

MÉMOIRES DE LA S. M. F.

PIERRETTE CASSOU-NOGUES

Formes linéaires p -adiques et prolongement analytique

Mémoires de la S. M. F., tome 39-40 (1974), p. 23-26

<http://www.numdam.org/item?id=MSMF_1974__39-40__23_0>

© Mémoires de la S. M. F., 1974, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Mémoires de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Memoires/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

FORMES LINEAIRES p-ADIQUES ET PROLONGEMENT ANALYTIQUE

Pierrette CASSOU-NOGUES

Soit \mathbb{C}_p le complété d'une clôture algébrique de \mathbb{Q}_p , \mathcal{O}_p son anneau de valuation et \mathfrak{m}_p son idéal de valuation.

On considère une extension abélienne réelle finie de \mathbb{Q}, K , et les fonctions L p-adiques de K qui sont définies (lorsque $p \neq 2$) par :

$$L_p(1-m, \chi) = (1-\chi(p)p^{m-1}) L(1-m, \chi)$$

pour m entier positif, $m \equiv 0 \pmod{p-1}$, où $L(\cdot, \chi)$ désigne la fonction L de Dirichlet relative au caractère primitif χ du corps K. Soit ε_p la fonction continue multiplicative définie par :

$$\varepsilon_p(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in p\mathbb{Z}_p \\ 1 & \text{si } x \in \mathbb{Z}_p - p\mathbb{Z}_p ; \end{cases}$$

alors :

$$L_p(1-m, \chi) = L(1-m, \chi \varepsilon_p)$$

pour m entier positif $m \equiv 0 \pmod{p-1}$.

On peut montrer [2], [3] le lien qui existe entre deux méthodes d'étude des fonctions L_p , celle de T. Kubota et H.W. Leopoldt [4] et celle de Y. Amice et J. Fresnel [2].

Soit f_m la fonction définie par $f_m(x) = x^m$, posons :

$$J_{\chi \varepsilon_p}(f_m) = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{p^r f_1} \sum_{n=1}^{p^r f_1} \chi(n) \varepsilon_p(n) n^m$$

$f_1 = \text{ppcm}(p, f(\chi))$, $f(\chi)$ étant le conducteur de χ .

T. Kubota et H.W. Leopoldt ont montré que :

$$J_{\chi \varepsilon_p} \left(\frac{f}{m} \right) = \frac{B^m(\chi \varepsilon_p)}{m} = -L_p(1-m, \chi)$$

où $B^m(\chi \varepsilon_p)$ est le $m^{\text{ième}}$ nombre de Bernoulli relatif au caractère $\chi \varepsilon_p$.

Y. Amice et J. Fresnel ont étudié les fonctions L_p comme les analogues p -adiques des séries complexes $\sum_{n=1}^{\infty} \chi(n) \varepsilon_p(n) n^{m-1}$. Ils considèrent la série de

Taylor $\sum_{n=1}^{\infty} \chi(n) \varepsilon_p(n) n^{m-1} T^n$, convergente dans le disque de centre 0 et de rayon 1^-

et montrent qu'elle est prolongeable dans un quasi-connexe qui contient 0 et 1, en une fonction analytique $I_{\chi \varepsilon_p}(f_{m-1})(.)$ et que l'on a :

$$I_{\chi \varepsilon_p}(f_{m-1})(1) = - \frac{B^m(\chi \varepsilon_p)}{m} = L_p(1-m, \chi).$$

Donc on obtient l'égalité :

$$I_{\chi \varepsilon_p}(f_{m-1})(1) = - J_{\chi \varepsilon_p} \left(\frac{f}{m} \right) = - \frac{B^m(\chi \varepsilon_p)}{m}.$$

Nous allons montrer comment on peut obtenir directement cette égalité sans faire intervenir les nombres de Bernoulli. En utilisant les sommes de Gauss et :

$$\chi(n) = \chi(-1) \frac{\tau(\chi)}{f(\chi)} \sum_{a=1}^{f(\chi)} \bar{\chi}(a) Z_f^{an},$$

on peut se ramener au problème suivant.

Etant donné la série de Taylor $\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_p(n) n^{m-1} T^n$ peut-on la prolonger en une fonction analytique $I_{\chi}(\varepsilon_p, f_{m-1})(.)$ dans un quasi-connexe qui contient 0 et les racines $f(\chi)^{\text{ième}}$ de l'unité et a-t-on :

$$I(\varepsilon_p, f_{m-1})(Z_f^a) = - J(\varepsilon_p, \frac{f}{m})(Z_f^a)$$

pour toutes les racines $f(\lambda)$ i^{ème} de l'unité, où :

$$J\left(\varepsilon_p \frac{f}{m}\right)(T) = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{p^r f_1} \sum_{n=1}^{p^r f_1} \varepsilon_p(n) \frac{n^m}{m} T^n ?$$

On traite ce problème en utilisant des fonctions f uniformément dérivables. On montre d'une part que

$$J(f)(T) = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{1}{p^\lambda} \sum_{n=1}^{p^\lambda} f(n) T^n$$

se développe en série de Taylor en $(1-T)$ convergente dans $1 + \mathcal{K}_p$ pour λ entier naturel quelconque. D'autre part on considère les séries de Taylor $\sum_{n=1}^{\infty} f(n) T^n$ et $\sum_{n=1}^{\infty} f'(n) T^n$; f et f' étant continues on sait d'après [2] que l'on peut les prolonger en des fonctions analytiques dans $O_p - (1 + \mathcal{K}_p)$, $I(f)(.)$ et $I(f')(.)$. Ces fonctions analytiques sont définies par des séries de Laurent en $(1-T)$. On montre que l'on peut faire le produit des séries de Laurent en $(1-T)$ qui définissent dans leur domaine de convergence $I(f)(T)$ et $\text{Log } T$ et que la série de Laurent en $1-T$

$$I(f')(T) + I(f)(T) \text{Log } T$$

est en fait une série de Taylor en $1-T$ convergente dans $1 + \mathcal{K}_p$. On a de plus dans $1 + \mathcal{K}_p$:

$$J(f)(T) = - I(f')(T) - I(f)(T) \text{Log } T.$$

On retrouve bien la formule cherchée dans le cas où T est une racine de l'unité et où $f = \varepsilon_p \frac{f}{m}$. Pour les unités de O_p qui ne sont pas dans $1 + \mathcal{K}_p$, on peut définir un prolongement fonctionnel de $J(f)(.)$ et l'on a encore la même formule où Log désigne le prolongement fonctionnel du logarithme à $O_p - (1 + \mathcal{K}_p)$.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] AMICE, Y. et FRESNEL, J. Fonctions zêta p-adiques des corps de nombres abéliens réels. Acta Arithmetica 20 n°4 pp. 353-384.
- [2] CASSOU-NOGUES, P. Formes linéaires p-adiques et prolongement analytique. Thèse 3ème cycle (polycopié), Université de Bordeaux 1, 1971.
- [3] CASSOU-NOGUES, P. Formes linéaires p-adiques et prolongement analytique. C.R.A.S. Paris; t. 254, (3 janvier 1972), p. 5-8.
- [4] KUBOTA, T. et LEOPOLDT, H.W. Eine p-adische theorie der Zetawerte. Journal für die reine und ang. Math. t. 214/215, 1964, p. 328-339.

Université de Bordeaux I
U.E.R. de Mathématiques
et d'Informatique
351, cours de la Libération
33405 TALENCE
