IOAN TOMESCU

Sur le nombre des cycles négatifs d'un graphe complet signé

Mathématiques et sciences humaines, tome 53 (1976), p. 63-67

<http://www.numdam.org/item?id=MSH_1976__53__63_0>

Math. Sci. hum. (14e année, n°53, 1976, p.63-67)

SUR LE NOMBRE DES CYCLES NEGATIFS D'UN GRAPHE COMPLET SIGNE

IOAN TOMESCU *

Dans l'étude des groupes sociaux interviennent des graphes non-orientés dont les arêtes sont positives ou négatives,correspondant aux relations réciproques de sympathie ou d'antipathie entre les membres du groupe,représentés par les sommets du graphe.Ces graphes sont nommés graphes signés.

La terminologie qui sera utilisée est celle de [1] et [2] ; par cycle on comprend dans la suite un cycle élémentaire.

Un cycle sera nommé positif si il contient un nombre pair d'arêtes négatives et il sera nommé négatif si il contient un nombre impair d'arêtes négatives.

Un graphe signé est équilibré,si tous ses cycles sont positifs ou, en utilisant la caractérisation de Cartwright et Harary [3], si et seulement si l'ensemble des sommets peut être divisé en deux sous-ensembles tels que toutes les arêtes qui relient les sommets d'un même ensemble soient positives et les arêtes qui relient les sommets appartenant aux ensembles différents soient négatives.

Une mesure du déséquilibre d'un graphe signé G est son indice de déséquilibre,qui est égal,par définition,au rapport

$$\frac{c^-(G)}{c(G)}$$

où $c^-(G)$ est le nombre des cycles négatifs de G et $c(G)$ est le nombre de tous les cycles de G [1].

Evidemment pour un graphe équilibré on a $c^-(G) = 0$,donc son indice de déséquilibre est nul.

---

* Faculté de Mathématique et de Mécanique,Université de Bucarest,République Socialiste de Roumanie.

Le graphe complet K_n à n sommets a un nombre de cycles élémentaires égal à

$$c(K_n) = \frac{1}{2} \sum_{k=3}^{n} \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k}$$

En effet, le nombre des k-cycles ou des cycles à k sommets, est égal à

$$\binom{n}{k}\frac{(k-1)!}{2} = \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{2k}$$

parce que nous pouvons choisir k sommets en $\binom{n}{k}$ façons et le graphe complet à k sommets admet $\frac{(k-1)!}{2}$ cycles hamiltoniens.

Pour obtenir le nombre de tous les cycles de K_n il faut sommer ces expressions de $k = 3$ à n.

On voit donc l'intérêt de l'étude du nombre $c^-(G)$ des cycles négatifs d'un graphe signé G. Dans ce qui suit nous étudierons quelques propriétés de ce nombre au cas d'un graphe complet signé à n sommets.

La proposition suivante nous montre une propriété des 3-cycles du graphe complet signé à n sommets.

PROPOSITION 1. <u>Le nombre des 3-cycles négatifs du graphe complet signé à n sommets, avec p arêtes négatives a les propriétés suivantes:</u>

a) <u>Pour n pair, le nombre des 3-cycles négatifs est pair</u>;

b) <u>Pour n impair, ce nombre a la même parité que p</u>.

On peut faire la démonstration par induction sur p, comme suit.

Pour $p = 1$, il y a une seule arête négative [u,v] et donc il existe $n - 2$ cycles négatifs à 3 sommets.

On voit aussi que $n - 2$ a la même parité que n.

On suppose la propriété vraie pour p et on change le signe d'une nouvelle arête [u,v] de K_n. Il y a trois cas:

I) [u,v] n'est adjacente à aucune arête négative de K_n. En ce cas, le nombre des 3-cycles négatifs croît de $n - 2 \equiv n \pmod 2$.

II) [u,v] est adjacente à une seule extrémité à q arêtes négatives. En ce cas q cycles négatifs à 3 sommets deviennent positifs et $n - q - 2$ cycles positifs à 3 sommets deviennent négatifs. Donc le nombre des 3-cycles négatifs croît de $n - 2q - 2 \equiv n \pmod 2$.

III) La nouvelle arête négative [u,v] est adjacente à une extrémité à q arêtes négatives et à l'autre extrémité à r arêtes négatives. Supposons aussi qu'il y a s cycles négatifs avec les sommets u,v,w (w variable) et les arêtes [u,w] et [v,w] négatives.

Evidemment on a $s \leqslant \min(q,r)$. En ce cas nous obtenons:

. s 3-cycles positifs deviennent négatifs;

. un nombre de $n - (r - s + q + 2) = n - r - q + s - 2$ 3-cycles positifs deviennent négatifs;

. un nombre de $q - s$ 3-cycles négatifs deviennent positifs et

. un nombre de $r - s$ 3-cycles négatifs deviennent positifs.

Au total, le nombre des 3-cycles négatifs croît de $n - r - q + 2s - 2 - (q - s + r - s) = n - 2r - 2q + 4s - 2 \equiv n \pmod{2}$.

Pour n pair et $p = 1$ le nombre des 3-cycles négatifs est pair; lorsque p croît d'une unité le nombre des 3-cycles négatifs croît d'un nombre pair, donc pour n pair le nombre de 3-cycles négatifs est pair.

Pour n impair et $p = 1$ le nombre des 3-cycles négatifs est impair; lorsque p croît d'une unité le nombre des 3-cycles négatifs croît d'un nombre impair, donc pour n impair le nombre des 3-cycles négatifs a la même parité que p. C.Q.F.D.

Nous pouvons déduire de la proposition 1 la parité du nombre des 3-cycles positifs de K_n avec p arêtes négatives; en effet, la somme du nombre des 3-cycles positifs et du nombre des 3-cycles négatifs est égal à $\binom{n}{3}$, nombre qui est pair pour n pair ou $n = 4k + 1$ avec $k \geqslant 1$ et impair pour $n = 4k + 3$.

PROPOSITION 2. Si le graphe complet signé à n sommets, $n \geqslant 4$, a p arêtes négatives, alors le nombre des t-cycles négatifs (t fixé, $t \geqslant 4$) est pair pour tout p.

La démonstration est faite par induction sur p. Pour $p = 1$ nous faisons la transformation suivante:

Pour un t-cycle C_t $(t \geqslant 4)$ qui contient l'arête négative [u,v] notons par x et y les sommets du cycle adjacents à u et v, par les arêtes [x,u] et [y,v].

Supprimons les arêtes [x,u] et [y,v] et ajoutons les arêtes

$[x,v]$ et $[y,u]$;on obtient un nouveau t-cycle C_t' qui contient aussi l'arête $[u,v]$.Nous notons $\varphi(C_t) = C_t'$.

On démontre facilement par récurrence que cette transformation définit une partition de l'ensemble $M_{[u,v]}$ des t-cycles qui contiennent l'arête $[u,v]$ pour un t fixé, $4 \leqslant t \leqslant n$:

$$M_{[u,v]} = M^1_{[u,v]} \cup M^2_{[u,v]} \; ; \; M^1_{[u,v]} \cap M^2_{[u,v]} = \emptyset$$

$$\varphi : M^1_{[u,v]} \longrightarrow M^2_{[u,v]}$$

φ étant la bijection telle que $C_t \in M^1_{[u,v]}$, $C_t' \in M^2_{[u,v]}$ et $\varphi(C_t) = C_t'$.Nous pouvons définir par récurrence cette partition et la bijection φ en considérant pour un t-cycle C_t son image C_t'.Nous supprimons C_t et C_t' de $M_{[u,v]}$ et considérons un autre cycle à t sommets qui passe par $[u,v]$ et aussi son image,qui est différente de C_t et C_t' et ainsi de suite.

Nous avons

$$|M^1_{[u,v]}| = |M^2_{[u,v]}|, \text{donc } |M_{[u,v]}| = 2|M^1_{[u,v]}|$$

et les t-cycles négatifs étant ceux qui contiennent la seule arête négative $[u,v]$,leur nombre est donc pair.

Supposons la propriété vraie pour p et soit G un graphe complet signé à p arêtes négatives transformé en G_1 par le changement du signe de l'arête $[u,v]$,qui devient négative.G_1 a donc p + 1 arêtes négatives.

Par l'hypothèse d'induction le graphe signé G contient un nombre pair de t-cycles négatifs pour $t = 4, \ldots, n$ et nous démontrerons cette propriété pour le graphe G_1.

Pour cela notons par a le nombre de t-cycles négatifs qui n'utilisent pas l'arête $[u,v]$;par b le nombre de t-cycles négatifs qui utilisent l'arête $[u,v]$;par c le nombre de t-cycles positifs qui utilisent l'arête $[u,v]$ dans le graphe G pour $t \geqslant 4$ et les notations analogues a_1, b_1, c_1 pour le graphe G_1.

Le nombre de t-cycles négatifs pour le graphe G,c'est-à-dire a + b,est un nombre pair.Conformément à la construction antérieure, le nombre de t-cycles qui utilisent l'arête $[u,v]$ est pair, c'est-à-dire :

$$b + c \quad \text{et} \quad b_1 + c_1$$

sont tous les deux nombres pairs.

Puisque l'arête $[u,v]$ a changé son signe,on a

$$b = c_1 \quad \text{et} \quad c = b_1$$

Les seuls t-cycles qui changent leur signe étant ceux qui utilisent l'arête $[u,v]$,il en résulte que

$$a = a_1$$

Les nombres $a + b$ et $b + c$ étant pairs,il résulte que $a + c$ est aussi un nombre pair.Mais

$$a + c = a_1 + b_1$$

c'est-à-dire le nombre total de t-cycles négatifs du graphe G_1, qui donc est pair. C.Q.F.D.

COROLLAIRE.Si un graphe complet signé a n sommets et p arêtes négatives,son nombre de cycles (élémentaires) négatifs a les propriétés suivantes:

a) il est pair pour n pair;

b) il a la même parité que p pour n impair,pour toute disposition des p arêtes négatives du graphe.

Cela résulte immédiatement des propositions 1 et 2.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Flament,C.,Théorie des graphes et structures sociales,Paris, Gauthier-Villars-Dunod,1965.

[2] Berge,C.,Graphes et hypergraphes,Paris,Dunod,1970.

[3] Cartwright,D.,Harary,F.,"Structural balance: A generalization of Heider's theory",Psychol. Rev.,63(1956),277-293.

[4] Malita,M.,Théorie des graphes avec des applications aux sciences sociales,cours offset,Université de Bucarest,1972.