MODÉLISATION MATHÉMATIQUE ET ANALYSE NUMÉRIQUE

HERVÉ LE FERRAND

Une généralisation au cas vectoriel du procédé Δ^2 d'Aitken et les suites à comportement linéaire

Modélisation mathématique et analyse numérique, tome 29, nº 1 (1995), p. 53-62

<http://www.numdam.org/item?id=M2AN_1995__29_1_53_0>

MATHEMATICAL MODELLING AND NUMERICAL ANALYSIS
MODÉLISATION MATHÉMATIQUE ET ANALYSE NUMÉRIQUE

(Vol 29, n° 1, 1995, p 53 à 62)

UNE GÉNÉRALISATION AU CAS VECTORIEL DU PROCÉDÉ Δ^2 D'AITKEN ET LES SUITES À COMPORTEMENT LINÉAIRE (*)

par Hervé LE FERRAND [1].

Communiqué par P-J LAURENT

Abstract — *We deal with vector sequences which behave linearly in the Nievergelt's sense. We prove that a generalization of the Δ^2 Aitken's process to the vector case accelerates the convergence of the sequences which converge λI linearly*

Résumé — *Après des considérations sur les suites à comportement linéaire au sens de Nievergelt, on montre qu'une généralisation au cas vectoriel du procédé Δ^2 d'Aitken accélère la convergence des suites qui convergent λI linéairement*

INTRODUCTION

Dans cet article, nous nous intéressons à une généralisation au cas multidimensionnel du procédé Δ^2 d'Aitken. Plus précisément, il s'agit de la transformation correspondant à la deuxième colonne de l'epsilon algorithme vectoriel. Cette transformation est notée ε_2. Nous rappelons sa définition au début du paragraphe 2. L'epsilon algorithme vectoriel a été introduit par Wynn [10] dans les années soixante. Si l'epsilon algorithme vectoriel admet dans la pratique de nombreuses applications [2, 3], il existe encore peu de résultats théoriques sur ce procédé. On peut mentionner toutefois le travail récent de Salam [9] qui a montré que cet algorithme peut s'écrire comme le rapport de deux désignants.

Par ailleurs, Nievergelt a introduit dans [7] la notion de comportement linéaire pour des suites vectorielles, notion qui généralise naturellement celle des suites scalaires. Nous allons appliquer la transformation $\varepsilon_2 : (S_n) \mapsto (\varepsilon_2^{(n)})$ à de telles suites. Nous ferons au préalable quelques remarques sur cette notion. Nous démontrerons ensuite un résultat nouveau

(*) Manuscrit reçu le 12 décembre 1993 et sous forme révisée le 13 avril 1994
[1] Laboratoire d'Analyse appliquée et d'Optimisation UFR des Sciences et Techniques, Université de Bourgogne, BP 138, 21004 Dijon Cedex, France

d'accélération de convergence pour une large classe de suites qui contient des suites vectorielles générées linéairement et des suites issues de la méthode des approximations successives pour la recherche de points fixes

Dans ce papier on travaille dans $\mathbb{R}^p$ Le produit scalaire canonique est noté $(,)$ et la norme associée $\| \quad \|$

1. SUITES VECTORIELLES AU COMPORTEMENT LINEAIRE

1.1. Brezinski a montré dans [1] p 142-143, que la transformation ε_2 accélère la convergence des suites (S_n) $(S_n \in \mathbb{R}^p)$ vérifiant les hypothèses suivantes

$$(H)\begin{cases} \bullet \text{ il existe une suite } (e_n) \text{ dans } \mathbb{R}^p \text{ qui converge vers zéro} \\ \bullet \text{ il existe } y \in \mathbb{R}^p, y \neq 0, \text{ et } \lambda \in \mathbb{R} \text{ tel que } 0 < \lambda < 1 \\ \bullet\ S_n - S = \lambda^n(y + e_n) \text{ pour tout } n \text{ à partir d'un certain rang} \end{cases}$$

Les vecteurs $S_n - S$ ne sont pas nécessairement colinéaires Remarquons alors que l'on a

$$\lim_{n \to \infty} \frac{(S_{n+1} - S) - \lambda(S_n - S)}{\|S_n - S\|} = \lim_{n \to \infty} \frac{\lambda(e_{n+1} + e_n)}{\|y + e_n\|} = 0$$

On a aussi

$$\lim_{n \to \infty} \frac{S_n - S}{\|S_n - S\|} = \frac{y}{\|y\|}$$

La suite (S_n) converge donc λI-linéairement au sens de Niervergelt, à savoir

$$\lim_{n \to \infty} \frac{(S_{n+1} - S) - \lambda(S_n - S)}{\|S_n - S\|} = 0$$

Cependant, une suite (X_n) de $\mathbb{R}^p$ peut très bien converger linéairement vers un vecteur X de $\mathbb{R}^p$ sans que $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{X_n - X}{\|X_n - X\|}$ existe Il suffit de considérer la suite $X_n = \left(\dfrac{\cos\sqrt{n}}{2^n}, \dfrac{\sin\sqrt{n}}{2^n}\right)$ X_n tend vers 0,

$$\frac{X_{n+1} - \frac{1}{2}X_n}{\|X_n\|} = \frac{1}{2}(\cos\sqrt{n+1} - \cos\sqrt{n}, \sin\sqrt{n+1} - \sin\sqrt{n})$$

$$= \left(-\sin\frac{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}{2}\sin\frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{2},\right.$$

$$\left.\cos\frac{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}{2}\sin\frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{2}\right)$$

Or comme

$$\sin \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{2} = \sin\left(\frac{1}{2(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}\right),$$

on en déduit que $\lim_{n \to \infty} \dfrac{X_{n+1} - \frac{1}{2} X_n}{\|X_n\|} = 0$. Cependant $\dfrac{X_n}{\|X_n\|} = (\cos\sqrt{n}, \sin\sqrt{n})$ n'a pas de limite.

Pour généraliser le résultat d'accélération donné au début du paragraphe, on va considérer la définition suivante

1.2. Définition [7]

On dira que la suite (S_n) de $\mathbb{R}^p$ (ou $\mathbb{C}^p$) se comporte linéairement vers un point S de $\mathbb{R}^p$ (ou $\mathbb{C}^p$) si .

a) il existe $K \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq K \quad S_n \neq S$

b) il existe une matrice carrée A, $p \times p$, telle que $I - A$ soit inversible et

$$\lim_{n \to \infty} \frac{(S_{n+1} - S) - A(S_n - S)}{\|S_n - S\|} = 0 .$$

Remarques .

a) La suite (S_n) n'est pas nécessairement convergente.

b) Soit A une matrice carrée $p \times p$ telle que $I - A$ soit inversible. Considérons la suite générée de la façon suivante :

$$S_{n+1} = AS_n + b .$$

Si S est la solution du système $X = AX + b$, on a :

$$(S_{n+1} - S) - A(S_n - S) = 0 .$$

La suite (S_n) se comporte donc A linéairement.

D'autre part, notons $\lambda_1, \ \ , \lambda_p$ les valeurs propres de A Supposons que l'on ait $|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq .. \geq |\lambda_p|$. On a alors [1] p. 143 : $S_n - S = \lambda_1^n(y_1 + e_n)$ ($y_1 \neq 0$ vecteur propre associé à λ_1) avec $e_n \to 0$ quand $n \to \infty$. Ceci vient de la décomposition spectrale de A [5]. On en déduit :

$$\lim_{n \to \infty} \frac{(S_{n+1} - S) - \lambda_1(S_n - S)}{\|S_n - S\|} = 0 .$$

Sur cet exemple, on voit que la matrice A de la définition n'est pas nécessairement unique d'une part, et d'autre part (S_n) ne converge pas nécessairement vers S (il faudrait $(|\lambda_1| < 1)$.

c) Considérons une suite (S_n) vérifiant la relation suivante :

$$(*)\ S_{n+1} - S = (A + A_n)(S_n - S) \quad \text{avec} \quad \lim_{n \to \infty} A_n = 0$$

(A_n étant une matrice $p \times p$). On a

$$\frac{(S_{n+1} - S) - A(S_n - S)}{\|S_n - S\|} = A_n \frac{S_n - S}{\|S_n - S\|}$$

(donc) $$\lim_{n \to \infty} \frac{(S_{n+1} - S) - A(S_n - S)}{\|S_n - S\|} = 0 .$$

Ainsi la suite (S_n) se comporte A-linéairement.
Réciproquement, supposons que la suite (S_n) se comporte A-linéairement vers S. Notons u_n le vecteur

$$\frac{(S_{n+1} - S) - A(S_n - S)}{\|S_n - S\|} .$$

Soit $(e_1, \ldots, e_p)$ la base canonique de $\mathbb{R}^p$. Posons

$$A_n = \left(\left(e_1, \frac{S_n - S}{\|S_n - S\|}\right) u_n, \ldots, \left(e_p, \frac{S_n - S}{\|S_n - S\|}\right) u_n\right)$$

la matrice dont le i-ième vecteur colonne est $\left(e_i, \frac{S_n - S}{\|S_n - S\|}\right) u_n$. La suite (A_n) tend vers 0. Calculons $A_n(S_n - S)$:

$$A_n(S_n - S) = \sum_{i=1}^{p} \frac{(e_i, S_n - S)^2}{\|S_n - S\|} u_n = \|S_n - S\|\ u_n .$$

Or comme $S_{n+1} - S = A(S_n - S) + \|S_n - S\|\ u_n$, on obtient $S_{n+1} - S = (A + A_n)(S_n - S)$. On a donc équivalence entre les deux notions. Dans la suite nous conserverons la présentation de Nievergelt.

Nous allons à présent nous intéresser à une généralisation au cas vectoriel du procédé Δ^2 d'Aitken et montrer un résultat d'accélération de convergence pour certaines suites à comportement linéaire.

2. ACCÉLÉRATION DE LA CONVERGENCE

2.1. Dans $\mathbb{R}^p$, si y est un vecteur non nul, on note y^{-1} le vecteur $\dfrac{y}{(y, y)}$.

Soit (S_n) une suite d'éléments de $\mathbb{R}^p$, on considère la transformation suivante [1, 9] :

$$\varepsilon_2 : (S_n) \mapsto (\varepsilon_2^{(n)}), \varepsilon_2^{(n)} = S_{n+1} + (\Delta\varepsilon_1^{(n)})^{-1}$$

(où)
$$\Delta\varepsilon_1^{(n)} = \frac{\Delta S_{n+1}}{\|\Delta S_{n+1}\|^2} - \frac{\Delta S_n}{\|\Delta S_n\|^2}.$$

Un calcul simple donne :

$$\|\Delta\varepsilon_1^{(n)}\|^2 = \|\Delta S_n\|^{-2} \|\Delta S_{n+1}\|^{-2} \|\Delta^2 S_n\|^2$$

(le symbole Δ a ici la signification habituelle). On obtient ainsi l'égalité :

$$\varepsilon_2^{(n)} = S_{n+1} + \|\Delta^2 S_n\|^{-2}(\|\Delta S_n\|^2 \Delta S_{n+1} - \|\Delta S_{n+1}\|^2 \Delta S_n).$$

On a le résultat suivant.

LEMME : *Soit (S_k) une suite se comportant A-linéairement vers S, on a*

$$\frac{\varepsilon_2^{(k)} - S}{\|S_k - S\|} = \left[A + \frac{\|(A-I)v_k + o(1)\|^2}{\|(A-I)^2 v_k + o(1)\|^2} A(A-I) - \right.$$
$$\left. - \frac{\|A(A-I)v_k + o(1)\|^2}{\|(A-I)^2 v_k + o(1)\|^2}(A-I)\right] v_k + o(1)$$

(où)
$$v_k = \frac{S_k - S}{\|S_k - S\|}.$$

Preuve : On a $\dfrac{S_{k+1}-S}{\|S_k-S\|}=A\dfrac{S_k-S}{\|S_k-S\|}+o(1)$ Remarquons alors que $\dfrac{\|S_{k+1}-S\|}{\|S_k-S\|}$ est borné $\left(\dfrac{\|S_{k+1}-S\|}{\|S_k-S\|}\leqslant \|A\|+1\right)$.

Par ailleurs,on a :

$$\frac{\varepsilon_2^{(k)}-S}{\|S_k-S\|}=\frac{S_{k+1}-S}{\|S_k-S\|}+\|\Delta^2 S_k\|^{-2}\left(\|\Delta S_k\|^2\frac{\Delta S_{k+1}}{\|S_k-S\|}\right.$$

$$\left.-\|\Delta S_{k+1}\|^2\frac{\Delta S_k}{\|S_k-S\|}\right)$$

(Or) $$\frac{\Delta S_k}{\|S_k-S\|}=\frac{S_{k+1}-S_k}{\|S_k-S\|}=\frac{(S_{k+1}-S)+(S-S_k)}{\|S_k-S\|}$$

(soit) $$\frac{\Delta S_k}{\|S_k-S\|}=(A-I)\frac{S_k-S}{\|S_k-S\|}+o(1).$$

De plus

$$\frac{\Delta S_{k+1}}{\|S_k-S\|}=\frac{S_{k+2}-S_{k+1}}{\|S_k-S\|}=\frac{\|S_{k+1}-S_k\|}{\|S_k-S\|}\times\frac{S_{k+2}-S}{\|S_{k+1}-S\|}-\frac{S_{k+1}-S}{\|S_k-S\|}$$

et comme $\dfrac{S_{k+2}-S}{\|S_{k+1}-S\|}=A\dfrac{S_{k+1}-S}{\|S_{k+1}-S\|}+o(1)$, on obtient :

$$\frac{\Delta S_{k+1}}{\|S_k-S\|}=\frac{\|S_{k+1}-S_k\|}{\|S_k-S\|}\times\left(A\frac{S_{k+1}-S}{\|S_{k+1}-S\|}+o(1)\right)-A\frac{S_k-S}{\|S_k-S\|}+o(1).$$

Puisque $\dfrac{\|S_{k+1}-S\|}{\|S_k-S\|}$ est borné, il vient

$$\frac{\Delta S_{k+1}}{\|S_k-S\|}=A\frac{S_{k+1}-S}{\|S_k-S\|}-A\frac{S_k-S}{\|S_k-S\|}+o(1),$$

soit $$\frac{\Delta S_{k+1}}{\|S_k-S\|}=A(A-I)\frac{S_k-S}{\|S_k-S\|}+o(1).$$

On déduit de ces différentes égalités :

$$\frac{\Delta^2 S_k}{\|S_k-S\|}=\frac{\Delta S_{k+1}-\Delta S_k}{\|S_k-S\|}=(A-I)^2\frac{S_k-S}{\|S_k-S\|}+o(1),$$

d'où

$$\frac{\|\Delta S_k\|}{\|\Delta^2 S_k\|} = \frac{\|\Delta S_k\| / \|S_k - S\|}{\|\Delta^2 S_k\| / \|S_k - S\|} = \frac{\|(A - I)\, v_k + o(1)\|^2}{\|(A - I)^2\, v_k + o(1)\|^2} \tag{1}$$

et

$$\frac{\|\Delta S_{k+1}\|}{\|\Delta^2 S_k\|} = \frac{\|A(A - I)\, v_k + o(1)\|^2}{\|(A - I)^2\, v_k + o(1)\|^2} \quad \left(v_k = \frac{S_k - S}{\|S_k - S\|}\right). \tag{2}$$

On peut remarquer que toutes ces quantités sont bien définies. De plus les quantités (1) et (2) sont bornées car :

$$\|(A - I)\, v_k + o(1)\| \leqslant \|A - I\| + 1\,, \quad \|A(A - I)\, v_k + o(1)\|$$
$$\leqslant \|A(A - I)\| + 1$$

et

$$\|(A - I)^2\, v_k + o(1)\| \geqslant \frac{1}{2}\, \|(A - I)^{-1}\|^{-2}$$

(si B est inversible $\|Bx\| \geqslant \|x\| \div \|B^{-1}\|$.

En replaçant tout cela dans l'expression de $\dfrac{\varepsilon_2^{(k)} - S}{\|S_k - S\|}$ donnée au début de la preuve et on obtient le résultat du lemme. ■

2.2. Le cas $A = \lambda I$ ($\lambda \in \mathbb{R}$) avec $\lambda \neq 1$.

On peut donner le résultat suivant.

THÉORÈME 1 : *Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \neq 1$ et soit S_k une suite de $\mathbb{R}^p$ vérifiant :*
- *$S_k \neq S$ pour k assez grand*
- $\displaystyle\lim_{k \to \infty} \frac{(S_{k+1} - S) - \lambda(S_k - S)}{\|S_k - S\|} = 0\,.$

Alors on a :

$$\lim_{k \to \infty} \frac{\varepsilon_2^{(k)} - S}{\|S_k - S\|} = 0\,.$$

Preuve : On a

$$\lim_{k \to \infty} \|(\lambda - 1)\, v_k + o(1)\| = |\lambda - 1| \left(v_k = \frac{S_k - S}{\|S_k - S\|}\right).$$

En effet

$$\|(\lambda-1)v_k\| - o(1) \leqslant \|(\lambda-1)v_k + o(1)\| \leqslant \|(\lambda-1)v_k\| + o(1),$$

soit

$$|\lambda-1| - o(1) \leqslant \|(\lambda-1)v_k + o(1)\| \leqslant |\lambda-1| + o(1)$$

On montre de même que

$$\lim_{k\to\infty} \|\lambda(\lambda-1)v_k + o(1)\| = |\lambda(\lambda-1)|$$

et

$$\lim_{k\to\infty} \|(\lambda-1)^2 v_k + o(1)\| = (\lambda-1)^2 .$$

Comme $A = \lambda I$, on en déduit que

$$\lim_{k\to\infty}\left[A + \frac{\|(A-I)v_k + o(1)\|^2}{\|(A-I)^2 v_k + o(1)\|^2} A(A-I) - \frac{\|A(A-I)v_k + o(1)\|^2}{\|(A-I)^2 v_k + o(1)\|^2}(A-I)\right]$$

$$= \left(\lambda + \frac{(\lambda-1)^2}{(\lambda-1)^4}\lambda(\lambda-1) - \frac{\lambda^2(\lambda-1)^2}{(\lambda-1)^4}(\lambda-1)\right) I$$

$$= \left(\lambda + \frac{\lambda}{\lambda-1} - \frac{\lambda^2}{\lambda-1}\right) I$$

$$= \left(\frac{\lambda^2 - \lambda + \lambda - \lambda^2}{\lambda-1}\right) I = 0 .$$

Ainsi on obtient :

$$\frac{\|\varepsilon_2^{(k)} - S\|}{\|S_k - S\|} = \|o(1)v_k + o(1)\| = o(1) . \qquad \blacksquare$$

Conséquences :

a) Si de plus la suite $(\|S_k - S\|)$ est bornée on a $\lim_{k\to\infty} \varepsilon_2^{(k)} = S$.

b) Soit A une matrice carrée $p \times p$ telle que $I - A$ soit inversible Considérons la suite générée de la façon suivante ·

$$S_{n+1} = AS_n + b .$$

S est la solution du système $X = AX + b$. Notons $\lambda_1, ..., \lambda_p$ les valeurs propres de A. Supposons que l'on ait $|\lambda_1| > |\lambda_2| \geqslant \cdots \geqslant |\lambda_p|$. La suite (S_n) vérifie les conditions du théorème et donc si $|\lambda_1| < 1$, (S_n) converge vers S et $(\varepsilon_2^{(n)})$ converge vers S plus rapidement que (S_n).

Remarque : Plaçons-nous dans $\mathbb{R}^2$. On suppose que la suite $S_n = (x_n, y_n)$ tend vers le point $S = (x, y)$ de la façon suivante :

i) $x_n \neq x$ pour n assez grand

ii) $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{x_{n+1} - x}{x_n - x} = \lambda \ (\lambda \neq 1)$

iii) $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{y_n - x}{x_n - x} = \lambda' \ (\lambda' \neq 0)$.

La suite (S_n) converge alors vers S λI-linéairement. Géométriquement, cela signifie que la droite (S_n, S) tend vers une direction donnée (Δ), où (Δ) est la droite passant par S de pente λ'. On peut noter que l'hypothèse « $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{x_{n+1} - x}{x_n - x} = \lambda \ (\lambda \neq 1)$ » peut être remplacée par « $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{x_{n+2} - x_{n+1}}{x_{n+1} - x} = \lambda \ (\lambda \neq 1)$ » d'après [4]. Donnons l'exemple suivant dû à Ortloff [8] :

$$\begin{cases} x_{n+1} = \frac{1}{3} x_n - \frac{1}{6} y_n + \frac{1}{12} (x_n - y_n)^2 \\ y_{n+1} = -\frac{1}{6} x_n + \frac{1}{3} y_n + \frac{1}{12} (x_n - y_n)^2 \end{cases}$$

avec $(x_0, y_0) = (6, 4)$ et $(x, y) = (0, 0)$. On peut voir que $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{1}{2}$ et que $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{y_n}{x_n} = -1$. Ainsi ε_2 accélère la convergence de la suite.

2.3. Donnons pour terminer, sans démonstration, un résultat d'accélération où la matrice A n'est pas une homothétie.

THÉORÈME 2 : *Dans $\mathbb{R}^2$, si une suite (S_n) vérifie*

$$\lim_{n \to \infty} \frac{(S_{n+1} - S) - A(S_n - S)}{\|S_n - S\|} = 0 \quad \text{avec} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

alors

$$\lim_{k \to \infty} \frac{\varepsilon_2^{(k)} - S}{\| S_k - S \|} = 0 .$$

CONCLUSION

La transformation ε_2, généralisation au cas vectoriel du procédé Δ^2 d'Aitken, fournit un excellent moyen pour accélérer la convergence des suites à comportement λI-linéaire au sens de Nievergelt. Pour une suite qui converge linéairement sans autre précision, on perçoit que l'accélération va dépendre des degrés des polynômes minimaux des matrices pour lesquelles la suite se comporte linéairement. La notion de degré d'une telle suite a été introduite dans [6].

Nous remercions le référé pour ses précieuses remarques.

RÉFÉRENCES

[1] C. BREZINSKI, 1977, *Accélération de la convergence en analyse numérique,* LNM 584, Springer Verlag, Heidelberg.

[2] C. BREZINSKI, 1978, *Algorithmes d'accélération de la convergence. Etude numérique,* Editions Technip, Paris.

[3] C. BREZINSKI et M. REDIVO-ZAGLIA, 1991, *Extrapolation Methods, Theory and Practise,* North-Holland, Amsterdam.

[4] J.-P. DELAHAYE, 1988, *Séquence Transformations,* Springer Verlag, Berlin.

[5] F. R. GANTMACHER, 1966, *Théorie des Matrices,* Dunod, Paris.

[6] H. LE FERRAND, 1992, *Convergence et applications d'approximations rationnelles vectorielles,* Thèse, Lille 1.

[7] Y. NIEVERGELT, 1991, Aitken's and Steffensen's acceleration in several variables, *Numer. Math.* **59,** 295-310.

[8] H. ORTLOFF, 1986, Asymptotic behaviour and acceleration of iterative sequences, *Numer. Math.* **49,** 545-559.

[9] A. SALAM, 1993, Thèse, Lille 1.

[10] P. WYNN, 1962, Acceleration techniques for iterated vector and matrix problems, *Math. Comput.* **16,** 301-322.