fonction harmonique sur Ω contenu dans $H^m(\Omega) \cap \mathscr{G}_m$. Alors : $\forall p \in \{ 0, \dots, m \}$, $\forall q \in \{ 0, \dots, m \}$, $\dfrac{\partial^p g}{\partial x^{p-q}\,\partial y^q} \in L^2(\Omega)$.

De plus, g est la partie réelle d'une fonction w, analytique sur Ω. Du lemme précédent, il résulte que quel que soit $p \in \{ 0, \dots, m \}$:

$$\forall z \in \Omega\,, \quad \left| \frac{d^p w(z)}{dz^p} \right| = \frac{1}{4}\,\frac{1}{2^{p-1}} \sum_{q=0}^{p} \binom{p}{q} \left(\frac{\partial^p g(x, y)}{\partial x^{p-q}\,\partial y^q} \right)^2$$

et donc que : $w \in \mathscr{A}_m(\Omega)$.

Ainsi, on a :

$$\int_\Omega | \sigma_m^{(m)}(z) |^2 \, d\omega_z = \mathrm{Min} \left\{ \int_\Omega \left[\frac{1}{4}\,\frac{1}{2^{m-1}} \sum_{p=0}^{m} \binom{m}{p} \left(\frac{\partial^m g(x, y)}{\partial x^{m-p}\,\partial y^p} \right)^2 \right] dx\,dy \,; \right.$$
$$\left. g \text{ harmonique sur } \Omega,\ g \in H^m(\Omega) \cap \mathscr{G}_m \right\}.$$

Et ainsi :

$$\int_\Omega \sum_{p=0}^{m} \binom{m}{p} \left(\frac{\partial^m (\mathscr{R}e\,(\sigma_m))\,(x, y)}{\partial x^{m-p}\,\partial y^p} \right)^2 dx\,dy =$$
$$= \mathrm{Min} \left\{ \int_\Omega \left[\frac{1}{4}\,\frac{1}{2^{m-1}} \sum_{p=0}^{m} \binom{m}{p} \left(\frac{\partial^m g(x, y)}{\partial x^{m-p}\,\partial y^p} \right)^2 \right] dx\,dy \,; \right.$$
$$\left. g \text{ harmonique sur } \Omega,\ g \in H^m(\Omega) \cap \mathscr{G}_m \right\}. \quad \|$$

3. SUR LES SOUS-ESPACES HILBERTIENS DE $\mathbb{C}^\Omega$ ISOMORPHES A $\tilde{\mathscr{A}}_m(\Omega)$

3.1. Les espaces $\mathscr{E}_m$ ($m \in \mathbb{N}$)

On désignera par $\mathscr{E}_m$ un sous-espace vectoriel de $\mathscr{A}_m(\Omega)$ isomorphe algébriquement à $\tilde{\mathscr{A}}_m(\Omega)$ dans l'application $\psi_m = \varphi_{m \mid \mathscr{E}_m}$.

La forme sesquilinéaire : $(f, g) \to (f \mid g)_m = \displaystyle\int_\Omega f^{(m)}(z) . \overline{g^{(m)}(z)}\, d\omega_z$ définit sur $\mathscr{E}_m$ un produit scalaire [3]. On notera $\| \,.\, \|_m$ la norme associée à ce produit scalaire.

On a : $\forall f, g \in \mathscr{E}_m$, $(f \mid g)_m = (\psi_m(f) \mid \psi_m(g))_m$.

On en déduit facilement que $\mathscr{E}_m$ muni du produit scalaire $(. \mid .)_m$ est un espace de Hilbert qui est un *sous-espace hilbertien de* $\mathscr{X}$, c.-à-d. :

$$\forall z \in \Omega,\ \exists M(z) \in \mathbb{R}_+ \text{ tel que } \forall f \in \mathscr{E}_m,\quad |f(z)| \leqslant M(z) \, \| f \|_m .$$

Alors, il existe $E_m \in \mathbb{C}^{\Omega \times \Omega}$ tel que :

(i) $\forall z \in \Omega$, $\forall f \in \mathscr{E}_m$, $f(z) = (f \mid E_m(.\,, z))_m$;

(ii) $\forall z, t \in \Omega$, $E_m(t, z) = \overline{E_m(z, t)}$;

(iii) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{C}$, $\forall z_1, \ldots, z_n \in \Omega$

$$\sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \alpha_k \, \overline{\alpha}_j \, E_m(z_k, z_j) \geqslant 0 \quad (\textit{cf.}\ [2] \text{ et } [7]) .$$

E_m est appelé noyau reproduisant — d'Aronszajn-Bergman — de $\mathscr{E}_m$.

De la proposition 2.4 de [8] et de la positivité du noyau E_m, on déduit que E_m est continu sur l'intérieur de Ω.

3.2. Sur certaines propriétés du noyau de $\mathscr{E}_m$

Soit E_m le noyau reproduisant de $\mathscr{E}_m$.

LEMME 3.1 : *Quelle que soit la fonctionnelle linéaire et continue sur* $\mathscr{E}_m$, *et quelle que soit* $f \in \mathscr{E}_m$, *on a* :

$$l(f) = \int_\Omega f^{(m)}(t) \, \overline{\frac{\partial^m}{\partial t^m} \, \overline{l(E_m(.\,, t))}} \, d\omega_t .$$

Preuve : D'après le théorème de Riesz, il existe un seul élément $h \in \mathscr{E}_m$ tel que :

$$\forall f \in \mathscr{E}_m, \quad l(f) = (f \mid h)_m .$$

D'autre part :

$$\forall t \in \Omega, \quad h(t) = (h \mid E_m(.\,, t))_m = \overline{(E_m(.\,, t) \mid h)_m}$$

et donc : $h(t) = \overline{l(E_m(.\,, t))}$.

On en déduit immédiatement la propriété annoncée. ||

THÉORÈME 3.1 : *Soit* L *le noyau reproduisant de* $\mathscr{E}_0 \subset \mathscr{L}^2(\Omega)$. *Alors* : $\forall m \in \mathbb{N}$, E_m *est caractérisé par* :

$$\forall t, z \in \Omega, \ \frac{\partial^{2m}}{\partial t^m \, \partial \overline{z}^m} E_m(t, z) = L(t, z) .$$

Preuve : On montre facilement que quel que soit $z \in \Omega$, l'application l_z qui à tout $f \in \mathscr{E}_m$ associe le complexe $f^{(m)}(z)$ est une fonctionnelle linéaire et continue sur $\mathscr{E}_m$.

On applique le lemme précédent à l_z et quel que soit $f \in \mathscr{E}_m$, on a :

$$l_z(f) = f^{(m)}(z) = \int_\Omega f^{(m)}(t) \cdot \overline{\frac{\partial^m}{\partial t^m}\left(\overline{\frac{\partial^m}{\partial z^m} E_m(z, t)}\right)}\, d\omega_t$$

c.-à-d. :

$$\forall z \in \Omega\,, \quad f^{(m)}(z) = \int_\Omega f^{(m)}(t) \cdot \overline{\frac{\partial^{2m}}{\partial t^m\, \partial \bar{z}^m} E_m(t, z)}\, d\omega_t\,.$$

Du lemme 1.3, on déduit que l'application qui à tout $f \in \mathscr{E}_m$ associe sa dérivée $f^{(m)}$ est une bijection de $\mathscr{E}_m$ sur $\mathscr{L}^2(\Omega)$.

Par conséquent, quel que soit $g \in \mathscr{L}^2(\Omega)$, on a :

$$\forall z \in \Omega\,, \quad g(z) = \int_\Omega g(t) \cdot \overline{\frac{\partial^{2m} E_m(t, z)}{\partial t^m\, \partial \bar{z}^m}}\, d\omega_t\,.$$

Le noyau reproduisant de $\mathscr{L}^2(\Omega)$ étant unique, le théorème est démontré. ||

3.3. Bases dénombrables orthonormales de $\mathscr{E}_m$

PROPOSITION 3.1 : *Quel que soit $m \in \mathbb{N}$, $\mathscr{E}_m$ est un espace séparable, et si $(e_k^0)_{k \in \mathbb{N}}$ est une base dénombrable orthonormale de $\mathscr{L}^2(\Omega)$, alors il existe une base dénombrable orthonormale unique $(e_k^m)_{k \in \mathbb{N}}$ de $\mathscr{E}_m$ telle que, quel que soit $k \in \mathbb{N}$, la dérivée d'ordre m de e_k^m soit e_k^0.*

Preuve : $\mathscr{L}^2(\Omega)$ est un espace séparable [6].

Soit $(e_k^0)_{k \in \mathbb{N}}$ l'une de ses bases dénombrable orthonormale.

Du lemme 1.3, on déduit que, quel que soit $k \in \mathbb{N}$, il existe une unique fonction e_k^m de $\mathscr{E}_m$ telle que e_k^0 soit sa dérivée d'ordre m, et l'on a :

$$\forall k, j \in \mathbb{N} \quad (e_k^m \mid e_j^m)_m = (e_k^{m(m)} \mid e_j^{m(m)})_0 = (e_k^0 \mid e_j^0)_0 = \delta_{kj}\,.$$

De plus, si $f \in \mathscr{E}_m$ est telle que : $\forall k \in \mathbb{N}$, $(f \mid e_k^m)_m = 0$, alors f vérifie :

$$\forall k \in \mathbb{N}\,, \quad (f^{(m)} \mid e_k^0)_0 = 0\,.$$

Ainsi $f^{(m)}$ étant un élément de $\mathscr{L}^2(\Omega)$, on a $f^{(m)} \equiv 0$ et donc $f \equiv 0$.

La famille $(e_k^m)_{k \in \mathbb{N}}$ est donc une base dénombrable orthonormale de $\mathscr{E}_m$ et $\mathscr{E}_m$ est séparable. ||

COROLLAIRE 3.1 : *Quel que soit $m \in \mathbb{N}$, si $(e_k^m)_{k \in \mathbb{N}}$ est une base dénombrable orthonormale de $\mathscr{E}_m$, alors la famille des dérivées d'ordre m de e_k^m, $(k \in \mathbb{N})$, est une base orthonormale dénombrable de $\mathscr{L}^2(\Omega)$ et les noyaux reproduisants E_m de $\mathscr{E}_m$ et L de $\mathscr{L}^2(\Omega)$ se décomposent respectivement de la manière suivante :*

$$\forall t, z \in \Omega, \quad E_m(t, z) = \sum_{k \in \mathbb{N}} \overline{e_k^m(z)} \cdot e_k^m(t)$$

et

$$L(t, z) = \sum_{k \in \mathbb{N}} \overline{e_k^{m(m)}(z)} \cdot e_k^{m(m)}(t) .$$

Preuve immédiate : D'après la propriété des compositions des noyaux de sous-espaces hilbertiens dans une base orthonormale. ||

4. EXPLICITATION DE LA FONCTION « SPLINE » COMPLEXE σ_m

4.1. Cas général

LEMME 4.1 : <u>*Caractérisation de $\tilde{\mathscr{C}}_m$ et de $\psi_m^{-1}(\tilde{\mathscr{C}}_m)$.*</u>

(i) *Il existe $(n - m)$ éléments $\rho'_1, \ldots, \rho'_{n-m} \in \mathscr{X}'$, linéairement indépendants dans $\mathscr{X}'$ tels que : $\forall p \in \{ 1, \ldots, n - m \}$,*

$$\rho'_p = \sum_{j=0}^{m} c_j^p \, \delta_{z_{p+j}}, \; c_j^p \in \mathbb{C} ; \quad \langle \rho'_p, 1 \rangle = \langle \rho'_p, z \rangle = \cdots = \langle \rho'_p, z^{m-1} \rangle = 0$$

(où par abus de langage, z^j désigne l'application : $z \to z^j$).

(ii) *Aux $(n - m)$ éléments $\rho'_1, \ldots, \rho'_{n-m} \in \mathscr{X}'$, on peut associer, de manière unique, $(n - m)$ éléments $\tilde{\rho}_1, \ldots, \tilde{\rho}_{n-m} \in \tilde{\mathscr{A}}_m(\Omega)$ linéairement indépendants tels que :*

$$\forall p \in \{ 1, \ldots, n - m \} , \forall f \in \mathscr{A}_m(\Omega) , \quad \langle \rho'_p, f \rangle = ((\tilde{\rho}_p \mid \tilde{f}))_m .$$

(iii) $\tilde{\mathscr{C}}_m = \{ \tilde{f} \in \tilde{\mathscr{A}}_m(\Omega) ; \; ((\tilde{\rho}_p \mid \tilde{f}))_m = \beta_p, \; 1 \leqslant p \leqslant n - m \}$ *où*

$$\overline{\beta}_p = \sum_{j=0}^{m} c_j^m \, \alpha_{p+j}, \, 1 \leqslant p \leqslant n - m ;$$

$$\mathscr{D}_m = \psi_m^{-1}(\tilde{\mathscr{C}}_m) = \{ f \in \mathscr{E}_m ; (\rho_p \mid f)_m = \beta_p, 1 \leqslant p \leqslant n - m \}$$

où : $\rho_p = \psi_m^{-1}(\tilde{\rho}_p), \, 1 \leqslant p \leqslant n - m.$

Preuve :

(i) Immédiate.

(ii) $\forall p \in \{1, \dots, (n-m)\}$, l'application : $\left| \begin{array}{l} \tilde{\mathcal{A}}_m(\Omega) \to \mathbb{R} \\ \tilde{f} \mapsto \langle \rho'_p, f \rangle \end{array} \right.$ est une fonctionnelle linéaire et continue. Il existe donc un seul élément $\tilde{\rho}_p \in \tilde{\mathcal{A}}_m(\Omega)$ tel que :

$$\forall f \in \mathcal{A}_m(\Omega), \quad \langle \rho'_p, f \rangle = ((\tilde{\rho}_p \mid \tilde{f}))_m .$$

De plus, $\tilde{\rho}_1, \dots, \tilde{\rho}_{n-m}$ sont linéairement indépendants, comme on le vérifie immédiatement.

(iii) $\forall \tilde{f} \in \tilde{\mathcal{C}}_m$, $((\tilde{\rho}_p \mid \tilde{f}))_m = \beta_p = \overline{\left\langle \sum_{j=0}^{m} c_j^m \delta_{z_{p+j}}, f \right\rangle} = \sum_{j=0}^{m} \overline{c_j^p}\, \overline{\alpha}_{p+j}$. Inversement, si $\tilde{f} \in \tilde{\mathcal{A}}_m(\Omega)$ vérifie : $((\tilde{\rho}_p \mid \tilde{f}))_m = \beta_p$, $1 \leqslant p \leqslant n-m$, on montre facilement qu'il existe $f \in \mathcal{C}_m$ tel que : $\psi_m(f) = \tilde{f}$. ‖

THÉORÈME 4.1 : *Soit $\mathcal{E}_m$ un sous-espace vectoriel de $\mathcal{A}_m(\Omega)$ isomorphe algébriquement et topologiquement à $\tilde{\mathcal{A}}_m(\Omega)$ dans l'application ψ_m. E_m désignera le noyau de $\mathcal{E}_m$ qui est un sous-espace hilbertien de $\mathcal{X}$.*

Pour tout $m \in \mathbb{N}$, la fonction « spline » complexe σ_m peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\sigma_m = p_m + \sum_{k=1}^{n-m} \lambda_k \left[\sum_{j=0}^{m} \overline{c_j^k}\, E_m(\cdot, z_{k+j}) \right]$$

où :

* $p_m \in N_m$.

** $(\lambda_1, \dots, \lambda_{n-m})$ *est solution unique du système linéaire* :

$$\sum_{k=1}^{n-m} \lambda_k \left(\sum_{j=0}^{m} \sum_{l=0}^{m} \overline{c_j^k}\, c_l^p\, E_m(z_{p+l}, z_{k+j}) \right) = \sum_{l=0}^{m} c_l^p\, \alpha_{p+l}, p = 1, \dots, n-m .$$

*** *Quel que soit $k \in \{1, \dots, n-m\}$, les constantes $c_0^k, \dots, c_m^k$ vérifient les m équations homogènes* :

$$\sum_{l=0}^{m} c_l^k (z_{k+j})^q = 0, \quad q = 0, \dots, m-1 .$$

Preuve : Des hypothèses, il résulte que $\mathcal{D}_m$ est une partie convexe fermée de $\mathcal{E}_m$ car $\tilde{\mathcal{E}}_m$ est une partie convexe fermée de $\tilde{\mathcal{A}}_m(\Omega)$.

Soit s_m la projection de l'origine de $\mathcal{E}_m$ sur $\mathcal{D}_m$.

On a alors :

$$\| s_m \|_m = \operatorname{Min} \{ \| f \|_m ; \quad f \in \mathscr{D}_m \} = ||| \tilde{s}_m |||_m = \operatorname{Min} \{ ||| \tilde{f} |||_m ; \quad \tilde{f} \in \tilde{\mathscr{C}}_m \}$$

et $\sigma_m = p_m + s_m$ où $p_m \in N_m$ puisque :

$$\int_\Omega | \sigma_m^{(m)}(z) |^2 \, d\omega_z = \| S_m \|_m^2 .$$

Notons que σ_m ne dépend pas du choix de l'espace $\mathscr{E}_m$.

Comme s_m est la projection de l'origine sur l'hyperplan fermé $\mathscr{D}_m$ déterminé par les équations : $(\rho_p \mid s_m)_m = \beta_p$, $1 \leqslant p \leqslant n - m$, on a classiquement :

$$s_m = \sum_{k=1}^{n-m} \lambda_k \, \rho_k , \quad \lambda_k \in \mathbb{C}, 1 \leqslant k \leqslant n - m .$$

Or, $\forall z \in \Omega$, $\forall p \in \{ 1, \dots, (n - m) \}$,

$$\begin{aligned} \rho_p(z) &= \langle \rho_p, \delta_z \rangle = (\rho_p \mid E_m(\cdot, z))_m = \overline{\langle \rho'_p, E_m(\cdot, z) \rangle} \\ &= \sum_{j=0}^{m} \bar{c}_j^p . \overline{E_m(z_{p+j}, z)} = \sum_{j=0}^{m} \bar{c}_j^p . E_m(z, z_{p+j}) . \end{aligned}$$

Ainsi : $s_m = \sum_{k=1}^{n-m} \lambda_k \, \rho_k = \sum_{k=1}^{n-m} \lambda_k \left(\sum_{j=0}^{m} \bar{c}_j^k . E_m(\cdot, z_{j+k}) \right)$. D'autre part :

$$\begin{aligned} (\rho_p \mid \sigma_m)_m &= (\rho_p \mid s_m)_m = \sum_{k=1}^{n-m} \lambda_k (\rho_p \mid \rho_k)_m = \sum_{k=1}^{n-m} \lambda_k \, \overline{\langle \rho'_p, \rho_k \rangle} = \\ &= \sum_{k=1}^{n-m} \lambda_k \left(\overline{\left\langle \sum_{j=0}^{m} c_j^p \, \delta_{z_{p+j}}, \rho_k \right\rangle} \right) = \sum_{k=1}^{n-m} \lambda_k \left(\sum_{j=0}^{m} \bar{c}_j^p \, \bar{\rho}_k(z_{p+j}) \right) \\ &= \sum_{k=1}^{n-m} \lambda_k \left(\sum_{j=0}^{m} \bar{c}_j^p \overline{\left(\sum_{l=0}^{m} \bar{c}_l^k \, E_m(z_{p+j}, z_{k+l}) \right)} \right) \\ &= \sum_{k=1}^{n-m} \lambda_k \left(\sum_{j=0}^{m} \sum_{l=0}^{m} \bar{c}_j^p \, c_k^l \, E_m(z_{k+l}, z_{p+j}) \right) \end{aligned}$$

d'où la propriété $**$.

La propriété $***$ est immédiate car :

$$\forall k \in \{ 1, \dots, (n - m) \} , \quad \langle \rho'_k, 1 \rangle = \langle \rho'_k, z \rangle = \cdots = \langle \rho'_k, z^{m-1} \rangle = 0 . \quad \|$$

4.2. Cas où Ω est un disque de $\mathbb{C}$

Dans ce paragraphe, Ω est un disque de $\mathbb{C}$, centré à l'origine et de rayon R. On mettra en évidence des sous-espaces hilbertiens particuliers de $\mathscr{X}$, notés ici $\mathscr{H}_m(\Omega)$, dont on pourra expliciter une base orthonormale ainsi que leur noyau reproduisant.

4.2.1. *Explicitation du noyau reproduisant*

PROPOSITION 4.1 : *Le noyau reproduisant H_m de $\mathscr{H}_m(\Omega)$, espace de fonctions de $\mathscr{A}_m(\Omega)$ qui s'annulent en m points $\xi_1, \ldots, \xi_m \in \Omega$ distincts est tel que :*

$$\forall t, z \in \Omega\,, \quad H_m(t, z) = \sum_{k \in \mathbb{N}} \overline{\psi_k^m(z)} . \psi_k^m(t)$$

avec

$$\forall z \in \Omega, \forall k \in \mathbb{N}\,, \quad \psi_k^m(z) = \frac{1}{\sqrt{\pi}\sqrt{k+1}\,(k+2)\ldots(k+m)\,R^{k+1}}\, z^{k+m} + p_k^m(z)$$

où p_k^m est le polynôme de N_m vérifiant :

$$p_k^m(\xi_j) = \frac{1}{\sqrt{\pi}\sqrt{k+1}\,(k+2)\ldots(k+m)\,R^{k+1}} \quad \xi_j^{k+m}\,, \quad j = 1, \ldots, m\,.$$

Preuve : La famille $(\psi_k^0)_{k \in \mathbb{N}}$ défini par :

$$\forall z \in \Omega, \forall k \in \mathbb{N}\,, \quad \psi_k^0(z) = \frac{\sqrt{k+1}}{\sqrt{\pi}} \frac{z^k}{R^{k+1}}$$

est une base dénombrable de $\mathscr{L}^2(\Omega)$ (*cf.* [7]).

D'après la proposition 3.1, quel que soit $k \in \mathbb{N}$, il existe un seul élément $\psi_k^m \in \mathscr{H}_m(\Omega)$ tel que

$$\forall z \in \Omega\,, \quad \frac{d^m \psi_k^m(z)}{dz^m} = \psi_k^0(z)\,.$$

Alors

$$\forall z \in \Omega, \forall k \in \mathbb{N}\,, \quad \psi_k^m(z) = \frac{1}{\sqrt{\pi}\sqrt{k+1}} \frac{z^{k+m}}{(k+2)\ldots(k+m)\,R^{k+1}} + p_k^m(z)$$

où $p_k^m \in \mathbb{N}_m$ est entièrement déterminé par le fait que $\psi_k^m(\xi_j) = 0, j = 1, \ldots, m$. Le résultat annoncé s'en déduit immédiatement. ||

D'après la proposition précédente, le noyau H_m s'exprime sous forme de série ; il n'y a que dans le cas où $m = 0$ et $m = 1$ que l'on va pouvoir donner une expression du noyau au moyen de fonctions élémentaires.

PROPOSITION 4.2 : *Le noyau reproduisant L de* $\mathscr{L}^2(\Omega)$ $(m = 0)$ *est défini par :*

$$\forall t, z \in \Omega \quad L(t, z) = \frac{1}{\pi R^2} \frac{1}{\left(1 - \frac{t\bar{z}}{R^2}\right)^2}.$$

Preuve : Il suffit de vérifier que

$$\forall t, z \in \Omega, \quad L(t, z) = \sum_{k \in \mathbb{N}} \psi_k^0(z)\, \psi_k^0(t) = \frac{1}{\pi} \sum_{k \in \mathbb{N}} (k+1) \frac{\bar{z}^k . t^k}{R^{2k+2}}$$
$$= \frac{1}{\pi R^2} \frac{1}{\left(1 - \frac{t\bar{z}}{R^2}\right)^2}.$$

PROPOSITION 4.2*bis* : *Le noyau reproduisant* H_1 *de*

$$\mathscr{H}_1(\Omega) = \{ f \in \mathscr{A}_1(\Omega) ;\, f(\xi_1) = 0, \xi_1 \in \Omega \}$$

est défini par :

$$\forall t, z \in \Omega, \quad H(t, z) = -\frac{1}{\pi}\left[\operatorname{Log}\left(1 - \frac{t\bar{z}}{R^2}\right) - \operatorname{Log}\left(1 - \frac{t\bar{\xi}_1}{R^2}\right) - \right.$$
$$\left. - \operatorname{Log}\left(1 - \frac{\xi_1 \bar{z}}{R^2}\right) + \operatorname{Log}\left(1 - \frac{\xi_1 \bar{\xi}_1}{R^2}\right)\right].$$

Preuve : On sait que : $\forall t, z \in \Omega,\ \dfrac{\partial^2 H_1(t, z)}{\partial t\, \partial \bar{z}} = L(t, z).$

Après intégration, on trouve :

$$H_1(t, z) = \frac{1}{\pi}\left[\operatorname{Log} \bar{z} - \operatorname{Log}\left(1 - \frac{t\bar{z}}{R^2}\right)\right] + a(\bar{z}) + b(t).$$

Pour déterminer a et b, on utilisera le fait que H_1 est hermitienne et que $\forall z \in \Omega$, $H_1(\xi_1, z) = 0$. ||

Remarquons que cette méthode ne peut s'étendre aux cas $m \geqslant 2$; en effet, dans le cas $m = 2$ par exemple, on aboutit au calcul d'une primitive de $\dfrac{\operatorname{Log}(1 + x)}{x}$.

4.2.2. *Explicitation de* σ_m

D'après le théorème 4.1, la connaissance explicite du noyau E_m permet de déterminer entièrement σ_m. Un choix commode de E_m est de prendre ici le noyau d'un espace $\mathscr{H}_m(\Omega)$ défini précédemment, les m points $\xi_1, \ldots, \xi_m$ étant alors *choisis parmi l'ensemble des points d'interpolation*, soit $z_1, \ldots, z_m$ par exemple.

Le polynôme p_m figurant dans l'expression de σ_m est entièrement déterminé par le fait que

$$\sigma_m(z_k) = p_m(z_k) = \alpha_k \qquad k = 1, \ldots, m\,.$$

(On a en effet $\forall z \in \Omega \quad E_m(z_k, z) = H_m(z_k, z) = 0 \quad k = 1, \ldots, m.$)

5. CONVERGENCE

PROPOSITION 5.1 : *Soient* $\xi_1, \ldots, \xi_m$, m *points distincts de* Ω,

$$\mathscr{H}_m(\Omega) = \{\, f \in \mathscr{A}_m(\Omega)\,;\, f(\xi_j) = 0,\, 1 \leqslant j \leqslant m \,\}\,,$$

et $\mathscr{E}_m$ *un sous-espace vectoriel de* $\mathscr{A}_m(\Omega)$ *isomorphe algébriquement à* $\tilde{\mathscr{A}}_m(\Omega)$ *dans l'application :* $\psi_m = \varphi_{m \mid \mathscr{E}_m}$. *On suppose que* $\mathscr{H}_m(\Omega)$ *et* $\mathscr{E}_m$ *sont munis du produit scalaire :*

$$(f, g) \to (f \mid g)_m = \int_\Omega f^{(m)}(z) . \overline{g^{(m)}(z)}\, d\omega_z\,.$$

$\mathscr{H}_m(\Omega)$ *et* $\mathscr{E}_m$ *sont deux sous-espaces hilbertiens de* $\mathscr{X}$ *dont les noyaux respectifs* H_m *et* E_m *sont liés par la relation suivante :*

$$\forall t, z \in \Omega\,, \quad H_m(t, z) = E_m(t, z) - \sum_{j=1}^{m} \overline{l_j}(z)\, E_m(t, \xi_j) - \sum_{j=1}^{m} l_j(t)\, \overline{E_m(z, \xi_j)} + {} + \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{m} l_j(t)\, \overline{l_k(z)}\, E_m(\xi_j, \xi_k)\,.$$

où l_j *désigne le polynôme de Lagrange de* N_m *tel que :* $l_j(\xi_k) = \delta_{jk}$, $1 \leqslant k \leqslant m$.

Preuve : On sait que $\mathscr{A}_m(\Omega)$ est somme directe (algébrique et topologique) des espaces $\mathscr{H}_m(\Omega)$ et N_m de même que $\mathscr{E}_m$ et N_m. Ainsi :

$$\forall f \in \mathscr{A}_m(\Omega)\,, \quad f = h + p = e + q,\, h \in \mathscr{H}_m(\Omega),\, e \in \mathscr{E}_m,\, p, q \in N_m\,.$$

D'autre part : $p = \sum_{j=1}^{m} f(\xi_j)\, l_j$ car $\forall j \in \{\, 1, \ldots, m \,\}$, $h(\xi_j) = 0$.

Donc : $p = \sum_{j=1}^{m} e(\xi_j)\, l_j + \sum_{j=1}^{m} q(\xi_j)\, l_j = \sum_{j=1}^{m} e(\xi_j)\, l_j + q$.

Or, $\forall z \in \Omega$, $h(z) = (f \mid H_m(.,z))_m$ et $e(z) = (f \mid E_m(.,z))_m$.

On en déduit que :

$$\forall z \in \Omega, \quad f(z) = \left(f \mid H_m(.,z) + \sum_{j=1}^{m} \overline{l_j(z)}\, E_m(.,\xi_j)\right)_m + q(z) =$$
$$= (f \mid E_m(.,z))_m + q(z).$$

D'où :

$$\forall f \in \mathscr{A}_m(\Omega), \forall z \in \Omega, \quad \left(f \mid E_m(.,z) - \left[H_m(.,z) + \sum_{j=1}^{m} \overline{l_j}(z)\, E_m(.,\xi_j)\right]\right)_m = 0.$$

Comme l'application $\left| \begin{array}{l} \mathscr{A}_m(\Omega) \to \mathscr{L}^2(\Omega) \\ f \mapsto f^{(m)} \end{array}\right.$ est surjective, on a :

$$\forall z \in \Omega, \quad E_m^{(m)}(.,z) = H_m^{(m)}(.,z) + \sum_{j=1}^{m} \overline{l_j(z)}\, E_m^{(m)}(.,\xi_j).$$

En intégrant, on obtient :

$$E_m(.,z) = H_m(.,z) + \sum_{j=1}^{m} \overline{l_j(z)}\, E_m(.,\xi_j) + \sum_{k=1}^{m} \alpha_k(z)\, l_k$$

avec : $\forall k \; \{1, \ldots, m\}$, $E_m(\xi_k, z) = \sum_{j=1}^{m} \overline{l_j(z)}\, E_m(\xi_k, \xi_j) + \alpha_k(z)$, d'où le résultat annoncé. ||

THÉORÈME 5.1 : *Soient* Γ *une courbe rectifiable contenue dans un compact de* Ω *et* $w \in \mathscr{A}_m(\Omega)$.

Quel que soit $n \in \mathbb{N}^*$, *on désigne par* Z^n *un ensemble de* n *points distincts de* Γ *que nous noterons* $z_1^n, \ldots, z_n^n$ *et par* $\sigma(n)$ *la « spline » d'interpolation de* w *aux points de* Z^n.

Si $\lim_{n\to\infty} \left(\operatorname{Sup}_{z\in\Gamma} \left(\operatorname{Inf}_{1\leqslant j\leqslant n} |z - z_j^n|\right)\right) = 0$, *alors* : $\lim_{n\to\infty} \| \sigma(n) - w \|_m = 0$

$\left(\text{où} : \forall f \in \mathscr{A}_m(\Omega), \| f \|_m^2 = \int_\Omega | f^{(m)}(z) |^2 \, d\omega_z\right)$.

Preuve : Notons $\sigma(n)$ la « spline » qui interpole w aux points de la subdivision Z^n.

* Soient $t_1, \ldots, t_m$, m points distincts de Γ et

$$\mathscr{K}_m = \{ f \in \mathscr{A}_m(\Omega) ; f(t_j) = 0, 1 \leqslant j \leqslant m \}.$$

$\mathscr{K}_m$ muni du produit scalaire :

$$(f, g) \to (f \mid g)_m = \int_\Omega f^{(m)}(z).\overline{g^{(m)}(z)}\, d\omega_z$$

est un sous-espace hilbertien de $\mathscr{X}$.

Notons K_m son noyau. On a les décompositions suivantes :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sigma(n) = \tau(n) + q(n), \quad \tau(n) \in \mathscr{K}_m, \quad q(n) \in N_m \quad \text{et} \quad w = v + q,$$
$$v \in \mathscr{K}_m, \quad q \in N_m.$$

De plus : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \| \tau(n) \|_m = \| \sigma(n) \|_m \leqslant \| w \|_m = \| v \|_m$.

La suite $\tau(n)$ étant bornée dans $\mathscr{K}_m$, on peut en extraire une sous-suite, que nous noterons encore $\tau(n)$ pour simplifier l'écriture — qui converge faiblement dans $\mathscr{K}_m$ vers $\tau^* \in \mathscr{K}_m$.

Comme la norme $\| \cdot \|_m$ est s.c.i. pour la topologie faible de $\mathscr{K}_m$, on a :

$$\liminf_{n \to \infty} \| \tau(n) \|_m \geqslant \| \tau^* \|_m.$$

$**$ Soit t un point fixé quelconque de Γ.

Comme $\lim\limits_{n \to \infty} (\operatorname{Sup}\limits_{z \in \Gamma} (\operatorname{Inf}\limits_{1 \leqslant j \leqslant n} | z - z_j^n |)) = 0$, on a :

$$\forall \alpha \in \mathbb{N}^* \quad \exists n(\alpha) \in \mathbb{N}^* \quad \exists (z_{j(k)}^{n(\alpha)})_{0 \leqslant k \leqslant m} \in Z^{n(\alpha)} \quad \text{tels que :}$$

$$\operatorname{Max}\left(| t - z_{j(0)}^{n(\alpha)} |, \operatorname{Max}\{ | t_k - z_{j(k)}^{n(\alpha)} | ; 1 \leqslant k \leqslant m \}\right) \leqslant \frac{1}{\alpha}.$$

Soit $\mathscr{H}_m^\alpha = \{ f \in \mathscr{A}_m(\Omega) ; f(z_{j(k)}^{n(\alpha)}) = 0, 1 \leqslant k \leqslant m \}$; $\mathscr{H}_m^\alpha$ muni du produit scalaire :

$$(f, g) \to (f \mid g)_m = \int_\Omega f^{(m)}(z).\overline{g^{(m)}(z)}\, d\omega_z$$

est un sous-espace hilbertien de $\mathscr{X}$.

Notons H_m^α son noyau.

On a alors les décompositions suivantes :

$$w = v(\alpha) + p(\alpha), \qquad v(\alpha) \in \mathscr{H}_m^\alpha, p(\alpha) \in \mathbb{N}_m,$$
$$\sigma(n(\alpha)) = s(n(\alpha)) + p(\alpha), s(n(\alpha)) \in \mathscr{H}_m^\alpha ;$$

la composante de w et celle de $\sigma(n(\alpha))$ sur N_m sont les mêmes car :

$$[v(\alpha) - s(n(\alpha))](z_{j(k)}^{n(\alpha)}) = 0, \qquad 1 \leqslant k \leqslant m.$$

On en déduit que :

$$\forall \alpha \in \mathbb{N}^*, \quad [v - \tau(n(\alpha))](t) = (v - \tau(n(\alpha)) \mid K_m(., t))_m = \\ = (v(\alpha) - s(n(\alpha)) \mid K_m(., t))_m$$

car $v - v(\alpha) \in N_m$ et $\tau(n(\alpha)) - s(n(\alpha)) \in N_m$.

Comme $[v(\alpha) - s(n(\alpha))](z_{j(0)}^{n(\alpha)}) = 0$, on a aussi :

$$[v - \tau(n(\alpha))](t) = (v(\alpha) - s(n(\alpha)) \mid K_m(., t) - H_m^\alpha(., z_{j(0)}^{n(\alpha)}))_m .$$

Il en résulte que :

$$|[v - \tau(n(\alpha))](t)| \leqslant \| v(\alpha) - s(n(\alpha)) \|_m . \| K_m(., t) - H_m^\alpha(., z_{j(0)}^{n(\alpha)}) \|_m$$
$$\leqslant 2 \| w \|_m . \{ \| K_m(., t) - K_m(., z_{j(0)}^{n(\alpha)}) \|_m + \| K_m(., z_{j(0)}^{n(\alpha)}) - H_m^\alpha(., z_{j(0)}^{n(\alpha)}) \|_m \} .$$

Comme $(z, t) \to K_m(z, t)$ est continue sur Ω, on a :

$$\lim_{\alpha \to \infty} \| K_m(., t) - K_m(., z_{j(0)}^{n(\alpha)}) \|_m^2 = \lim_{\alpha \to \infty} \{ [K_m(t, t) - K_m(t, z_{j(0)}^{n(\alpha)})] + \\ + [K_m(z_{j(0)}^{n(\alpha)}, z_{j(0)}^{n(\alpha)}) - K_m(t, z_{j(0)}^{n(\alpha)})] \} = 0 .$$

D'autre part, de la proposition 5.1, il résulte que :

si $l_j^{n(\alpha)} \in N_m$, $1 \leqslant j \leqslant m$, est défini par : $l_j^{n(\alpha)}(z_{j(k)}^{n(\alpha)}) = \delta_{jk}$, $1 \leqslant k \leqslant m$,

on a :

$$\lim_{\alpha \to \infty} \| K_m(., z_{j(0)}^{n(\alpha)}) - H_m^\alpha(., z_{j(0)}^{n(\alpha)}) \|_m^2 =$$
$$= \lim_{\alpha \to \infty} \left\| \sum_{k=1}^{m} \overline{l_k^{n(\alpha)}(z_{j(0)}^{n(\alpha)})} K_m(., z_{j(k)}^{n(\alpha)}) \right\|_m^2 =$$
$$= \lim_{\alpha \to \infty} \left(\sum_{k=1}^{m} \sum_{k'=1}^{m} l_k^{n(\alpha)}(z_{j(0)}^{n(\alpha)}) . \overline{l_{k'}^{n(\alpha)}(z_{j(0)}^{n(\alpha)})} K_m(z_{j(k)}^{n(\alpha)}, z_{j(k')}^{n(\alpha)}) \right) .$$

Or, on vérifie facilement que si $l_k \in N_m$, $1 \leqslant k \leqslant m$, est défini par : $l_k(t_j) = \delta_{jk}$, $1 \leqslant j \leqslant m$, on a :

$$\lim_{\alpha \to \infty} l_k^{n(\alpha)}(z_{j(0)}^{n(\alpha)}) = l_k(t) .$$

De même, on a :

$$\lim_{\alpha \to \infty} K_m(z_{j(k)}^{n(\alpha)}, z_{j(k')}^{n(\alpha)}) = K_m(t_k, t_{k'}) = 0 .$$

Donc : $\lim_{\alpha\to\infty} \| K_m(., z_{j(0)}^{n(\alpha)}) - H_m^\alpha(., z_{j(0)}^{n(\alpha)}) \|_m^2 = 0$.

On en déduit que : $\forall t \in \Gamma$, $\lim_{n\to\infty} [\tau(n(\alpha)) - v](t) = 0$ et par conséquent que : $\forall t \in \Gamma$, $[v - \tau^*](t) = 0$.

Ainsi, v coïncide sur Γ avec τ^*.

Comme v et τ^* sont analytiques sur Ω, on a :

$$\forall z \in \Omega, \quad [v - \tau^*](z) = 0 \quad \text{et} \quad \liminf_{n\to\infty} \| \tau(n) \|_m \geqslant \| v \|_m .$$

Mais : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\| \tau(n) \|_m = \| \sigma(n) \|_m \leqslant \| v \|_m = \| w \|_m$.

Donc : $\lim_{n\to\infty} \| \tau(n) \|_m = \| v \|_m$.

Puisque $\tau(n) \underset{n\to\infty}{\rightharpoonup} v$, on a : $\lim_{n\to\infty} \| \tau(n) - v \|_m = 0$ et par conséquent, on a aussi : $\lim_{n\to\infty} \| \sigma(n) - w \|_m = 0$. ||

COROLLAIRE 5.1 : *Avec les mêmes hypothèses qu'au théorème* 5.1 *on a* : $\forall p \in \mathbb{N}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\sigma^{(p)}(n)$ *converge uniformément vers* $w^{(p)}$ *sur tout compact* K *contenu dans* Ω *tel que* : *distance* $(K, \partial\Omega) > 0$ *où* $\partial\Omega$ *est la frontière de* Ω.

Preuve : $\forall z \in \Omega$, $\forall \alpha \in \mathbb{N}^*$,

$$| [\sigma(n(\alpha)) - w](z) | = | (\sigma(n(\alpha)) - w \mid H_m^\alpha(., z))_m | \leqslant$$
$$\leqslant \| \sigma(n(\alpha)) - w \|_m . \| H_m^\alpha(., z) \|_m$$

$$\Rightarrow \forall \alpha \in \mathbb{N}^*, \int_\Omega | [\sigma(n(\alpha)) - w](z) |^2 \, d\omega_z \leqslant \| \sigma(n(\alpha)) - w \|_m^2 . \int_\Omega (H_m^\alpha(z, z)) \, d\omega_z .$$

Comme $\lim_{\alpha\to\infty} \int_\Omega (H_m^\alpha(z, z)) \, d\omega_z = \int_\Omega K_m^\alpha(z, z) \, d\omega_z$, on en déduit que :

$$\lim_{\alpha\to\infty} \int_\Omega | [\sigma(n(\alpha)) - w](z) |^2 \, d\omega_z = 0 .$$

Mais d'autre part, avec le lemme 1.1,

$$\forall p \in \mathbb{N}, \; \forall z \in \Omega, \quad | [(\sigma(n(\alpha)))^{(p)} - w^{(p)}](z) | \leqslant$$
$$\leqslant \frac{p\,!\sqrt{p+1}}{\sqrt{\pi}(R(z))^{p+1}} \left(\int_\Omega | [\sigma(n(\alpha)) - w](z) |^2 \, d\omega_z \right)^{1/2} .$$

On en déduit facilement le résultat précédent. ||

BIBLIOGRAPHIE

[1] M. ATTEIA, *Fonctions « spline » dans le champ complexe*, C.R.A.S., t. 273, octobre 1971, pp. 678-698.

[2] M. ATTEIA, *Fonctions « spline » et noyaux reproduisants d'Aronszajn-Bergman*, R.A.I.R.O., 4e année R. 3, 1970, pp. 31-43.

[3] C. FAGE-SIMPSON, *Fonctions « spline » complexes d'interpolation d'ordre m dans le champ complexe*, Thèse de 3e Cycle (décembre 1981).

[4] P.-J. LAURENT, *Approximation, Optimisation*, Hermann.

[5] J. NEČAS, *Les méthodes directes en théorie des équations elliptiques*, Masson, 1967 (chap. 2).

[6] P. RABIER, *Interpolation harmonique*, R.A.I.R.O., vol. 11, nº 2, 1977.

[7] W. RUDIN, *Real and complex analysis*, McGraw-Hill.

[8] L. SCHWARTZ, *Sous-espaces hilbertiens d'espaces vectoriels topologiques et noyaux associés*, Journal d'Analyse Mathématique, Jérusalem, vol. 13, 1964.