MODÉLISATION MATHÉMATIQUE ET ANALYSE NUMÉRIQUE

PHILIPPE CORTEY-DUMONT

Sur les inéquations variationnelles à opérateur non coercif

Modélisation mathématique et analyse numérique, tome 19, nº 2 (1985), p. 195-212

<http://www.numdam.org/item?id=M2AN_1985__19_2_195_0>

MATHEMATICAL MODELLING AND NUMERICAL ANALYSIS
MODÉLISATION MATHÉMATIQUE ET ANALYSE NUMÉRIQUE

(vol 19, n° 2, 1985, p 195 a 212)

SUR LES INÉQUATIONS VARIATIONNELLES A OPÉRATEUR NON COERCIF (*)

par Philippe CORTEY-DUMONT [1]

Communiqué par F BREZZI

Résumé — *On étudie le problème des inéquations variationnelles à opérateur non coercif en utilisant au niveau de l'approximation une méthode qui repose sur la notion de sous-solution et qui introduit une grande symétrie dans le traitement du problème discret et du problème continu*

Abstract — *We consider the problem of variational inequalities with non-coercive operator Especially we consider a new method for studying the approximation based on the concept of under-solution and symmetry*

Dans l'étude des problèmes à opérateur elliptique, on suppose généralement que la forme bilinéaire définie par :

$$a(u, v) = \int_\Omega \left(\sum_{ij} a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} + \sum_i b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} v + a_0\, uv \right) dx\,,$$

est fortement coercive, c'est-à-dire qu'il existe $\alpha > 0$ tel que $\alpha \| v \|^2_{H^1} \leqslant a(v, v)$.

Pourtant, dans la modélisation des problèmes de contrôle, le caractère déterministe du processus qui est représenté par les coefficients b_i, peut être prépondérant. Il est alors intéressant d'affaiblir l'hypothèse de coercivité forte et de supposer seulement l'existence d'un $\lambda > 0$ tel que :

$$\alpha \| v \|^2_{H^1} \leqslant a(v, v) + \int_\Omega \lambda v^2\, dx\,.$$

On étudie, dans ce travail, l'inéquation variationnelle (et, par une simplification immédiate, l'équation) associée à cet opérateur, un accent particulier étant mis sur l'approximation.

(*) Reçu en mars 1984
(1) C M A Ecole Polytechnique, 91138 Palaiseau

Plus précisément, si le problème est défini par
Trouver u solution de

$$\begin{cases} a(u, v - u) \geqslant (f, v - u) & v \leqslant \psi \quad \forall v \in H^1 \\ u \leqslant \psi \end{cases}$$

on le transforme en trouver u solution de

$$\begin{cases} b(u, v - u) \geqslant (f + \lambda u, v - u) & v \leqslant \psi \quad \forall v \in H^1 \\ u \leqslant \psi \end{cases}$$

où

$$b(u, v) = a(u, v) + \int_\Omega \lambda uv \, dx$$

L'opérateur $b(u, v)$ vérifie alors l'hypothèse de coercivité forte et le nouveau problème s'apparente à une I Q V dans la mesure où le second membre dépend de la solution (*cf* [3]) Il est d'ailleurs possible de reprendre son étude dans le même esprit, à savoir

1) Définir un algorithme $u_n = \mathfrak{J}(u_{n-1})$ où $\mathfrak{J}(r) = w$ est la solution de

$$\begin{cases} b(w, v - w) \geqslant (f + \lambda r, v - w) & v \leqslant \psi \quad v \in H^1 \\ w \leqslant \psi \end{cases}$$

2) Trouver une sur-solution $\hat{u}_0$ ($\hat{u}_0 \geqslant \mathfrak{J}(\hat{u}_0)$)

3) Trouver une sous-solution $\check{u}_0$ ($\check{u}_0 \leqslant \mathfrak{J}(\check{u}_0)$)

On obtient alors l'existence et l'unicité de la solution (*cf* [2]), sa régularité, des propriétés de monotonie et de lipschitzianité par rapport aux seconds membres, d'un ordre d'approximation quasi optimal (*cf* [8, 9]), une méthode de résolution (*cf* [15])

Toutefois notre propos est de presenter dans ce cas tres simple une nouvelle approche pour etudier l'approximation des I V et des I Q V (*cf* [9, 10]) qui nous permettra

1) d'obtenir l'ordre d'*approximation optimal*,

2) de mettre en évidence une symétrie parfaite dans le traitement du problème discret et du problème continu,

3) d'affaiblir le rôle de l'algorithme qui était prépondérant dans la précédente méthode (*cf* [8, 9]) En particulier, *il n'est plus utile d'avoir une estimation sur la vitesse de convergence de l'algorithme* (estimation qui était d'ailleurs superflue pour obtenir des résultats de convergence *cf* [12])

Description de la méthode

Elle repose très étroitement sur la notion de sous-solution. Rappelons qu'une fonction w est dite sous-solution si elle vérifie :

$$\begin{cases} w \leqslant \psi \\ b(w, v) \leqslant (f + \lambda w, v) \quad \forall v \geqslant 0 \quad v \in H^1(\Omega) \end{cases}$$

pour le problème continu ou pour le problème discret :

$$\begin{cases} a(w_h, \varphi_i) \leqslant (f + \lambda w_h, \varphi_i) \quad \forall \varphi_i \text{ fonctions de base de l'espace} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{d'élément fini } \mathscr{V}_h \\ w_h \leqslant r_h \psi . \end{cases}$$

Ces ensembles fonctions nous permettent de traiter de manière symétrique les problèmes discrets et le problème continu.

Plus précisément, on met en évidence une sous-solution discrète α_h et une sous-solution continue $\beta^{(h)}$ qui vérifient les propriétés respectives suivantes :

$$\begin{aligned} &\text{i)}\ \alpha_h \leqslant u_h \qquad \| u - \alpha_h \|_\infty \leqslant Ch^2 \,|\, \mathrm{Log}\, h \,|^2 \\ &\text{ii)}\ \beta^{(h)} \leqslant u \qquad \| u_h - \beta^{(h)} \|_\infty \leqslant Ch^2 \,|\, \mathrm{Log}\, h \,|^2 . \end{aligned}$$

On conclut alors en utilisant la normalité de L^∞. L'ordre de convergence obtenu $h^2 \,|\, \mathrm{Log}\, h \,|^2$ est optimal aux vues des propriétés de régularité de la solution u du problème continu (en effet comme $u \in W^{2,p}$ $p < +\infty$, on perd une puissance de Log h par rapport à l'estimation bien connue $h^2(\mathrm{Log}\, h)$).

On terminera en indiquant quelques autres applications de la méthode.

I. ÉTUDE DU PROBLÈME CONTINU

Soit Ω un ouvert convexe de $\mathbb{R}^N$ de frontière Γ suffisamment régulière. Pour $u, v \in H^1(\Omega)$, on pose :

$$a(u, v) = \int_\Omega \left(\sum_{i,j=1}^{N} a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} + \sum_l b_l \frac{\partial u}{\partial x_l} v + a_0 uv \right) dx \tag{1.1}$$

forme bilinéaire associée à l'opérateur $\mathscr{A}$ défini par :

$$\mathscr{A}u = - \sum_{i,j=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_j} a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} + \sum_{l=1}^{N} b_l \frac{\partial u}{\partial x_l} + a_0 u$$

où :

(1.2) les coefficients a_0, b_l, a_{ij} sont suffisamment réguliers, $a_0(x) \geqslant \alpha_0 > 0$;

(1.3) on suppose qu'il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $\xi \in \mathbb{R}^N$, et pour presque tout $\xi \in \Omega$

$$\sum_{ij} a_{ij}(x)\, \xi_i\, \xi_j \geqslant \alpha \sum_i \xi_i^2 .$$

On sait qu'il existe alors λ assez grand tel que :

(1.4) $$\alpha \| v \|_{H^1}^2 \leqslant a(v, v) + \lambda \int_\Omega v^2\, dx .$$

Rappelons, pour des raisons de complétude, la construction d'un λ qui permet de vérifier (1.4).

Soit

$$b = \sup_{l, x \in \Omega} | b_l(x) |$$

$$a = \sup_{x \in \Omega} | a_0(x) |$$

$$\int_\Omega \left(\sum_{ij=1}^N a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_j} + \sum_l b_l \frac{\partial u}{\partial x_l} u + a_0\, u^2 + \lambda u^2 \right) dx$$

$$\geqslant \alpha \int_\Omega \sum_i \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2 dx - b\sqrt{\varepsilon} \left(\int_\Omega \sum \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2 dx \right)^{1/2} \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \left(\int_\Omega u^2\, dx \right)^{1/2} + $$

$$+ (\lambda + a) \int_\Omega u^2\, dx$$

$$\geqslant \alpha \int_\Omega \sum_i \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2 dx - \frac{b\varepsilon}{2} \int_\Omega \sum \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2 dx - \frac{b}{2\varepsilon} \int_\Omega u^2\, dx + (\lambda + a) \int_\Omega u^2\, dx$$

$$\geqslant \left(\alpha - \varepsilon \frac{b}{2} \right) \int_\Omega \sum_i \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2 dx + \left(\lambda + a - \frac{b}{2\varepsilon} \right) \int_\Omega u^2\, dx .$$

On choisit alors $\varepsilon < \dfrac{2\alpha}{b}$ et $\lambda > -a + \dfrac{b}{2\varepsilon}$ si $b \neq 0$ ($\lambda > a$ autrement), ce qui entraîne la V-ellipticité de $a(u, v) + \lambda \int_\Omega uv\, dx$.

Remarque : Il serait intéressant de déterminer a priori des λ plus proches du λ_0 minimal.

Notation : On est conduit à définir la forme bilinéaire $b(\ ,\ )$ fortement coercive suivante :

$$(1.5) \qquad b(u, v) = a(u, v) + \int_\Omega \lambda uv \, dx \quad \forall u, v \in H^1(\Omega).$$

De plus, on considère :

(1.6) un second membre $f \in L^\infty(\Omega)$

(1.7) un obstacle $\psi \in W^{2,\infty}(\Omega) \dfrac{\partial \psi}{\partial \nu} \leqslant 0$.

Le problème continu

Soit u la solution de l'inéquation variationnelle suivante :

$$(1.8) \qquad \begin{cases} a(u, v - u) \geqslant (f, v - u) & v \leqslant \psi \quad v \in H^1(\Omega) \\ u \leqslant \psi . \end{cases}$$

Si l'obstacle ψ est suffisamment grand, les résultats qui seront proposés s'appliqueront trivialement au cas des équations à opérateur non coercif.

Par une transformation immédiate, u est également la solution du problème suivant :

Trouver u solution de :

$$(1.9) \qquad \begin{cases} b(u, v - u) \geqslant (f + \lambda u, v - u) & v \leqslant \psi \quad v \in H^1(\Omega) \\ u \leqslant \psi . \end{cases}$$

Il aurait été possible de considérer des conditions aux limites de type de Dirichlet en effectuant quelques modifications techniques de détail.

Notations complémentaires

(1.10) On note $w = \sigma(f + \lambda r)$ la solution de l'I.V. suivante :

$$\begin{cases} b(w, v - w) \geqslant (f + \lambda r, v - w) & v \leqslant \psi \quad v \in H^1(\Omega) \\ w \leqslant \psi . \end{cases}$$

(1.11) On a naturellement la relation suivante :

$$\mathfrak{J}(r) = \sigma(f + \lambda r).$$

(1.12) On note également la solution u de l'I.Q.V. comme suit :

$u = \partial(f, \psi)$ (second membre f, obstacle ψ).

Étudions quelques propriétés de la solution du problème (1.9) et commençons par introduire un algorithme.

Algorithme : On pose $\hat{u}_0$ la solution de :

$$(1.13) \quad a(\hat{u}_0, v) = (f, v) \quad v \in H^1(\Omega)$$

puis on définit $\check{C}$ tel que :

$$(1.14) \quad -\check{C} \leqslant \psi\,; \quad -\check{C} \leqslant \hat{u}_0\,; \quad f + a_0\,\check{C} \geqslant 0 \text{ p.p.}$$

En partant de $\hat{u}_0$ (resp. $\check{C} = \check{u}_0$), on pose :

$$(1.15) \quad \hat{u}_n = \mathfrak{J}(\hat{u}_{n-1})$$

$$(1.16) \quad \check{u}_n = \mathfrak{J}(\check{u}_{n-1})\,.$$

Existence et unicité d'une solution

Pour des raisons de complétude, rappelons quelques résultats immédiats.

LEMME 1.1 : *Sous les hypothèses* (1.1) *à* (1.7), *les suites* $(\hat{u}_n)$ *et* (u_n) *convergent respectivement en décroissant et en croissant vers l'unique solution du problème* (1.9).

Propriétés de monotonie de la solution

LEMME 1.2 : *Sous les hypothèses* (1.1) *à* (1.7) *si* $f \geqslant \hat{f}$ *et* $\psi \geqslant \hat{\psi}$ *alors* $\partial(f, \psi) \geqslant \partial(\tilde{f}, \tilde{\psi})$.

Démonstration : On associe à chacune de ces solutions d'I.Q.V. les suites $\hat{u}_n(f, \psi)$ (resp. $\hat{u}_n(\tilde{f}, \tilde{\psi})$) définies par l'algorithme (1.15). On montre sans peine par récurrence que $\hat{u}_n(f, \psi) \geqslant \hat{u}_n(\tilde{f}, \tilde{\psi})$, d'où le résultat.

C.Q.F.D.

Soit X l'ensemble des sous-solutions (pour l'I.Q.V.), c'est-à-dire l'ensemble des $w \in H^1(\Omega)$ tel que :

$$(1.17) \quad \begin{cases} b(w, v) \leqslant (f + \lambda w, v) & \forall v \in H^1 \quad v \geqslant 0 \\ w \leqslant \psi\,. \end{cases}$$

LEMME 1.3 : *Sous les hypothèses* (1.1) *à* (1.7), *la solution* u *de* (1.9) *est le plus grand élément de* X.

Démonstration : On a $u \leqslant \psi$. En prenant $\tilde{v} = u - v$ avec $v \geqslant 0$ on a :

$$b(u, v) \leqslant (f + \lambda u, v) \quad v \geqslant 0$$

donc :

$$u \in X\,.$$

Par ailleurs, soit $w \in X$:

$w \leqslant \sigma(f + \lambda w)$ car w est une sous-solution pour l'I.V. définie avec le second membre $f + \lambda w$.

Donc :

$$f + \lambda w \leqslant f + \lambda\sigma(f + \lambda w).$$

Soit :

$$w \leqslant \sigma(f + \lambda w) \leqslant \sigma(f + \lambda\sigma(f + \lambda w)).$$

Ainsi w est une sous-solution pour l'application $\mathfrak{J}$; de plus $\hat{u}_0$ est une sur-solution pour l'application $\mathfrak{J}$. Or $\mathfrak{J}$ est croissante pour l'ordre « naturel » et $w \leqslant \hat{u}_0$.

Ainsi :

$$w \leqslant \mathfrak{J}(w) \leqslant \cdots \leqslant \mathfrak{J}^n(w) \leqslant \cdots \leqslant \mathfrak{J}^n(\hat{u}_0) \leqslant \cdots \leqslant \mathfrak{J}(\hat{u}_0) \leqslant \hat{u}_0$$

d'où l'on en déduit d'après l'unicité :

$$w \leqslant \sup_n \mathfrak{J}^n(w) = u = \inf_n \mathfrak{J}^n(\hat{u}_0)$$

C.Q.F.D.

Régularité de la solution

LEMME 1.4 : *Sous les hypothèses* (1.1) *à* (1.7) *la solution u de l'*I.Q.V. *appartient à* $W^{2,p}$.

Démonstration : Appliquons l'inégalité de Lewy-Stampaccia à l'opérateur $\mathscr{B} = \mathscr{A} + \lambda\mathfrak{Z}$.

Donc :

$$\mathscr{B}\psi \wedge (f + \lambda u) \leqslant \mathscr{B}u \leqslant f + \lambda u$$

mais :

$$-\hat{C} \leqslant u \leqslant \hat{u}_0$$

donc :

$$\| u \|_L \leqslant \text{Cte}$$

ainsi :

$$\| \mathscr{B}u \|_\infty \leqslant \text{Cte}$$

d'où le résultat (*cf.* [4]).

C.Q.F.D.

Lipschitzianité par rapport au second membre

(1.18) Soient f et g deux seconds membres appartenant à $L^\infty(\Omega)$.

On introduit u et w les solutions des I.Q.V. suivantes :

(1.19) $u = \mathfrak{I}_f(u) = \sigma(f + \lambda u)$

(1.20) $w = \mathfrak{I}_g(w) = \sigma(g + \lambda w)$.

On va montrer que $\| u - w \|_\infty \leqslant \| f - g \|_\infty$.

LEMME 1.5 : *Sous les hypothèses* (1.1) *à* (1.7), *on peut se ramener au cas où* $f \geqslant g \geqslant 0$ *et* $\psi \geqslant 0$.

Démonstration : En considérant inf (g, f) et sup (g, f), on peut, grâce aux propriétés de monotonie de la solution de l'I.Q.V., supposer $f \geqslant g$.

Si on introduit K une constante telle que

$$K + f \geqslant \gamma_0 > 0 \quad \text{et} \quad K + g \geqslant \gamma_0 > 0 \quad \text{puis} \quad \psi + \mathcal{O} \geqslant 0$$

où $\mathcal{O}$ est la solution de : $\mathcal{O} = K$, on peut se ramener au cas où f, g sont des fonctions positives.

En effet :

$$u + \mathcal{O} = \partial(f + K ; \psi + \mathcal{O})$$

$$w + \mathcal{O} = \partial(g + K ; \psi + \mathcal{O})$$

mais alors :

$$\| u - w \|_\infty = \| u + \mathcal{O} - w - \mathcal{O} \|_\infty .$$

C.Q.F.D.

(1.21) On se place donc dans le cas où $f \geqslant g \geqslant 0$ et $\psi \geqslant 0$.

Définition :

(1.22) Soit N défini par $N\alpha_0 \geqslant 1$ (rappelons que $0 < \alpha_0 \leqslant a_0(x)$).

Notation :

(1.23) Soit ϕ la solution de l'équation suivante :

$$a(\phi, v) = \int_\Omega \tilde{C} v \, dx \quad \text{avec} \quad \tilde{C} = \| f - g \|_\infty .$$

LEMME 1.6 : *Sous les hypothèses* (1.1) *à* (1.7) *on a* $\| \phi \|_\infty \leqslant N\tilde{C}$.

Démonstration : D'après le lemme (1.1), il existe une solution unique à ce problème. Montrons que : $\phi \leqslant N\tilde{C}$.

On a trivialement :

$$a(N\tilde{C}, v) + \int_\Omega (1 - a_0) N\tilde{C} v \, dx = \int_\Omega N\tilde{C} v \, dx$$

$$a(N\tilde{C}, v) = \int_\Omega a_0 N\tilde{C} v \, dx$$

donc :

$$a(N\tilde{C} - \phi, v) = \int_\Omega (a_0 N\tilde{C} - \tilde{C}) v \, dx = \int_\Omega Dv \, dx$$

où :

$$D = a_0 N\tilde{C} - \tilde{C} \geqslant 0 \quad \text{d'après (1.22)}$$

donc $N\tilde{C} - \phi$ est la solution positive de l'équation, ainsi $\phi \leqslant N\tilde{C}$.
Comme $\tilde{C} \geqslant 0$, on a $\phi \geqslant 0$. Donc $\| \phi \|_\infty \leqslant N\tilde{C}$.

C.Q.F.D.

LEMME 1.7 : *Sous les hypothèses* (1.1) *à* (1.7), *on a* :

$$\| u - w \|_\infty \leqslant N\tilde{C} \quad où \quad \tilde{C} = \| f - g \|_\infty .$$

Démonstration : On peut se ramener au cas où $f \geqslant g \geqslant 0$ et $\psi \geqslant 0$.
Soient $u = \partial(f; \psi)$ et $w = \partial(g; \psi)$, on a sans difficulté :

$$u + \phi = \partial(f + \tilde{C}; \psi + \phi) \quad \text{où } \phi \text{ est défini en (1.23)}$$

d'après les propriétés de monotonie de la solution des I.V., on a :

$$u \leqslant w \leqslant u + \phi$$

donc :

$$\| u - w \|_\infty \leqslant \| \phi \|_\infty \leqslant N \| f - g \|_\infty .$$

C.Q.F.D.

Remarque : On sait également montrer (mais ce serait inutile pour notre propos) que :

$$\| \hat{u}_n - u \|_\infty \leqslant C\gamma^n \quad \text{et} \quad \| \check{u}_n - u \|_\infty \leqslant C\gamma^n \quad \text{avec} \quad \gamma \in]0, 1] .$$

II. ÉTUDE DU PROBLÈME DISCRET

On va maintenant introduire le problème discret et effectuer une étude similaire à celle entreprise précédemment pour le problème continu. Pour insister sur la *symétrie* de la démonstration que nous proposons, on suivra exactement la même démarche qu'au paragraphe précédent.

On établit sur Ω une triangulation régulière quasi uniforme et on introduit $\mathscr{V}_h$ l'espace d'éléments finis conformes suivant :

$$\mathscr{V}_h = \{ v_h \in \mathscr{C}(\overline{\Omega}) \cap H^1 \text{ tel que } v_h |_T \in P_1 \} . \tag{2.1}$$

Les fonctions φ_i, $i = (1, ..., m(h))$ seront les fonctions de base usuelles définies par : $\varphi_i(M_j) = \delta_{ij}$ où M_j est un sommet de la triangulation. On s'est ramené au cas où Ω est un polygone convexe.

L'opérateur de restriction sera :

$$\text{pour} \quad v \in \mathscr{C}(\overline{\Omega}) \cap H^1 \quad r_h\, v(x) = \sum_{i=1}^{m(h)} v(M_i)\, \varphi_i(x) . \tag{2.2}$$

Le problème discret

Soit u_h la solution de l'inéquation variationnelle suivante :

$$\begin{cases} a(u_h, v_h - u_h) \geqslant (f, v_h - u_h) & v_h \leqslant r_h \psi \\ u_h \leqslant r_h \psi . \end{cases} \tag{2.3}$$

On pourrait sans grandes difficultés supplémentaires introduire une approximation de la forme bilinéaire $a(\ ,\ )$ et prendre ainsi en compte des méthodes d'intégration numérique.

Bien évidemment, u_h est également la solution de l'I.Q.V. discrète suivante :

$$\begin{cases} b(u_h, v_h - u_h) \geqslant (f + \lambda u_h, v_h - u_h) & v_h \leqslant r_h \psi \\ u_h \leqslant r_h \psi \end{cases} \tag{2.4}$$

avec :

$$b(u_h, v_h) = a(u_h, v_h) + \int_\Omega \lambda u_h\, v_h\, dx . \tag{2.5}$$

Notation : Soit $w_h = \sigma_h(g)$ la solution de l'I.V. suivante :

$$\begin{cases} b(w_h, v_h - w_h) \geqslant (g, v_h - w_h) & v_h \leqslant r_h \psi \\ w_h \leqslant r_h \psi . \end{cases} \tag{2.6}$$

(2.7) On notera également la solution u_h de l'I.Q.V. par :

$$u_h = \partial_h(f; \psi).$$

Introduisons maintenant un algorithme.

Algorithme : On pose $\hat{u}_{0h}$ la solution de :

$$a(\hat{u}_{0h}, v_h) = (f, v_h) \quad v_h \in \mathscr{V}_h \tag{2.8}$$

puis en reprenant la constante $\check{C}$ définie en (1.16), on définit à partir de $\hat{u}_{0h}$ (resp. $\check{C} = \check{u}_{0h}$) les suites $\hat{u}_{nh}$ et $\check{u}_{nh}$ par :

$$\hat{u}_{nh} = \mathfrak{J}_h(\hat{u}_{n-1h}) \tag{2.9}$$

$$\check{u}_{nh} = \mathfrak{J}_h(\check{u}_{n-1h}). \tag{2.10}$$

Hypothèse du principe du maximum discret

On pose B la matrice définie par :

$$B_{ij} = a(\varphi_i, \varphi_j) + \int_\Omega \lambda \varphi_i \varphi_j \, dx. \tag{2.11}$$

(2.12) On suppose que B est une M-matrice (ce qui est vérifié sous les hypothèses usuelles (*cf.* [7]) puisque l'opérateur $\mathscr{A} + \lambda\mathfrak{J}$ est fortement coercif).

Existence et unicité d'une solution

LEMME 2.1 : *Sous les hypothèses* (1.1) *à* (1.7), (2.12), *les suites* $(\hat{u}_{nh})$ *et* $(\check{u}_{nh})$ *convergent respectivement en décroissant et en croissant vers l'unique solution du problème* (2.4).

On reprend la démonstration du cas continu.

Propriété de monotonie de la solution

LEMME 2.2 : *Sous les hypothèses* (1.1) *à* (1.7), (2.12), *si* $f \geqslant \tilde{f}$ *et* $\psi \geqslant \tilde{\psi}$ *alors* $\partial_h(f; \psi) \geqslant \partial_h(\tilde{f}; \tilde{\psi})$.

Démonstration : On associe à chacune de ces solutions d'I.Q.V. les suites $\hat{u}_h(f; \psi)$ (resp. $\hat{u}_h(\tilde{f}; \tilde{\psi})$) par l'algorithme défini en (2.9). On montre sans peine en comparant les seconds membres et les obstacles que $\hat{u}_h(f; \psi) \geqslant \hat{u}_h(\tilde{f}; \tilde{\psi})$ d'où le résultat.

C.Q.F.D.

Soit X_h l'ensemble des sous-solutions (pour l'I.Q.V. discrète) c'est-à-dire l'ensemble des $w_h \in \mathcal{V}_h$ tel que :

$$(2.13) \quad \begin{cases} b(w_h, \varphi_i) \leqslant (f + \lambda w_h, \varphi_i) & \forall i \in (1, \dots, m(h)) \\ w_h \leqslant r_h \psi . \end{cases}$$

LEMME 2.3 : *Sous les hypothèses* (1.1) *à* (1.7), (2.12), *la solution* u_h *de l'*I.Q.V. *est le plus grand élément de* X_h.

Démonstration : On a $u_h \leqslant r_h \psi$ et en prenant $v_h = u_h - \varphi_i$ on a :

$$b(u_h, \varphi_i) \leqslant (f + \lambda u_h, \varphi_i)$$

donc : $u_h \in X_h$.

D'autre part, soit $w_h \in X_h . w_h \leqslant \sigma_h(f + \lambda w_h)$ car w_h est une sous-solution pour l'I.Q.V. discrète définie avec le second membre $f + \lambda w_h$.

Donc :

$$f + \lambda w_h \leqslant f + \lambda \sigma_h(f + \lambda w_h) .$$

Soit :

$$w_h \leqslant \sigma_h(f + \lambda w_h) \leqslant \sigma_h(f + \lambda \sigma_h(f + \lambda w_h)) .$$

Ainsi w_h est une sous-solution pour l'algorithme défini en (2.10).

De plus :

$$w_h \leqslant \hat{u}_{0h} \quad \text{donc} \quad \sigma_h(f + \lambda w_h) \leqslant \sigma_h(f + \lambda \hat{u}_{0h}) = \hat{u}_{1h}$$

et

$$\sigma_h(f + \lambda \sigma_h(f + \lambda w_h)) \leqslant \sigma_h(f + \lambda \sigma_h(f + \lambda \hat{u}_{0h})) = \hat{u}_{2h}$$

donc (par récurrence) $w_h \leqslant u_h$.

C.Q.F.D.

Lipschitzianité par rapport au second membre

(2.14) Soient deux seconds membres f et $g \in L^\infty(\Omega)$.

On introduit u_h et w_h les solutions des I.Q.V. suivantes :

(2.15) $u_h = \partial_h(f; \psi)$

(2.16) $w_h = \partial_h(g; \psi)$.

Notation : Soit ϕ_h la solution de l'équation suivante :

(2.17) $$a(\phi_h, v_h) = \int_\Omega \tilde{C} v_h \, dx \quad \tilde{C} = \| f - g \|_\infty .$$

(2.18) Soit N définie par : $N\alpha_0 \geqslant 1$ (rappelons que $0 < \alpha_0 \leqslant a_0(x)$).

LEMME 2.4 : *Sous les hypothèses* (1.1) *à* (1.7), (2.12), *on a* :

$$\| u_h - w_h \| \leqslant N\tilde{C} \quad \text{où} \quad \tilde{C} = \| f - g \|_\infty .$$

La démonstration est exactement celle du cas continu. On montre donc que l'on peut se ramener au cas où $f \geqslant g \geqslant 0$ et $\psi \geqslant 0$ puis que $\| \phi_h \|_\infty \leqslant NC$ avant de conclure.

Remarque : On peut montrer (mais ce serait inutile pour notre propos) que :

$$\| \hat{u}_{nh} - u_h \|_\infty \leqslant C\gamma^n \quad \text{et} \quad \| u_{nh} - u_h \|_\infty \leqslant C\gamma^n \quad \text{avec} \quad \gamma \in]0, 1] .$$

III. ÉTUDE DE L'APPROXIMATION

Avant d'aborder le résultat, il est intéressant d'introduire quelques notations.

Notations

(3.1) Soit $\bar{u}_h$ la solution du problème discret suivant :

$$\begin{cases} b(\bar{u}_h, v_h - \bar{u}_h) \geqslant (f + \lambda u, v_h - \bar{u}_h) & v_h \leqslant r_h \psi \\ u_h \leqslant r_h \psi \end{cases}$$

u étant la solution de l'I.Q.V. continue.

(3.2) Soit $\bar{u}^{(h)}$ la solution du problème continu suivant :

$$\begin{cases} b(\bar{u}^{(h)}, v - \bar{u}^{(h)}) \geqslant (f + \lambda u_h, v - \bar{u}^{(h)}) & v \leqslant \psi \\ \bar{u}^{(h)} \leqslant \psi \end{cases}$$

où u_h est la solution de l'I.Q.V. discrète.

THÉORÈME : *Sous les hypothèses* (1.1) *à* (1.7), (2.12), *on a* :

$$\| u - u_h \|_\infty \leqslant Ch^2 \mid \text{Log}\, h \mid^2$$

$$\| u - u_h \|_{W^{1,\infty}} \leqslant Ch \mid \text{Log}\, h \mid^2 .$$

La démonstration se décompose en trois parties.

Première partie : Construction d'une fonction discrète α_h « proche » de u qui vérifie $\alpha_h \leqslant u_h$. Comme $\bar{u}_h$ est solution d'une I.V., on a :

$$\begin{cases} b(\bar{u}_h, \varphi_i) \leqslant (f + \lambda u, \varphi_i) \\ \bar{u}_h \leqslant r_h \psi \end{cases}$$

donc :

$$b(\bar{u}_h, \varphi_i) \leqslant (f + \lambda u_h + \lambda \| u - \bar{u}_h \|_\infty, \varphi_i)$$

ainsi $\bar{u}_h$ appartient à X défini en (2.13) où f est remplacé par $\| u - \bar{u}_h \|_\infty$. Comme $u_h = \partial_h(f, \Psi)$ d'après le lemme (2.4), on a :

$$\bar{u}_h \leqslant u_h + Ch^2 \mid \operatorname{Log} h \mid^2 .$$

Posons :

$$\alpha_h = \bar{u}_h - Ch^2 \mid \operatorname{Log} h \mid^2 . \tag{3.3}$$

Alors α_h vérifie :

$$\alpha_h \leqslant u_h$$
$$\| \alpha_h - u \|_\infty \leqslant Ch^2 \mid \operatorname{Log} h \mid^2 .$$

Deuxième partie : Construisons un $\beta^{(h)}$ « proche » de u_h qui vérifie $\beta^{(h)} \leqslant u$. Comme $\bar{u}^{(h)}$ est solution d'une I.V., pour tout v positif dans $H^1(\Omega)$, on a :

$$b(\bar{u}^{(h)}, v) \leqslant (f + \lambda u_h, v)$$

donc :

$$\begin{cases} b(\bar{u}^{(h)}, v) \leqslant (f + \lambda \| \bar{u}^{(h)} - u_h \|_\infty + \lambda \bar{u}^{(h)}, v) \\ \bar{u}^{(h)} \leqslant \psi . \end{cases}$$

Ainsi :

$\bar{u}^{(h)} \in X$ défini en (1.17) où f devient $f + \lambda \| \bar{u}^{(h)} - u_h \|_\infty$ et d'après le lemme (1.3)

$$\bar{u}^{(h)} \leqslant \partial(f + \lambda \| \bar{u}^{(h)} - u_h \|_\infty ; \psi) .$$

Donc, en utilisant la lipschitzianité de $\partial(\ )$ par rapport aux seconds membres et le fait que par définition $u = \partial(f ; \psi)$ on a, en considérant les résultats de [10] :

$$\bar{u}^{(h)} - Ch^2 \mid \operatorname{Log} h \mid^2 \leqslant u .$$

On pose alors :

$$(3.4) \qquad \beta^{(h)} = \bar{u}^{(h)} - Ch^2 \,|\, \mathrm{Log}\, h \,|^2 .$$

Troisième partie : Concluons comme suit :

$$\begin{aligned} u &\leqslant \alpha_h + Ch^2 \,|\, \mathrm{Log}\, h \,|^2 \\ &\leqslant u_h + Ch^2 \,|\, \mathrm{Log}\, h \,|^2 \\ &\leqslant \beta^{(o)} + Ch^2 \,|\, \mathrm{Log}\, h \,|^2 \\ &\leqslant u + Ch^2 \,|\, \mathrm{Log}\, h \,|^2 . \end{aligned}$$

Donc :

$$\| u - u_h \|_\infty \leqslant Ch^2 \,|\, \mathrm{Log}\, h \,|^2$$

et par propriété inverse :

$$\| u - u_h \|_{W^{1,\infty}} \leqslant Ch \,|\, \mathrm{Log}\, h \,|^2 .$$

Approximation de la zone de contact

On pose :

$$S = \{ x \in \Omega \text{ tel que } u(x) = \psi(x) \}$$

$$S_h = \{ x \in \Omega \text{ tel que } u_h(x) < r_h \, \psi(x) - \xi(h) \}$$

où l'on suppose :

$$\lim_{h \to 0} \frac{\xi(h)}{Ch^2 \,|\, \mathrm{Log}\, h \,|} = 0 .$$

Alors, pour h assez petit $S_h \subset S$ et $\lim_{h \to 0} S_h = S$ au sens des ensembles. On peut adapter le résultat récent de [18] et établir que la convergence de la frontière libre discrète vers la frontière libre continue est approximativement en 0(4) sous des hypothèses convenables (*cf.* [18]).

Expérimentation numérique

On considère $\Omega =]0, 1[\times]0, 1[$ discrétisé de manière usuelle :

un second membre $f = \sin(\Pi x) \times \sin(2\,\Pi y) \times \sin(\Pi(x + y))$

un obstacle $\Psi = 0$

l'opérateur $- \Delta u - 0{,}1 \dfrac{\partial u}{\partial y} + C \dfrac{\partial u}{\partial x} + 2\,u .$

1) *Détermination de l'ordre de convergence*

On a considéré successivement le cas $h_0 = \dfrac{1}{10}, h_1 = \dfrac{1}{20}, h_2 = \dfrac{1}{40}$.

C	λ	Ordre de convergence
50	0 1	Divergence 2,1034
200	0 ou 4 10	Divergence 0,93124

2) *Dépendance par rapport au paramètre de relaxation*

On a résolu l'inéquation variationnelle discrète par une méthode de relaxation-projection $h = \frac{1}{24}$, $C = 200$.

ω	$\lambda = 8$	$\lambda = 12$
1 1	127	175
1,05	127	176
1,1	127	177
1,2	130	179
1,4	diverge	diverge

3) *Choix de la stratégie*

On résout généralement le problème (2.6) par l'intermédiaire de la suite d'I.V. définie par l'algorithme (2.9). On a pu établir dans [15] que l'on pouvait également utiliser des stratégies plus souples et changer à tout moment le second membre en utilisant les résultats intermédiaires calculés.

$$h = \frac{1}{24} \quad C = 200 \quad \omega = 1 .$$

λ	I.V.		Changement toutes les 3 itérations		Changement à chaque itération
	Nombre d'itérations	Nombre d'I.V.	Nombre d'itérations	Nombre de changement	
8	369	45	127	45	69
10	316	54	152	54	78
20	413	96	271	96	124
40	676	186	509	182	213

Autres applications de la méthode :

1) Nous pouvons considérer, comme dans [10] des opérateurs non linéaires et des obstacles moins réguliers. On obtiendra alors l'ordre d'approximation

de l'équation associée à l'opérateur et à la régularité de la solution de l'I.V. La prise en compte d'autres conditions aux limites (Dirichlet, mixte), se fera comme dans [10].

2) Après transformation, le problème s'écrit :

Trouver u solution de :

$$\begin{cases} b(u, v-u) \geqslant (f+\lambda u, v-u) & v \leqslant \psi \quad v \in H^1 \\ u \leqslant \psi . \end{cases}$$

Le second membre dépend donc linéairement de la solution. On peut également considérer des seconds membres dépendant non linéairement de u.

L'exemple suivant (*cf.* [21]) est issu d'un problème de cinétique chimique :

Trouver u_λ solution de :

$$\begin{cases} b(u_\lambda, v-u_\lambda) \geqslant \lambda(e^{u_\lambda}, v-u_\lambda) & v \leqslant \psi \quad v \in H_0^1(\Omega) \\ u_\lambda \leqslant \psi . \end{cases}$$

Il n'y a plus unicité de la solution. Pourtant les idées introduites précédemment s'appliquent avec succès à ce problème de bifurcation non linéaire.

On peut également prendre en compte des seconds membres de la forme $f(u)$ où f est une fonction croissante, régulière, telle que $0 < f(0)$.

3) Dans [22], nous étudions, grâce à cette approche, l'analyse numérique de l'équation de Hamilton-Jacobi-Bellman : trouver u solution de $\operatorname{Max}_n (G_n - f_n) = 0$.

4) On peut montrer sans l'hypothèse du principe du maximum discret que la solution u_n d'une I.V. discrète à opérateur coercif est quasiment la plus grande sous-solution discrète. L'obtention de ce résultat s'appuie sur une notion de « régularité discrète » (*cf.* [19]). On en déduit alors que $u \leqslant u_h + Ch^2 \,|\operatorname{Log} h\,|^2$.

Retour sur le problème initial :

En s'appuyant sur la notion d'application a-contractante, nous reprenons dans [23] l'étude du problème initial. Nous pouvons alors unifier l'étude des différents aspects de l'analyse numérique : erreur d'approximation, convergence des algorithmes de résolution, erreurs d'arrondi dues à la représentation des nombres en machine. Nous obtenons également un résultat sur la convergence de la méthode des sous-domaines.