MOHAMED SALAH BAOUENDI

# Itérés d'opérateurs elliptiques dégénérés et applications

*Mémoires de la S. M. F.*, tome 31-32 (1972), p. 35-38
<http://www.numdam.org/item?id=MSMF_1972__31-32__35_0>

Colloque Anal. fonctionn. [1971, Bordeaux]
Bull. Soc. math. France,
Mémoire 31-32, 1972, p. 35-38.

# ITÉRÉS D'OPÉRATEURS ELLIPTIQUES DÉGÉNÉRÉS ET APPLICATIONS

par

Mohamed Salah BAOUENDI

Professeur visiteur à l'Université de Nice en 1970-71

Les résultats exposés ici se trouvent dans deux articles publiés en collaboration avec C. GOULAOUIC (*). On se limite à quelques énoncés ; pour les démonstrations détaillées et la bibliographie complète, on renvoie à ces deux articles.

1. - Soient $\Omega$ un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ et $\varphi$ une fonction de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$, analytique dans un voisinage de $\overline{\Omega}$ et telle que :

$$\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n \ ; \quad \varphi(x) > 0\}$$

$$\partial\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n \ ; \quad \varphi(x) = 0\}$$

$$d\,\varphi(x) \neq 0 \quad \text{pour} \quad x \in \partial\Omega .$$

On considère la forme intégro-différentielle définie pour $u, v \in \mathcal{D}(\Omega)$

$$a_1(u,v) = \sum_{\substack{|\alpha| \leqslant 1 \\ |\beta| \leqslant 1}} \int_\Omega a_{\alpha\beta}(x) \quad \varphi(x)\, D^\alpha u(x)\, \overline{D^\beta v(x)}\, dx .$$

On suppose que les coefficients $a_{\alpha\beta}$ sont analytiques dans un voisinage de $\overline{\Omega}$ et qu'il existe une constante $\lambda > 0$ telle que l'on ait, pour tout $u \in \mathcal{D}(\Omega)$,

$$\operatorname{Re} a_1(u,u) \geqslant \lambda \sum_{|\alpha| \leqslant 1} \| \varphi^{1/2} \ D^\alpha u \|^2_{L^2(\Omega)} .$$

Pour $1 \leqslant j \leqslant n$ et $1 \leqslant k \leqslant n$, on note :

$$\Lambda_{kj} = \frac{\partial\varphi}{\partial x_k} D_j - \frac{\partial\varphi}{\partial x_j} D_k$$

et

$$a_2(u,v) = a_1(u,v) + \sum_{k,j} \int_\Omega (\Lambda_{kj}\, u)\,(x)\,\overline{(\Lambda_{kj}\, v)\,(x)}\, dx .$$

(*) M. S. BAOUENDI et C. GOULAOUIC :

(1) : Etude de l'analycité et de la régularité Gevrey pour une classe d'cpérateurs elliptiques dégénérés ; Ann. Sc. E. N. S. t. 4 ; fasc. 1, 1971.

(2) : Régularité analytique et itérés d'opérateurs elliptiques dégénérés ; applications. A paraître : Journal of Functional Analysis.

Enfin, on désigne par $\mathcal{A}_1$ et $\mathcal{A}_2$ les opérateurs différentiels associés aux formes $a_1$ et $a_2$ :

$$\mathcal{A}_1 = \sum_{\substack{|\alpha|\leqslant 1\\ |\beta|\leqslant 1}} D^\beta a_{\alpha\beta} \varphi D^\alpha$$

$$\mathcal{A}_2 = \mathcal{A}_1 + \sum_{k,j} \Lambda^*_{k,j} \Lambda_{k,j} .$$

On peut démontrer le résultat suivant :

THEOREME 1. - <u>Pour</u> $i = 1, 2$, <u>l'opérateur</u> $\mathcal{A}_i$ <u>est un isomorphisme de</u> $\mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega})$ <u>sur lui-même, et de</u> $\mathcal{A}(\overline{\Omega})$ <u>sur lui-même</u> (**) .

2. - Nous allons introduire maintenant des espaces de fonctions voisins des classes de Gevrey sur $\overline{\Omega}$. Pour $s$ réel $\geqslant 1$, on désigne par $\mathcal{A}_s(\overline{\Omega})$ l'espace des fonctions $u$ vérifiant :

i) $u \in \mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega})$ ,

ii) $u \in G_s(\Omega)$ (classe de Gevrey d'ordre $s$ dans $\Omega$) .

iii) Pour toute carte locale $V$ , voisinage d'un point du bord $\Omega$ , où les variables tangentielles et normales sont notées respectivement $x$ et $y$ , il existe $M>0$ (dépendant de $u$) telle que l'on ait pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^{n-1}$ et $k \in \mathbb{N}$

$$\|(D_y\, y\, D_y)^k D_x^\alpha u\|_{L^2(V)} \leqslant M^{2k+|\alpha|+1} \left((2k+|\alpha|)\,!\right)^s .$$

Grâce à une inégalité de Hardy, on peut montrer les inclusions

$$G_s(\overline{\Omega}) \subset \mathcal{A}_s(\overline{\Omega}) \subset G_{2s-1}(\overline{\Omega}) .$$

En particulier, on a :

$$\mathcal{A}_1(\overline{\Omega}) = \mathcal{A}(\overline{\Omega}) .$$

Nous avons alors la caractérisation :

---

(**) On désigne par $\mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega})$ (resp. $\mathcal{A}(\overline{\Omega})$) l'espace des restrictions à $\overline{\Omega}$ de fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ (resp. analytiques) au voisinage de $\overline{\Omega}$ .

THEOREME 2. - <u>Soient</u> $u \in \mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega})$ <u>et</u> $s \geqslant 1$ ; <u>les deux propriétés suivantes sont équivalentes</u> :

i) $u \in \mathcal{a}_s(\overline{\Omega})$ ,

ii) <u>il existe</u> $L>0$ <u>telle que l'on ait pour tout</u> $k \in \mathbb{N}$ :

$$\|\mathcal{a}_2^k u\|_{L^2(\Omega)} \leqslant L^{k+1}(2k!)^s .$$

Ce théorème est une généralisation de résultats dûs à Kotaké-Narashiman et Lions-Magenes.

Pour $s = 1$ , il donne, en particulier, une caractérisation des fonctions analytiques sur $\overline{\Omega}$ à l'aide des itérés de $\mathcal{a}_2$ .

Notons que le théorème 2 serait faux (même pour $s = 1$) si on avait remplacé $\mathcal{a}_2$ par $\mathcal{a}_1$ . Pour le voir, il suffit de prendre pour $\Omega$ le disque unité dans $\mathbb{R}^2$ ,

$$\mathcal{a}_1 = - \sum_{i=1}^{2} \frac{\partial}{\partial x_i} (1-r^2) \frac{\partial}{\partial x_i} + 1 .$$

On prend alors une fonction $u \in G_2(\overline{\Omega})$ , holomorphe dans $\Omega$ , $u \notin \mathcal{a}(\overline{\Omega})$ . On vérifie aisément qu'il existe $L>0$ telle que pour tout $k \in \mathbb{N}$ :

$$\|\mathcal{a}_1^k u\|_{L^2(\Omega)} \leqslant L^{k+1} \; 2k! .$$

3. - Nous allons donner ici quelques applications du théorème 2. Désormais, nous supposerons $\mathcal{a}\,( = \mathcal{a}_2)$ auto-adjoint. Son spectre est alors formé d'une suite $(\lambda_j)$ de valeurs propres strictement positives que l'on numérote dans l'ordre croissant, et qui tend vers l'infini avec $j$ . Nous notons $(w_j)$ une base orthonormée dans $L^2(\Omega)$ de fonctions propres de $\mathcal{a}$ associées aux $(\lambda_j)$ , (nous avons $w_j \in \mathcal{a}(\overline{\Omega})$) , et $J$ l'application qui, à tout $f \in L^2(\Omega)$ fait correspondre la suite $(f_j)$ de ses coefficients de Fourier sur la base $(w_j)$ . Nous avons :

THEOREME 3. - <u>La suite</u> $(\lambda_j)$ <u>des valeurs propres de</u> $\mathcal{a}$ <u>vérifie</u>

$$\lambda_j \sim K\, j^{2/n} \quad \underline{\text{quand}} \quad j \to +\infty$$

<u>où</u> $K$ <u>est une constante positive dépendant du symbole de</u> $\mathcal{a}$ .

On remarque que le comportement de $(\lambda_j)$ est le même que dans le cas d'un problème elliptique.

On peut déduire des théorèmes 1, 2, et 3 :

THEOREME 4. - La restriction de l'application $J$ est un isomorphisme de $\mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega})$ sur l'espace $\mathcal{S}$ des suites à décroissance rapide, et pour tout $s \geqslant 1$, de $\mathcal{A}_s(\overline{\Omega})$ sur $\varinjlim_{a>1} \ell^2_{a^{j/sn}}$ (****).

Grâce au théorème 4, et en utilisant une méthode introduite par Goulaouic, on peut montrer que $\mathcal{A}_s(\overline{\Omega})$, pour $s > 1$, est un espace d'interpolation entre $\mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega})$ et $\mathcal{A}(\overline{\Omega})$. D'autres résultats d'interpolation peuvent être déduits du théorème 4.

Signalons, aussi, que dans le cas où $\Omega$ est une boule de $\mathbb{R}^n$, le théorème 4 peut s'énoncer en terme d'approximation polynômiale. En particulier, on obtient une caractérisation des fonctions $\mathcal{C}^\infty$ et analytiques sur $\overline{\Omega}$ en fonction de leurs distances aux polynômes. Nous renvoyons pour le détail aux articles déjà cités.

---

(****) Si $P(j)$ est une suite de nombres réels positifs, on note :

$$\ell^2_{P(j)} = \{(f_j) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \; ; \; \sum_{j=0}^{\infty} |f_j|^2 \; P(j) < +\infty\} .$$

Department of Mathematics
Purdue University
LAFAYETTE, Ind. 47907-USA
(Etats-Unis)