Modélisation mathématique et analyse numérique

Michel Fortin
André Fortin

Une note sur les méthodes de caractéristiques et de Lesaint-Raviart pour les problèmes hyperboliques stationnaires

Modélisation mathématique et analyse numérique, tome 23, nº 4 (1989), p. 593-596
<http://www.numdam.org/item?id=M2AN_1989__23_4_593_0>

MATHEMATICAL MODELLING AND NUMERICAL ANALYSIS
MODELISATION MATHÉMATIQUE ET ANALYSE NUMÉRIQUE
(Vol. 23, n° 4, 1989, p. 593-596)

UNE NOTE SUR LES MÉTHODES DE CARACTÉRISTIQUES ET DE LESAINT-RAVIART POUR LES PROBLÈMES HYPERBOLIQUES STATIONNAIRES

Michel FORTIN (1) et André FORTIN (2)

Communiqué par R TEMAM

Resumé. — *Nous montrons que dans le cas des problèmes hyperboliques stationnaires, la méthode de Lesaint et Raviart peut être considérée comme un cas limite d'une méthode de caractéristiques introduite par Bermudez et Durany*

Abstract. — *We show that the Lesaint-Raviart method is a limiting case of a characteristic method introduced by Bermudez and Durany when applied to stationary hyperbolic problems*

1. INTRODUCTION

La résolution numérique des problèmes hyperboliques par la méthode des éléments finis présente un très grand intérêt pratique comme le démontre la grande quantité d'études publiées sur le sujet. Parmi les nombreuses méthodes qui ont été développées pour ce type de problèmes, certaines possèdent la propriété enviable de permettre la résolution du problème élément par élément. Cela est rendu possible par l'utilisation d'approximations discontinues de la variable à discrétiser. Dans cette catégorie, on compte principalement les méthodes de caractéristiques sous la forme développée par Benqué et Ronat [1] et celle de Lesaint-Raviart [2]. Nous nous proposons de montrer que la méthode de Lesaint et Raviart est un cas limite de la méthode des caractéristiques lorsque cette dernière est appliquée aux problèmes hyperboliques stationnaires.

(*) Reçu en juin 1988, révisé en juillet 1988.
(1) Département de mathématiques, et statistique, Université Laval, Québec, Canada, G1K 7P4.
(2) Groupe MIAO, Département de mathématiques appliquées, Ecole polytechnique de Montreal, C P 6079, Succursale A, Montréal, Canada, H3C 3A7

2. APPLICATION AUX PROBLÈMES HYPERBOLIQUES STATIONNAIRES

La méthode des caractéristiques est très efficace pour le traitement des problèmes hyperboliques instationnaires. Cependant dans le cas stationnaire, on peut se demander ce qu'il advient de cette méthode. D'autre part, malgré des développements théoriques très poussés (voir [3] par exemple) et des résultats numériques probants, l'introduction de la méthode de Lesaint et Raviart reste difficile à justifier dans le cadre d'un développement mathématique standard. Suivant une idée introduite récemment par Bermudez et Durany [4], nous allons appliquer la méthode des caractéristiques au problème stationnaire suivant :

$$\begin{aligned} u \,.\, \nabla T &= f \quad \text{dans } \Omega \,, \\ T &= g \quad \text{sur } \Gamma_0 \,, \end{aligned} \tag{1}$$

où u est un champ de vecteurs supposé connu et Γ_0 est la partie entrante de la frontière Γ du domaine Ω. Suivant [4], on remplace l'équation (1) par

$$\begin{aligned} \frac{T^k(x) - T^k(X^k(x))}{k} &= f \quad \text{dans } \Omega \,, \\ T^k(x) &= g \quad \text{sur } \Gamma_0 \,, \end{aligned} \tag{2}$$

où l'indice k exprime la dépendance de la solution par rapport au paramètre k (pseudo pas de temps). La caractéristique $S(x, t\,;\tau)$ est définie par le problème de Cauchy

$$\begin{aligned} \frac{dS}{d\tau} &= u(S) \,, \\ S(x, t\,;\tau) &= x \,, \end{aligned} \tag{3}$$

et on pose également

$$X^k(x) = S(x, t\,; t - k) \,.$$

La formulation variationnelle associée à (2) sera alors :

$$\int_\Omega \frac{(T^k(x) - T^k(X^k(x)))}{k}\, v \, dx = \int_\Omega f v \, dx \,. \tag{4}$$

On remarque immédiatement que (4) est une adaptation au cas stationnaire de la formulation obtenue par Benqué-Ronat [1]. Utilisant une approximation discontinue de T, on peut alors choisir une fonction test v s'annulant identiquement à l'extérieur de l'élément courant K et résoudre (4) élément par élément en suivant une stratégie de parcours du domaine Ω analogue à celle décrite dans [2] pour la méthode de Lesaint et Raviart. Notons que le domaine d'intégration dans (4) se réduit alors à l'élément courant K.

Pour le même problème, la méthode de Lesaint-Raviart consiste à résoudre sur chaque élément K de la triangulation :

$$(5) \qquad \int_K (u \,.\, \nabla T)\, v \, dx + \int_{\Gamma_{\text{ent}}} (u \,.\, n)[T]\, v \, ds = \int_K fv \, dx$$

où la variable T est ici encore approximée par des fonctions discontinues d'un élément à un autre et où Γ_{ent} désigne la partie entrante $(u \,.\, n \leq 0)$ de la frontière de K. La terme $[T]$ désigne le saut de la variable T à travers la frontière Γ_{ent} i.e.

$$[T] = T(\text{extérieur de } K) - T(\text{intérieur de } K)\,.$$

Nous allons montrer que (5) est le cas limite de (4) lorsque k tend vers 0. Il est à remarquer qu'il est possible d'utiliser la méthode de Lesaint-Raviart dans le cas de l'équation de convection-diffusion via une méthode mixte et que le raisonnement qui suit reste valable.

Supposons donc le cas simple de la figure 1 où seule une face F_1 est éclairée et on considère le premier terme de (4) i.e.

$$\int_K \frac{(T^k(x) - T^k(X^k(x)))\, v}{k} \, dx$$

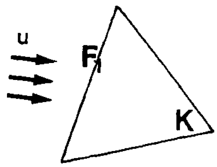

Figure 1.

On divise l'élément K en 2 régions K_1 et K_2 où K_1 ne contient que les points x de K pour lesquels la caractéristique issue de x reste à l'intérieur de K. Les points de K_2 ont une caractéristique qui franchit la face F_1. On a alors la situation de la figure 2.

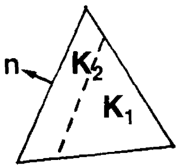

Figure 2.

Si on suppose pour simplifier que u est constant le long de F_1, la région K_2 se réduit à une bande de largeur

$$\varepsilon = -(u \,.\, n)\, k \tag{6}$$

On a alors

$$\lim_{k \to 0} \int_K \frac{(T^k(x) - T^k(X^k(x)))}{k}\, v\, dx = \lim_{k \to 0} \int_{K_1} + \int_{K_2}$$

D'une part, l'integrale sur K_1 devient

$$\lim_{k \to 0} \int_{K_1} \frac{(T^k(x) - T^k(X^k(x)))\, v}{k}\, dx = \tag{7}$$

$$= \lim_{k \to 0} \int_{K_1} \left(\frac{\partial T}{\partial u} + O(k) \right) v\, dx = \int_K (u \,.\, \nabla T)\, v\, dx$$

D'autre part, l'intégrale sur K_2 dégénere en une intégrale curviligne puisque l'elément d'aire dx devient

$$dx = -(u \,.\, n)\, k\, ds$$

et on obtient

$$\lim_{k \to 0} \int_{K_2} \frac{(T^k(x) - T^k(X^k(x)))}{k}\, v\, dx = \int_{F_1} (u \,.\, n)[T]\, v\, ds \tag{8}$$

En regroupant (7) et (8), on retrouve la méthode de Lesaint-Raviart

Nous avons ainsi une interprétation très simple de la méthode de Lesaint et Raviart comme étant un cas limite de la méthode des caractéristiques

3. REFERENCES

[1] J P Benque, J Ronat, *Quelques difficultes des modeles numeriques en hydraulique,* Fifth Int Symposium on Computing Methods in Applied Sciences and Engineering, Versailles, Rapport E D F E/41/82/03

[2] P Lesaint, P A Raviart, « On a Finite Element Method for Solving the Neutron Transport Equations », dans *Mathematical Aspects of Finite Elements in Partial Differential Equations* (C de Boor Ed), pp 89-123, Academic Press (1974)

[3] C Johnson, U Navert, J Pitkaranta, *Finite Element Methods for Linear Hyperbolic Problems,* Comp Meth Appl Mech Eng , 45, pp 285-312 (1984)

[4] A Bermudez, J Durany, *La méthode des caractéristiques pour les problemes de convection-diffusion stationnaires,* M²AN, vol 21, n° 1, pp 7-26 (1987)