PHILIPPE TURPIN

Sur un problème de S. Simons concernant les bornés des espaces vectoriels topologiques

Mémoires de la S. M. F., tome 31-32 (1972), p. 381-387
<http://www.numdam.org/item?id=MSMF_1972__31-32__381_0>

Colloque Anal. fonctionn.[1971, Bordeaux]
Bull. Soc. math. France,
Mémoire 31-32, 1972, p. 381-387.

SUR UN PROBLEME DE S. SIMONS CONCERNANT LES BORNES DES ESPACES VECTORIELS TOPOLOGIQUES

par

Philippe TURPIN

1. S. Simons demande dans [12] quels sont les espaces vectoriels topologiques E (réels ou complexes, non supposés localement convexes) dont les sous-ensembles bornés sont exactement ceux sur lesquels toute F-semi-norme continue de E est bornée, ensembles (caractérisés dans la définition 1 ci-dessous) que nous appelons "additivement bornés". Rappelons qu'une F-semi-norme de E est une application $r : E \to [0, \infty[$ vérifiant $r(x + y) \leqslant r(x) + r(y)$ et, pour a scalaire, $r(ax) \to 0$ quand $a \to 0$ et $r(ax) \leqslant r(x)$ quand $|a| \leqslant 1$ (toute topologie vectorielle (d'espace vectoriel topologique) peut être définie par une famille de F-semi-normes). S. Simons démontre que E a cette propriété s'il admet (propriété (i)) un système fondamental $\mathcal{U}$ de voisinages de l'origine tel que tout $U \in \mathcal{U}$ absorbe $U + U$ (espaces appelés "upper bound spaces" dans [12], semi-convexes dans [5], localement pseudo-convexes dans [13]). On observe dans [5] que la propriété (i) n'est pas nécessaire, au moins pour les espaces non métrisables. On donne ici, d'abord quelques exemples simples d'espaces possédant des ensembles additivement bornés et non bornés puis divers espaces vérifiant la propriété de S. Simons dont certains, bien que métrisables, sont loin de vérifier (i) (proposition 3). Signalons un problème voisin ([7]) où l'on ne considère que les F-semi-normes p-homogènes, $0 < p \leqslant 1$.

2.1. DEFINITION 1. - Une partie B d'un espace vectoriel topologique E est dite additivement bornée quand elle vérifie les propriétés équivalentes ci-dessous.

a) Pour tout voisinage de l'origine U dans E il existe un entier $n \geqslant 1$ tel que $B \subset U + \dots + U$ (n termes).

b) Pour toute F-semi-norme continue r sur E , $\sup_{x \in B} r(x) < \infty$.

L'équivalence de a) et b) est connue (cf. [2]). Elle résulte du fait que si U_k , $-\infty < k < \infty$, k entier, est une famille de parties équilibrées et absorbantes de E vérifiant $U_{k+1} + U_{k+1} \subset U_k$, il existe une F-semi-norme r de E telle que :

$$r(x) < 2^{-k} \Rightarrow x \in U_k \Rightarrow r(x) \leqslant 2^{-k} .$$

Dans les produits ou sommes directes topologiques ([4]) les ensembles additivement bornés se déduisent des ensembles additivement bornés des facteurs ou cofacteurs comme le font les bornés.

Rappelons qu'on dit que $B \subset E$ est borné quand pour tout voisinage de l'origine U dans E il existe un scalaire a tel que $B \subset aU$. Il est clair que tout ensemble borné est additivement borné, que la réciproque est vraie si E est localement convexe. Les exemples qui suivent montrent que la réciproque est fausse en général.

2.2. Soit ρ une application croissante de $[0, \infty[$ dans $[0, \infty[$, continue en 0, nulle en 0 et seulement en 0. Soit m une mesure positive sur une tribu de parties d'un ensemble T et soit :

$$L^{*\rho}(m) = \{ f \mid \|f\| = \inf \{ a > 0 \mid \int \rho\,(\frac{|f(t)|}{a})dm(t) \leqslant a\} < \infty \} ,$$

f m-classe de fonctions scalaires m-mesurables. $L^{*\rho}(m)$ ([8]) est un espace vectoriel et on le munit de la F-norme $\|\cdot\|$. Alors, si m est une mesure sans atome ou bien si m est la mesure cardinale de l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers (en supposant dans ce dernier cas que $\operatorname{Sup}_x \rho(x) = \infty$, ce qui ne restreint pas la généralité), un ensemble $B \subset L^{*\rho}(m)$ est additivement borné si et seulement si $\operatorname{Sup}_{f \in B} \|f\| < \infty$. Ainsi quand $L^{*\rho}(m)$ n'est pas localement borné (voir dans [3], [8], [11], des conditions pour qu'il en soit ainsi) il contient un ensemble additivement borné et non borné. Par exemple, comme on le remarque dans [12] et [2], l'espace des fonctions mesurables-Lebesgue sur $(0,1)$ muni de la topologie de la convergence en mesure est lui-même additivement borné.

2.3. Si, pour $n \in N$, $0 < p_n \leqslant 1$ et $p_n \to 0$, et si

$$l^{(p_n)} = \{ x = (x_n) \mid \|x\| = \Sigma\, |x_n|^{p_n} < \infty \} ,$$

cet espace vectoriel étant muni de la topologie définie par la F-norme $\|\cdot\|$, $B \subset l^{(p_n)}$ est additivement borné si et seulement si $\|B\| = \operatorname{Sup}_{x \in B} \|x\| < \infty$ et $\operatorname{Sup}_{x \in B} |x_n|^{p_n} \to 0$ alors que ([1]) B est borné si et seulement si $\|B\| < \infty$ et $\operatorname{Sup}_{x \in B} \Sigma_N^\infty |x_n|^{p_n} \to 0$ quand $N \to \infty$.

3.1. **PROPOSITION 1.** - <u>Soit E un espace vectoriel topologique, soit $\mathcal{U}$ le filtre de ses voisinages de l'origine et considérons les assertions suivantes.</u>

(i) Tout $U \in \mathcal{U}$ contient un $V \in \mathcal{U}$ qui absorbe $V + V$.

(ii) Pour tout $U \in \mathcal{U}$ il existe $V \in \mathcal{U}$ et une suite $\lambda_i > 0$, $i \geq 1$, telle que

(1) $$\forall\, n \geq 1 \,,\quad \Sigma_{i=1}^{n} \lambda_i V \subset U$$

(iii) Pour tout $U \in \mathcal{U}$ il existe $V \in \mathcal{U}$ tel que

(2) $$\forall\, n \geq 1 \,,\quad U \text{ absorbe } V + \dots + V \ (n \text{ termes}) .$$

(iv) Un sous-ensemble de E est additivement borné si et seulement si il est borné.

Alors (i) ⇒ (ii) ⇒ (iii) ⇒ (iv) .

<u>Démonstration</u> : On sait ([10], [12], [13]) que E vérifie (i) si et seulement si quand $U \in \mathcal{U}$ est donné on peut trouver $V \in \mathcal{U}$ et $p>0$ tels que (1) soit vérifié dès que $\Sigma|\lambda_i|^p \leq 1$. Donc (i) implique (ii). Les autres implications sont triviales.

Nous allons voir qu'aucune des implications réciproques n'est vraie.

3.2. PROPOSITION 2. - Soit (B_k) une suite de sous-ensembles d'un espace vectoriel E dont la réunion engendre E. Munissons E de la topologie vectorielle la plus fine pour laquelle chaque B_k est borné. Alors E vérifie (ii).

<u>Démonstration</u> : On peut supposer que les B_k sont équilibrés et vérifient $B_k + B_k \subset B_{k+1}$. On voit alors ([13]) que E admet comme système fondamental de voisinages de l'origine les

$$U((c_k)) = \bigcup_{K \geq 1} \Sigma_1^K \, c_k B_k , \quad c_k > 0.$$

(c_k) donnée, si $u(i,k) = \frac{1}{2}(i + k)(i + k + 1) + i$, il existe une suite $\lambda_i > 0, i \geq 1$, telle que $\lambda_i \lambda_k \leq c_{u(i,k)}$. Alors

$$\sum_{i \leq n} \lambda_i U((\lambda_k)) \subset \bigcup_K \sum_{i \leq n} \sum_{k \leq K} c_{u(i,k)} B_{u(i,k)} \subset U((c_k))$$

car $k \leq u(i,k)$ et u est injective. cqfd.

E ne vérifie généralement pas (i). Par exemple si $E = \bigcup_{k<\infty} L^{\frac{1}{k}}(o,1)$ muni de la topologie vectorielle la plus fine rendant bornées toutes les injections $L^{\frac{1}{K}} \to E$, E est séparé mais toute application linéaire continue de E dans un espace séparé vérifiant (i) est nulle ([13]).

Autre exemple : si E est de dimension infinie et est muni de la topologie vectorielle la plus fine rendant bornée l'une de ses bases de Hamel, on constate que le choix de la suite $\lambda_i > 0$ vérifiant (1) dépend nécessairement du choix de U alors que si E vérifiait (i) toute suite $(\lambda_i) \in \bigcap_{p>0} l^p$ conviendrait pour tout U.

3.3. On démontre que si l'espace E de la proposition 2 est métrisable, il est localement borné et donc vérifie (i). Mais il existe des espaces métrisables vérifiant (ii) sans vérifier (i). Par exemple soit $0 < p_k \leqslant 1$, $k = 1, 2, \ldots$, et soit $F(p_k)$ l'espace des suites $(f_k) \in \prod_{1 \leqslant k} L^{1/k}(0,1)$ telles que

$$\| f_k \|_k = \left[\int_0^1 | f_k(x) |^{\frac{1}{k}} dx\right]^{p_k}$$

tend vers 0, muni de la F-norme $\| (f_k) \| = \operatorname{Sup}_k \| f_k \|_k$. Alors $F(p_k)$ ne vérifie pas (i) et vérifie (ii) si $p_k \to 0$, une suite λ_i vérifiant (1) quel que soit U (pour un V dépendant de U) si et seulement si $\operatorname{Sup}_k [\Sigma_i |\lambda_i|^{1/k}]^{p_k} < \infty$.

3.4. <u>Proposition 3</u>. Il existe un espace métrisable vérifiant (iii) et ne vérifiant pas (ii). Plus précisément soit une suite $\mu_n > 0$, avec $n\,\mu_n \to 0$. Il existe alors un espace vectoriel topologique métrisable E qui ne satisfait pas à (ii) mais tel que pour tout voisinage de l'origine U il existe un voisinage de l'origine V vérifiant

$$(3) \qquad \bigcup_{1 \leqslant n} \mu_n \underbrace{(V + \ldots + V)}_{n \text{ termes}} \subset U$$

<u>Démonstration.</u> Soit φ l'espace vectoriel des suites scalaires identiquement nulles à partir d'un certain rang muni de la topologie de la convergence simple : φ est un espace localement convexe métrisable. Soit $e_i = (\delta_i^j)_j$, δ_i^j symbole de Kronecker. Soit A_0 l'enveloppe équilibrée de l'ensemble des e_i et soit A_k, $k \geqslant 0$, la suite de compacts de φ définie par

$$(4) \qquad A_{k+1} = \bigcup_{1 \leqslant n} \mu_n \underbrace{(A_k + \ldots + A_k)}_{n \text{ termes}} .$$

On se donne, pour tout $k \geqslant 0$, une suite fondamentale $U_{k,r}^0$, $r \geqslant 0$, de voisinages équilibrés de A_k, puis on construit, pour tous $k \geqslant 0$, $r \geqslant 0$, une suite fondamentale $U_{k,r}^s$, $s \geqslant 0$, de voisinages équilibrés de l'origine vérifiant

$$(5) \qquad \forall s \leqslant k, \quad U_{k,r}^s \text{ est un voisinage de } A_{k-s}$$

$$(6) \qquad \forall s, \quad \bigcup_{n \geqslant 1} \mu_n \underbrace{(U_{k,r}^{s+1} + \ldots + U_{k,r}^{s+1})}_{n \text{ termes}} \subset U_{k,r}^s .$$

$U^s_{k,r}$ construit pour un $s < k$, soit V un voisinage de l'origine convexe et équilibré tel que $2V \subset U^s_{k,r}$, soit N tel que $n\,\mu_n\, A_{k-s-1} \subset V$ pour $n \geqslant N$ et soit W, voisinage équilibré de A_{k-s-1}, tel que pour tout $n < N$, $U^s_{k,r} \supset \mu_n(W + \ldots + W)$ (n termes). On pose alors $U^{s+1}_{k,r} = W \cap (A_{k-s-1} + V)$. La construction se poursuit trivialement quand $s \geqslant k$.

Soit alors $E = \bigoplus_{k,r} \varphi_{k,r}$, avec $\varphi_{k,r} = \varphi$ pour tous k, r, et soit $U_s = E \cap \prod_{k,r} U^s_{k,r}$. On peut supposer que $\mu_2 = 1$. Alors, d'après (6), les U_s constituent une base de voisinages de l'origine pour une topologie métrisable sur E vérifiant (3). Soit λ_i vérifiant (1) avec $U = U_0$ et $V = U_s$.
Pour tous n et r, $\sum_{i \leqslant n} \lambda_i\, U^s_{s,r} \subset U^0_{s,r}$, d'où, puisque $e_i \in U^s_{s,r}$,

$$\Sigma^n_1\ \lambda_i\, e_i \subset \bigcap_r U^0_{s,r} = A_s.$$

Comme A_s est compact dans φ, $(\lambda_i) \in A_s$ et donc $\lambda_i = 0$ pour i grand. Donc E ne vérifie pas (ii).

<u>Remarque</u>. Tout espace métrisable vérifiant la propriété de la proposition 3 avec $\mu_n = 1/n$ est localement convexe ([9]).
On voit que cela se généralise mal. Par exemple cette propriété peut être vérifiée avec $\mu_n = n^{-1/p}$, $0 < p < 1$, sans que l'espace (même métrisable) soit localement p-convexe (au sens de [6] ou [13]).

3.5. <u>Proposition 4</u>. Soit E un espace vectoriel de dimension au moins égale à la puissance du continu et muni de la topologie vectorielle la plus fine. Alors E vérifie (iv) mais ne vérifie pas (iii).

<u>Démonstration</u>. E vérifie (iv) car, comme on le remarque dans [5], tout ensemble additivement borné de E est contenu dans un sous-espace de dimension finie. On démontre aussi dans [5] que E ne vérifie pas (i). En fait la méthode, très simple, de [5] permet aussi de montrer que E ne vérifie pas (iii). Mais il sera peut-être intéressant de donner une autre démonstration, plus explicite.

Soit $(e_i)_{i \in I}$ une base de Hamel de E, notons x_i la $i^{\text{ème}}$ coordonnée d'un point x de E. Soit Φ l'ensemble des applications de $[0, \infty[$ dans $[0, \infty[$ croissantes et sous-additives, continues en 0, nulles en 0 et seulement en 0, et soit, pour tout $i \in I$, $r_i \in \Phi$. Alors $r : x \to \sum_{i \in I} r_i(|x_i|)$ est une F-norme (nécessairement continue) de E (d'ailleurs on voit aisément que la topologie de E peut être définie par l'ensemble des F-normes de cette forme, quand (r_i) parcourt Φ^I). Supposons que $U = \{x \in E \mid r(x) \leq 1\}$, $\mu_n \geq 0$ et V, ensemble absorbant dans E, vérifient (3). Pour tout $i \in I$ il existe $e_i > 0$ tel que $c_i e_i \in V$. Pour tout n l'ensemble I_n des $i \in I$ tels que $nr_i(\mu_n c_i) \geq 1$ contient au plus n éléments car

$$\sum_{i \in I_n} r_i (\mu_n c_i) = r(\mu_n \sum_{i \in I_n} c_i e_i) \leq 1 .$$

Donc l'ensemble des $i \in I$ tels que $nr_i(\mu_n c_i) \to \infty$ quand $n \to \infty$ est fini ou dénombrable. Si on a choisi l'application $i \to r_i$ de I dans Φ surjective, cela implique que $\mu_n = 0$ pour n grand. Donc E ne vérifie pas (iii).

Problème. Existe-t-il un espace vectoriel topologique métrisable vérifiant (iv) mais ne vérifiant pas (iii) ? (*)

(*) La réponse est positive.

BIBLIOGRAPHIE

[1] B.A. Barnes and A.K. Roy, Boundedness in certain topological linear spaces, Studia Math. 33 (1969), 147-156.

[2] C. Bessaga, A. Pelczynski and S. Rolewicz, Somme properties of the norm in F-spaces, Studia Math. 16 (1957), 183-192.

[3] B. Gramsch, Die Klasse metrischer linearer Räume $\mathcal{L}\Phi$, Math. Annalen 171 (1967), 61-78.

[4] S.O. Iyahen, On certain classes of linear topological spaces, Proc. London Math. Soc. 18 (1968), 285-307.

[5] S.O. Iyahen. Semiconvex spaces, Glasgow Math. J. 9 (1968), 111-118.

[6] M. Landsberg, Lineare topologische Räume, die nicht lokalkonvex sind, Math. Zeitschr. 65 (1956), 104-112.

[7] J.P. Ligaud, Sur les rapports entre topologies et bornologies pseudo-convexes, C.R. Acad. Sc. Paris 271 (1970) 1058-1060.

[8] W. Matuszewska and W. Orlicz, A note on the theory of s-normed spaces of φ-integrable functions, Studia Math. 21 (1961), 107-115.

[9] S. Mazur et W. Orlicz, Sur les espaces métriques linéaires I, Studia Math. 10 (1948) 184-208.

10 D. Przeworska-Rolewcz and S. Rolewicz, Equations in linear spaces, Monografie Matematyczne, Varsovie, 1958, p. 141.

11 S. Rolewicz, Some remarks on the spaces N(L) and N(l), Studia Math. 18 (1959), 1-9.

12 S.Simons, Boundedness in linear topological spaces, Trans. Amer. Math. Soc. 113 (1964), 169-180.

13 L.Waelbroeck, Topological vector spaces and algebras, Lecture Notes in Mathematics, Springer, Berlin, à paraître.

Mathématiques, Bâtiment 425
Université de Paris-Sud
91 - ORSAY (France)