MÉMOIRES DE LA S. M. F.

J.-P. LIGAUD

Sur les limites inductives de suites d'espaces localement pseudo-convexes

Mémoires de la S. M. F., tome 31-32 (1972), p. 241-247
<http://www.numdam.org/item?id=MSMF_1972__31-32__241_0>

Colloque Anal. fonctionn.[1971, Bordeaux]
Bull. Soc. math. France,
Mémoire 31-32, 1972, p. 241-247.

SUR LES LIMITES INDUCTIVES DE SUITES D'ESPACES LOCALEMENT PSEUDO-CONVEXES

par

J.P. LIGAUD

1) Introduction et terminologie

Les limites inductives dans la catégorie des espaces vectoriels topologiques quelconques ont, depuis quelques années, été étudiées par divers auteurs (voir [2] et [3]). En particulier, les propriétés bien connues des limites inductives strictes (*) ont été retrouvées, sauf celle concernant la caractérisation des bornés . On va voir que cette caractérisation subsiste, pourvu qu'on prenne une suite d'espaces localement pseudo-convexes (si on prend des espaces localement p-convexes avec p fixé, la démonstration classique se généralise mutatis mutandis).

Les techniques employées permettront également de donner des critères de convexité pour de telles limites inductives .

Les notations et la terminologie sont conformes à celles de [1] .

Rappelons cependant l'essentiel . Une base de bornologie d'un espace vectoriel bornologique (evb) E est une famille de bornés $(B_i)_{i \in I}$ telle que tout borné de E soit contenu dans un des B_i . Si E est un evt , la famille des bornés, au sens topologique, de E forme une bornologie appelée bornologie de von Neumann de E , en abrégé bornologie de V.N. de E.

Soit p ($o < p \leq 1$). Une partie A d'un espace vectoriel est dite p-disquée si $x, y \in A$ implique $\lambda x + \mu y \in A$ pour tous scalaires λ et μ tels que $|\lambda|^p + |\mu|^p \leq 1$. L'enveloppe p-disquée Γ_p (A) d'une partie A est l'intersection de tous les p-disques contenant A . On peut montrer classiquement que :

$$\Gamma_p(A) = \{ \sum_{i=1}^{m} \lambda_i x_i \ ; \ x_i \in A, \ \sum_{i=1}^{m} |\lambda_i|^p \leq 1 \ , \ m \in \mathbb{N}^* \}$$

Un evt (resp.un evb) E est dit localement pseudo-convexe (resp.pseudo convexe), s'il possède une base de voisinages de O, $(V_i)_{i \in I}$ (resp.une base de bornologie $(B_i)_{i \in I}$) , V_i (resp.B_i) étant p_i-disqué ($o < p_i \leq 1$, p_i dépendant de i).
Si, dans la définition précédente, on peut prendre $p_i = p$ pour tout i , on dit que E est un evt (resp.un evb) localement p-convexe (resp.p-convexe) .

(*) localement convexes.

Les evt (resp. les evb) localement pseudo-convexes (resp. pseudo-convexes) sont des limites projectives (resp. inductives) dans la catégorie des evt (resp. des evb) d'espaces localement bornés.

2) Limites inductives de suites d'espaces localement pseudo-convexes

On va démontrer trois lemmes techniques, en remarquant d'abord que si A est un p-disque et si $\alpha_1,\dots,\alpha_n$ sont des nombres > 0, on a :

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\, A \subset \Big(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i^{\,p} \Big)^{1/p} A$$

LEMME 1.- *Soit* E *un evt localement pseudo-convexe,* M *un sous espace vectoriel de* E

1) *Si* U *est un voisinage p-disqué de* 0 *de* M *et si* V *est un voisinage q-disqué de* 0 *dans* E *contenant* U, *alors il existe un voisinage* W *de* 0 *dans* E, *r-disqué avec* $r \leq \inf(p,q)$ *contenu dans* V *et tel que* $W \cap M = U$

2) *Si on suppose* M *fermé, si* β *est une application de* $]0,1]$ *dans* $[1,+\infty[$, *si* $x_0 \in E$, $x_0 \notin M$ *et si* U *est un voisinage p-diqué de* 0 *dans* M, *alors il existe un voisinage q-disqué* W *de* 0 *dans* E, *pour un certain* $q \leq p$, *tel que* $W \cap M = U$ *et* $x_0 \notin \beta(q)\, W$.

Preuve : 1) il existe un voisinage de 0, W_1, q_1-disqué dans E tel que $W_1 \cap M \subset U$ et $W_1 \subset V$. Soit $W = \Gamma_r (W_1 \cup U)$ avec $r = \inf(p,q,q_1)$, W est un voisinage de 0, r-disqué, de E, contenu dans V et comme tout élément z de W s'écrit sous la forme $z = \alpha x + \beta y$ avec $\alpha, \beta \geq 0$, $\alpha^r + \beta^r = 1$, $x \in W_1$, $y \in U$, il est facile de voir que $W \cap M = U$.

2) il existe un voisinage W_2 de 0 dans E, q_2-disqué, tel que $W_2 \cap M \subset U$ et $W_2 \cap \{x_0 + M\} = \emptyset$. Si $q = \inf(q_2,p)$ et $W = \Gamma_q\big(U \cup \frac{1}{\beta(q)} W_2 \big)$, W est alors un voisinage q-disqué de 0 dans E, $W \cap M = U$ et si on avait $x_0 \in \beta(q)\, W$, alors $x_0 = \alpha x + \beta y$ avec $\alpha, \beta \geq 0$, $\alpha^q + \beta^q = 1$, $x \in \beta(q)\, U$, $y \in W_2$, donc $x_0 - \alpha x = \beta y \in W_2 \cap \{x_0 + M\}$, ce qui est impossible.

LEMME 2.- *Soit* (E_n) *une suite croissante d'evt et* (V_n) *une suite telle que* V_n *soit un voisinage,* p_n*-disqué, de* 0 *dans* E_n *avec* $V_{n+1} \cap E_n = V_n$.

Soit $U = \bigcup_n \sum_{i=1}^{n} k_i V_i$ *avec* $k_1 = 1$ *et* $k_{n+1} = \dfrac{k_n}{2^{\frac{1}{p_{n+1}}}}$

Alors $U \cap E_n \subset \beta_n V_n$ *pour tout* n, *avec* $\beta_1 = 2^{\frac{1}{p_1}}$ *et*

$$\beta_n = \Big(\sum_{i=1}^{n} k_i^{\,p_n} + k_{n-1}^{\,p_n} \Big)^{1/p_n} \quad \textit{pour } n \geq 2 .$$

Preuve: Pour n_o fixé, il suffit de montrer que $\left(\sum_{i=1}^{n} k_i V_i\right) \cap E_{n_o} = A_n \subset \beta_{n_o} V_{n_o}$

pour tout n . Si $n \le n_o$, $A_n \subset \sum_{i=1}^{n} k_i V_{n_o} \subset \left(\sum_{i=1}^{n} k_i^{p_{n_o}}\right)^{1/p_{n_o}} V_{n_o} \subset \beta_{n_o} V_{n_o}$

Si $n > n_o$, $A_n = E_{n_o} \cap E_{n_o+1} \cap \ldots\ldots \cap E_{n-1} \cap \left(\sum_{i=1}^{n} k_i V_i\right)$

On montre par récurrence sur s $(1 \le s \le n - n_o)$ l'inclusion suivante :

(a) $E_{n-s} \cap \left(\sum_{i=1}^{n} k_i V_i\right) \subset \sum_{i=1}^{n-s-1} k_i V_i + k_{n-s-1} V_{n-s}$

Pour $s=1$, $E_{n-1} \cap \left(\sum_{i=1}^{n} k_i V_i\right) \subset \sum_{i=1}^{n-1} k_i V_i + k_n V_{n-1}$

$\subset \sum_{i=1}^{n-2} k_i V_i + \left(k_{n-1}^{p_{n-1}} + k_n^{p_{n-1}}\right)^{1/p_{n-1}} V_{n-1} \subset \sum_{i=1}^{n-2} k_i V_i + k_{n-2} V_{n-2}$ d'après le choix des k_n . D'autre part ,si (a) est vraie pour le rang s, alors

$E_{n-s-1} \cap \left(\sum_{i=1}^{n} k_i V_i\right) \subset E_{n-s-1} \cap \left(\sum_{i=1}^{n-s-1} k_i V_i + k_{n-s-1} V_{n-s}\right)$

$\subset \sum_{i=1}^{n-s-1} k_i V_i + k_{n-s-1} V_{n-s-1} \subset \sum_{i=1}^{n-s-2} k_i V_i + \left(2 k_{n-s-1}^{p_{n-s-1}}\right)^{1/p_{n-s-1}} V_{n-s-1}$

$\subset \sum_{i=1}^{n-s-2} k_i V_i + k_{n-s-2} V_{n-s-1}$, et on a la relation (a) au rang $s+1$

Alors pour $s = n - n_o$ on obtient

$E_{n_o} \cap \left(\sum_{i=1}^{n} k_i V_i\right) \subset \sum_{i=1}^{n_o-1} k_i V_i + k_{n_o-1} V_{n_o} \subset \left(\sum_{i=1}^{n_o-1} k_i^{p_{n_o}} + k_{n_o-1}^{p_{n_o}}\right)^{1/p_{n_o}} V_{n_o}$

$\subset \beta_{n_o} V_{n_o}$

Pour le cas ou $n=1$ il est facile de vérifier qu'on a également le résultat

LEMME 3.- <u>Soit (E_n) une suite croissante d'evt localement pseudo-convexes séparés telle que E_n soit un sous espace fermé de E_{n+1} , et soit E la limite inductive des E_n dans la catégorie des</u> evt . <u>Soit (x_n) une suite de points de E telle que $x_n \in E_n$ et $x_n \notin E_{n-1}$. Alors la suite (x_n) ne peut converger vers</u> 0 <u>dans</u> E .

Preuve : On peut construire par récurrence à l'aide du lemme 1 une suite (V_n), V_n étant un voisinage de 0 de E_n, une suite γ_n d'applications de $]0,1]$ dans $[1,+\infty[$, une suite (k_n) de nombres > 0 tels que : V_n soit un voisinage de 0 p_n-disqué, $V_{n+1} \cap E_n = V_n$, $k_{n+1} = \dfrac{k_n}{2^{1/p_{n+1}}}$, $k_1 = 1$

$$\gamma_n(q) = \left(\sum_{j=1}^{n-1} k_j^q + \frac{k_{n-1}^q}{2} + k_{n-1}^q \right)^{1/q}, \quad \gamma_1(q) = 2^{1/q} \text{ et } x_n \notin \gamma_n(p_n)\, V_n$$

Si on pose $\beta_n = \gamma_n(p_n)$ et $U = \bigcup_n \sum_{i=1}^{n} k_i V_i$, U est un voisinage de 0 de E ([2] p 287) et d'après le lemme 2, $U \cap E_n \subset \beta_n V_n$ donc $x_n \notin U$.

THEOREME 1.- Toute limite inductive E d'une suite croissante (E_n) d'evt localement pseudo convexes séparés telle que E_n soit un sous espace fermé de E_{n+1} possède les propriétés suivantes :

1) tout borné de E est contenu dans un des E_n et borné dans cet E_n
2) toute suite convergeant vers 0 dans E est contenue dans un des E_n et converge vers 0 dans cet E_n.

Preuve : elle est standart, à partir du lemme 3.

Les conséquences classiques sur la quasi-complétion et la 1ère condition de dénombrabilité de Mackey découlent, bien entendu, de ce théorème. L.Waelbroeck [6], a montré que la bornologie à décroissance rapide d'un espace localement pseudo-convexe est plus fine que sa bornologie de VN. Cette propriété subsiste pour les limites inductives strictes envisagées dans le théorème 1.

Il est facile de voir que la catégorie des espaces localement p-convexes est stable par passage aux limites inductives dénombrables dans la catégorie des evt.

L'étude qui suit montre que ceci n'est plus vrai pour la catégorie des espaces localement pseudo-convexes.

On appelle module de convexité m(E) d'un evt E, la borne supérieure de l'ensemble des p ($0 < p \leq 1$) pour lesquels il existe une base de voisinages de 0 de E p-disqués, si cet ensemble n'est pas vide. Sinon on pose m(E) = 0.

Si E est un evt localement borné, il est localement p-convexe pour un certain p, donc $m(E) > 0$.

PROPOSITION 1.- Soit E une limite inductive stricte d'une suite croissante (E_n) d'evt localement bornés.

1) si $\inf_n m(E_n) = 0$, E ne peut être localement pseudo-convexe.
2) si $\inf_n m(E_n) > 0$, E est localement p-convexe pour tout p tel que $0 < p < \inf_n m(E_n)$.

Preuve : la deuxième assertion est évidente. Pour la première : soit S_n la "boule" unité de E_n, p_n-disquée avec $p_n < m(E_n)$. A l'aide du lemme 1, on peut construire par récurrence une suite (V_n), V_n étant un voisinage de 0, q_n-disqué, de E_n avec $q_n \leq \inf(q_{n-1}, p_n)$ et une suite (λ_n) de nombre > 0 tels que $V_n \cap E_{n-1} = V_{n-1}$ et $V_n \subset \lambda_n S_n$. On définit alors k_n et β_n à partir des q_n comme dans le lemme 2 et $U = \bigcup_n \sum_{i=1}^{n} k_i V_i$. U est un voisinage de 0 de E qui ne contient aucun voisinage de 0 p-disqué, quelque soit p, sinon, si U_o est un tel voisinage

$$U_o \cap E_n \subset U \cap E_n \subset \beta_n V_n \subset \beta_n \lambda_n S_n$$

et S_n contiendrait un voisinage de 0, p-disqué, de E_n ; alors E_n serait localement p-convexe, pour tout n, ce qui est impossible.

PROPOSITION 2.- Si E est limite inductive stricte d'une suite croissante d'evt localement pseudo-convexes telle que $\liminf_{n\to+\infty} m(E_{n+1}/E_n) = 0$, alors E ne peut être localement pseudo-convexe. Si E_n admet un supplémentaire topologique dans E_{n+1} pour tout n, et si $\liminf_{n\to+\infty} m(E_{n+1}/E_n) > 0$, E est localement pseudo-convexe.

On se sert du lemme suivant, dont la démonstration est naturelle.

LEMME 4.- Si E est un evt localement pseudo-convexe et M un sous espace vectoriel de E tel que $m(E/M) = p$, alors, pour tout $\varepsilon > 0$ donné, il existe un voisinage V de 0 dans E tel que $V \supset M$ et V ne contienne aucun voisinage de 0, $(p+\varepsilon)$-disqué.

Preuve de la proposition : il existe une suite strictement croissante d'entiers (n_k) telle que $m(E_{n_k+1}/E_{n_k}) = \eta_k$ avec $\lim \eta_k = 0$

Si (ε_k) est une suite de nombres > 0 convergeant vers 0, à l'aide du lemme 4 et du lemme 1, on construit par récurrence une suite (V_n), V_n étant un voisinage de 0 de E_n, p_n-disqué, tel que $V_{n+1} \cap E_n = V_n$ et, chaque fois que $n = n_k+1$, V_{n_k+1} ne contienne aucun voisinage de 0 de E_{n_k+1} qui soit $(\eta_k+\varepsilon_k)$-disqué. Si (k_n) et (β_n) sont les suites définies dans le lemme 3 à partir de p_n et si $U = \bigcup_n \sum_{i=1}^{n} k_i V_i$, U ne contient aucun voisinage de 0 de E p-disqué quelque soit p, car s'il existe un tel U_o, on peut choisir k tel que $\eta_k + \varepsilon_k \leq p$ et alors $U_o \cap E_{n_k+1} \subset U \cap E_{n_k+1} \subset \beta_{n_k+1} V_{n_k+1}$. V_{n_k+1} contiendrait un voisinage de 0 de E_{n_k+1} qui serait $(\eta_k+\varepsilon_k)$- disqué, ce qui est impossible.

La deuxième assertion provient du fait qu'on peut écrire alors E sous la forme d'une somme directe d'evt, dont le premier est localement pseudo-convexe et tous les autres localement p-convexes pour un certain p fixé .

Remarque : Il existe un autre type bien connu de limite inductive qui possède des propriétés de régularité analogues à celles des limites inductives strictes : les espaces de Silva. Si on appelle evt de Silva toute limite inductive, dans la catégorie des evt, d'une suite croissante (E_n) d'evt localement bornés séparés telle que l'injection canonique $E_n \to E_{n+1}$ soit compacte, alors les démonstrations standart du type [5] ou [7] subsistent sans grands changements pour de tels espaces, du moins celles ne faisant pas intervenir la dualité. En particulier tout evt de Silva est séparé, à bornologie compacte, et sa topologie coïncide avec la topologie de la b-fermeture. Si S_n désigne la boule unité de E_n, pour que l'evt de Silva E= lim ind E_n soit localement p-convexe, il faut et il suffit que pour tout n, il existe un m et un $\lambda > 0$ tels que $\Gamma_p(S_n) \subset \lambda S_m$, c'est à dire que la bornologie de VN de E soit p-convexe . Pour montrer que tout evt de Silva est complet, on peut adapter un critère de Köthe ([4]) , en prouvant principalement que si $\mathfrak{F}$ est un filtre de Cauchy sur E, et si $\mathfrak{F}_o$ est le filtre de Cauchy minimal moins fin que $\mathfrak{F}$, il existe un $\lambda > 0$ et un n tel que pour tout $F \in \mathfrak{F}_o$ on ait $F \cap (\lambda S_n) \neq \emptyset$
Voici un exemple d'un tel evt de Silva .

Soit $E_n = \{ (\lambda_{k,i})_{\substack{1 \leq k \leq n \\ i \in \mathbb{N}}} \; ; \; \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{+\infty} |\lambda_{k,i}|^{\frac{1}{k}} < +\infty \}$. E_n est localement borné quand on le muni de la quasi-norme $\|(\lambda_{k,i})\|_n = \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{+\infty} |\lambda_{k,i}|^{1/k}$ et $m(E_n) = \frac{1}{n}$. Si (ε_n) est une suite de nombres > 0, soit $u = E_n \to E_{n+1}$ l'application suivante : si $x = (\lambda_{k,i}) \in E_n$, on pose $(\eta_{\ell,j}) = u_n(x) \in E_{n+1}$ avec $\eta_{k,i} = \frac{\lambda_{k,i}}{\varepsilon_i^n}$ si $1 \leq k \leq n$ et $i \in \mathbb{N}$ et $\eta_{n+1,i} = 0$ si $i \in \mathbb{N}$ alors u_n est compacte.

Si F est l'ensemble des couples (x,n) où $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in E_n$, on dira que (x,n)=(x',n') si $n' \geq n$ implique $x' = u_{n'-1} u_{n'-2} \cdots u_n(x)$ .Si on identifie les couples égaux, F devient un espace vectoriel réunion des sous-espaces $F_n = \{ (x,n) \in F \}$. On introduit une quasi norme sur F_n en posant $\|(x,n)\|_n = \|x\|_n$. Alors les injections $i_n = F_n \to F_{n+1}$ sont compactes, et si on choisit les (ε_n) tels que la série $\Sigma \varepsilon_n$ soit convergente, E n'est localement p-convexe pour aucun p . Par contre si on choisit les ε_n de telle sorte que $\Sigma \varepsilon_n = +\infty$, E est localement convexe .

BIBLIOGRAPHIE

[1] H.HOGBE-NLEND .- "Théorie des Bornologies et Applications" Lectures Notes n° 213 Springer (1971)

[2] S.O.IYAHEN.- " On certain classe of linear topological spaces " Proc.London Math.Soc. 18 (2) (1968) ,285-307

[3] J.KÖHN.- "Induktiv limiten nicht lokalkonvexen topologishen Vektorraüme" Math.Ann. 181 (1969), 269-278

[4] G.KÖTHE.- "Uber die Vollstandigkeit einer Klasse lokalkonvexen Raüme" Math.Zeit. 52 (5) (1950), 627-630

[5] J.S. e SILVA.- "Su certe classi di spazi localmente convessi importanti per le applicazioni " Rend.Mat. e Appl. Università di Roma V , 14 (1955) 338-410

[6] L.WAELBROECK .- "Fonctions differentiables et petite bornologie" Compte Rendus Acad. Sci. 267 (1968), 220-222

[7] K.YOSHINAGA.- " On a locally convex space introduced by JS e Silva " J.Sciences Hiroshima Univ.A,21 (2) (1957),89-98

Université de Bordeaux-I
U.E.R. de Mathématiques et Informatique
351, cours de la Libération
33405 TALENCE
(France)