MATHÉMATIQUES ET SCIENCES HUMAINES

Problèmes d'enseignement

Mathématiques et sciences humaines, tome 9 (1964), p. 41-46
<http://www.numdam.org/item?id=MSH_1964__9__41_0>

PROBLEMES D'ENSEIGNEMENT

QUELQUES EXERCICES A TRAITER SUR SIMPLEXES

Il se peut pour certains problèmes économiques (décryptage, transport de marchandises, tournée économique) que la meilleure feuille de calcul soit encore un simplexe. Selon la dimension du calcul le simplexe est donné par

un réseau comme on le fera ci-dessous

un tableau

un ensemble d'instructions permettant toute exploration locale.

Dans tous les cas le simplexe sert de support au calcul.

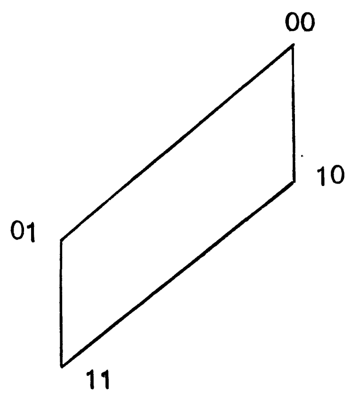
On rappelle que l'on entend par simplexe S_n, l'ensemble des parties d'un ensemble quelconque à n éléments organisées par la relation d'inclusion.

Exemple: pour construire S_2 on se donne un ensemble à deux éléments noté par exemple " $\{a,b\}$ "; on peut aussi le noter simplement " 11 ", ce qui revient à identifier chaque élément par son rang dans un mot.

Les parties de " 11 " sont notées par les mots

oo, ol, lo, ll

où un zéro au rang k signifie que l'élément de rang k n'est pas retenu pour constituer la partie en question. On donne ci-contre, un schéma d'inclusion des quatre parties de " 11 ", en omettant toutefois toute barre d'inclusion qui serait une conséquence transitive des barres qui y figurent.



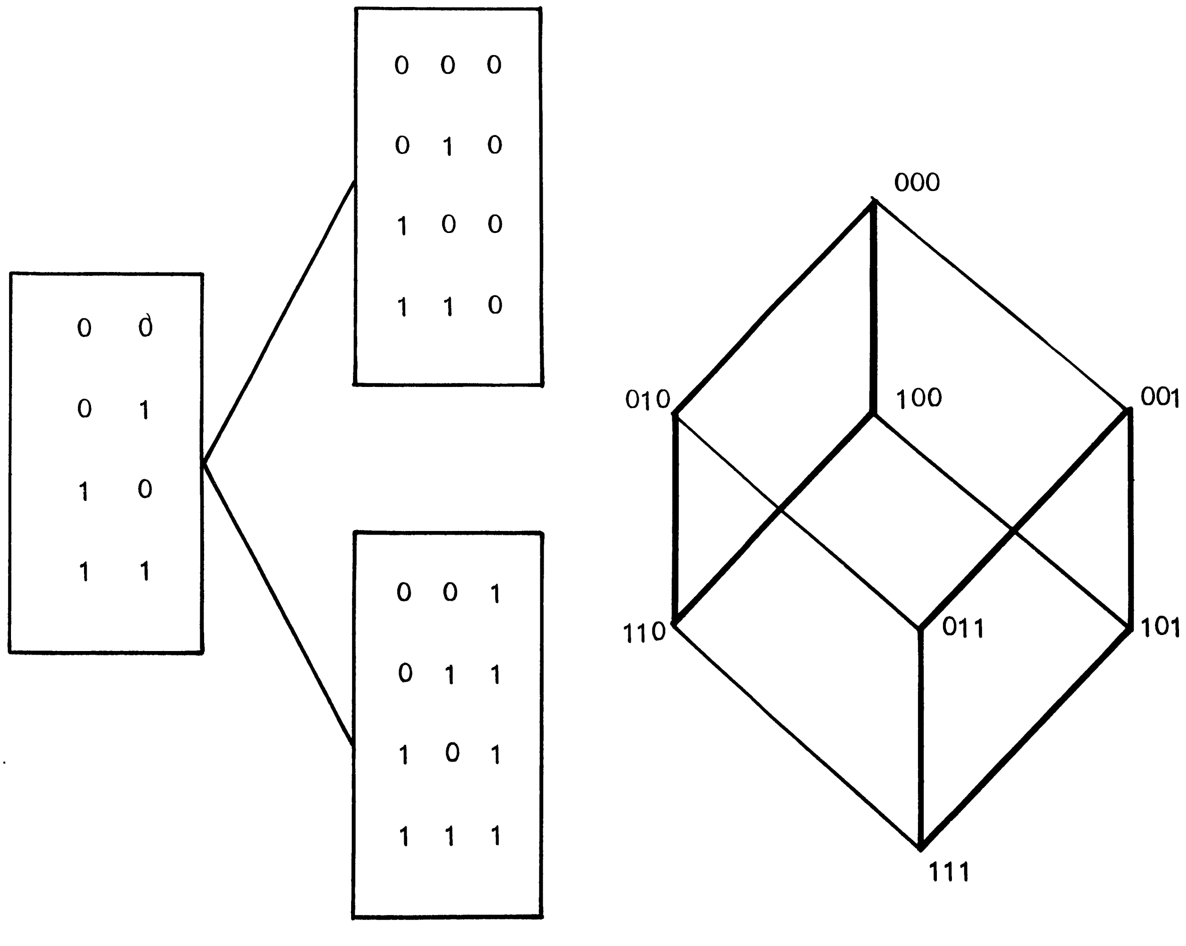
Simplexe S_2

Avant de poser un calcul à traiter sur simplexe jetons un coup d'oeil sur la lignée des simplexes S_1, S_2, S_3, S_4, ..., et plus précisément recherchons des correspondances entre simplexes de rangs distincts.

1. LA REGLE DU DEDOUBLEMENT

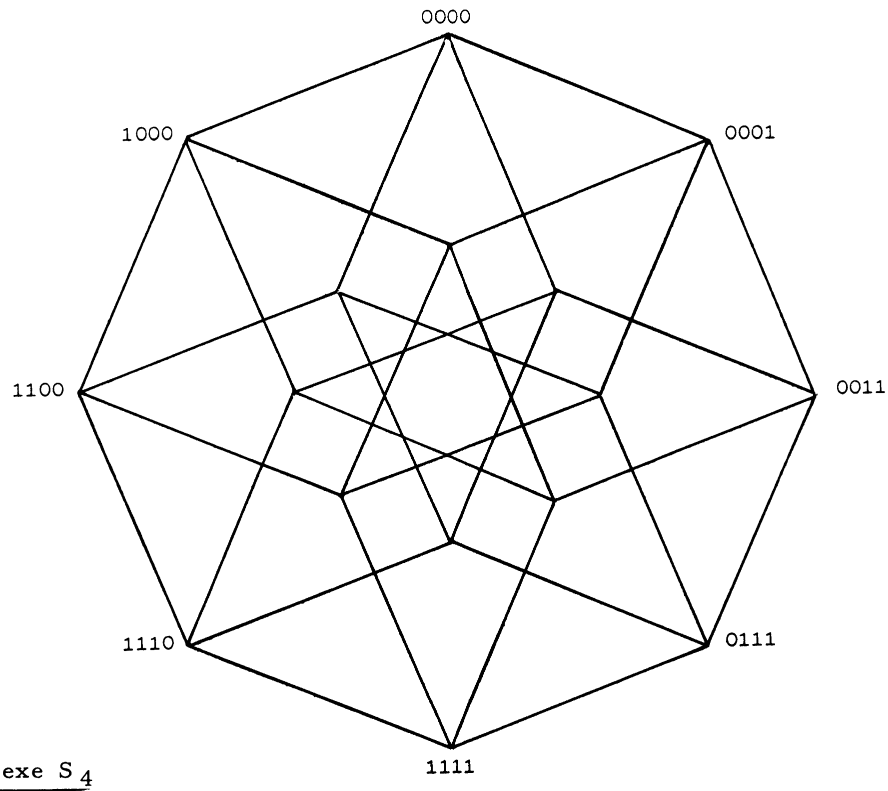
On donne S_2 et on demande de construire S_3.

Dans nos notations en mots, il ne s'agit que d'ajouter une troisième coordonnée:

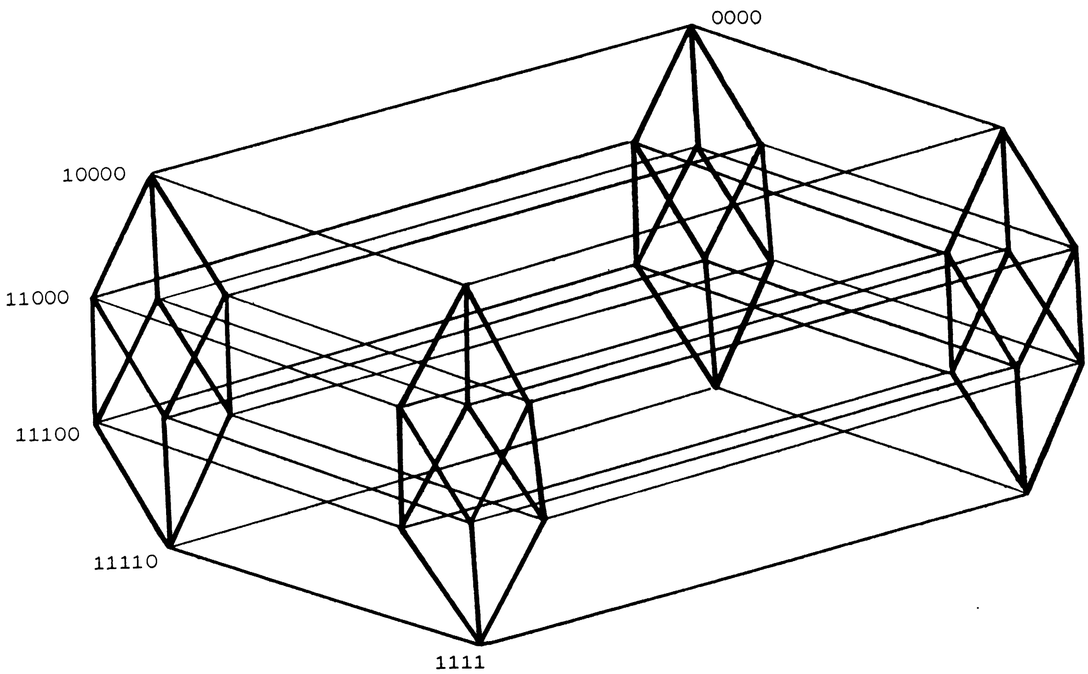


S_2 se dédouble et donne S_3

Si nous sommes bon dessinateur, il n'est pas impossible de tracer S_4, S_5, S_6, et même S_7. Nous donnons ci-dessous S_4 et S_5



Simplexe S_4



Simplexe S_5

Inversement on peut se demander comment séparer un simplexe en deux parties isomorphes: il suffit pour cela de choisir une coordonnée et de séparer les mots pour lesquels cette coordonnée est égale à 1 de ceux pour lesquèls elle est égale à 0.

On exhibe la lignée des simplexes $S_0, S_1, S_2, \ldots, S_n$ en dépliant S_0 n fois, on peut inversement replier S_n en n opérations, en respectant ou non l'ordre des coordonnées adopté pour déplier S_0.

Si la règle du dédoublement est caractéristique du simplexe on peut toutefois en donner un énoncé plus riche.

Homorphismes de S_n dans S_k (lorsque $k < n$)

Considérons par exemple le simplexe S_5, c'est-à-dire les 2^5 mots à 5 coordonnées égales à 0 ou 1. Nous l'avons tracé ci-dessus.

Intéressons-nous au seul point de vue suivant: première et cinquième coordonnée des mots. Nous définissons ainsi pour S une relations d'équivalence dont les classes peuvent s'écrire:

0 ... 0		0 0
0 ... 1	ou simplement	0 1
1 ... 0		1 0
1 ... 1		1 1

En d'autres termes ses classes constituent un S_2, et chaque classe (remplir les pointillés) est un S_3.

Disons aussi que nous avons appliqué S_5 dans S_2 et que la partition de S_5 afférante à cette application est constituée de quatre S_3. Cette application est un homorphisme pour l'inclusion car il est évident que les classes de deux éléments de S_5, inclus l'un dans l'autre, sont incluses l'une dans l'autre. Nous avons un homorphisme pour l'inclusion et partant pour toute opération de treillis déduite de l'inclusion.

Une telle relation d'équivalence peut être établie sur toute partie des coordonnées. Aussi

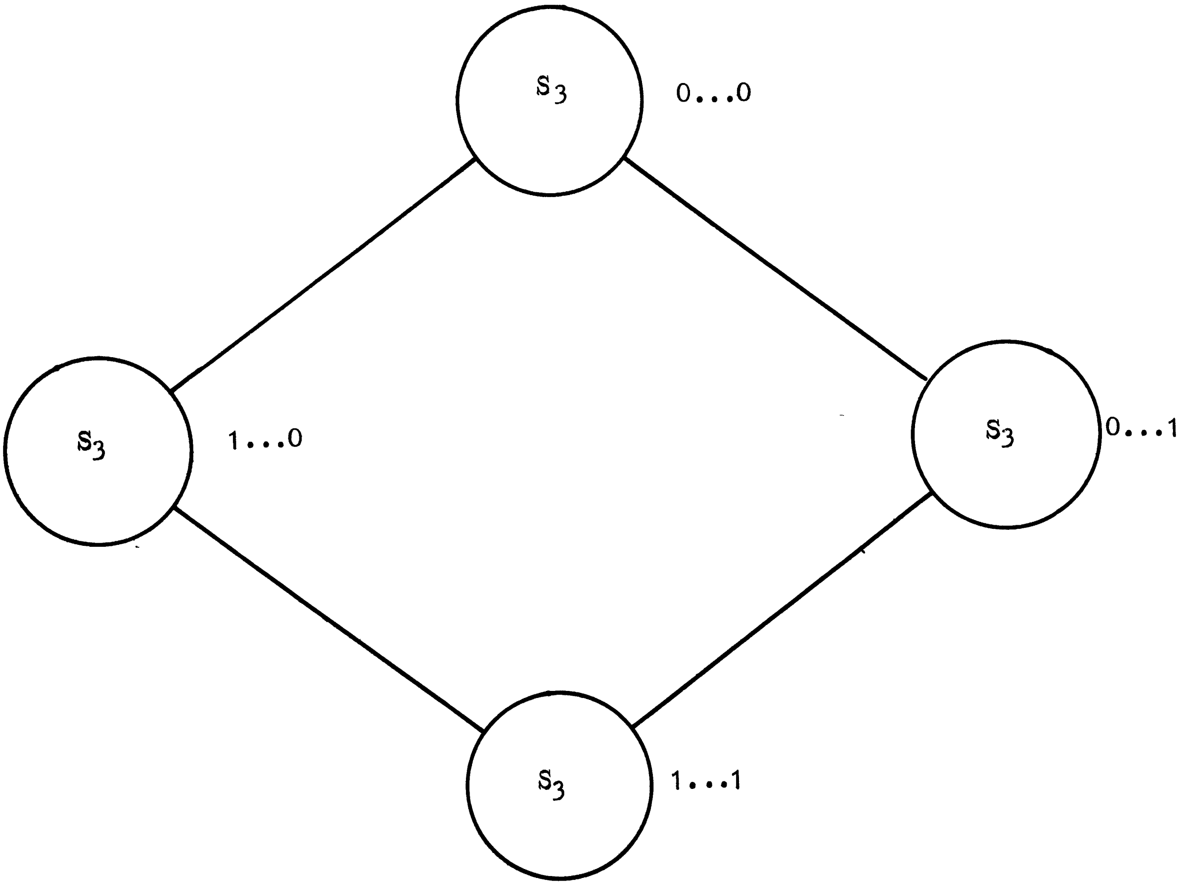
nous écrivons $S_5 = S_2 \times S_3$

et aussi $S_5 = S_3 \times S_2$

$S_5 = S_4 \times S_1$ (règle du dédoublement)

$S_5 = S_5 \times S_0$

Les simplexes se multiplient, les indices s'ajoutent. Nous avons rencontré une des procédures usuelles de l'algèbre: le produit direct.



Homorphisme de S_5 dans S_2

P. ROSENSTIEHL

(à suivre)

\- - - - - - - - -

CHANTIERS MATHEMATIQUES

Programme des émissions pour le 3ème trimestre

Lundi à 17 h.55		Vendredi à 17 h.55	
26-4-65	Equations linéaires	23-4-65	Algèbre des événements
3-5-65	Produits scalaires 1	30-4-65	Calcul des Probabilités
10-5-65	Produits scalaires 2	7-5-65	Dissection
17-5-65	Formes quadratiques	14-5-65	Langages machines
24-5-65	Statistique et calcul vectoriel	21-5-65	Egalité
31-5-65	En guise de conclusion	28-5-65	P. de Fermat

Des documents d'accompagnement, par fascicules trimestriels, sont en vente à l'Institut Pédagogique National: 29, rue d'Ulm, Paris 5ème.