MÉMOIRES DE LA S. M. F.

MICHEL RAYNAUD

Géométrie analytique rigide d'après Tate, Kiehl...

Mémoires de la S. M. F., tome 39-40 (1974), p. 319-327
<http://www.numdam.org/item?id=MSMF_1974__39-40__319_0>

Table Ronde Anal. non archim. (1972, Paris)
Bull. Soc. math. France,
Mémoire 39-40, 1974, p. 319-327

GEOMETRIE ANALYTIQUE RIGIDE D'APRES TATE, KIEHL,..

Michel RAYNAUD

Soient R un anneau de **valuation** complet, de hauteur 1, K son corps des fractions, k son corps résiduel, a un élément non nul de l'idéal maximal, $|\ |$ une valeur absolue sur K. Pour les applications, il semble que les deux cas les plus importants soient les suivants :

a) le cas "arithmétique" où R est un anneau de valuation discrète. On prend alors pour a une uniformisante de R.

b) le cas "géométrique", où K est algèbriquement clos (auquel cas le groupe de la valuation est un groupe divisible).

Soient r un entier $\geqslant 0$ et D^r le polydisque unité fermé de K^r :

$$D^r = \{(z_1,\dots,z_r) \in K^r \text{ , tels que } |z_i| \leqslant 1 \text{ pour } i=1,\dots,r\}.$$

On a (au moins) deux notions possibles de fonctions analytiques sur D^r :

a) <u>Définition molle</u>. <u>Une fonction</u> $f : D^r \longrightarrow K$ <u>est analytique si elle est développable en série entière au voisinage de chacun des points de</u> D^r.

b) <u>Définition forte</u>. <u>Une fonction</u> $f : D^r \longrightarrow K$ <u>est analytique si</u> f <u>est globalement sur</u> D^r <u>somme d'une série entière</u> :

$$f = \sum a_\alpha \underline{T}^\alpha \qquad \alpha \in N^r \text{ , } a_\alpha \in K \text{ , } |a_\alpha| \longrightarrow 0 \ \underline{\text{quand}}\ |\alpha| \longrightarrow +\infty$$

Comme K est un corps valué non archimédien, on peut recouvrir D^r par des polydisques de polyrayon < 1 qui sont disjoints. Par suite la définition b) ne fournit pas une notion de nature locale.

Toutefois, on peut mettre en évidence des recouvrements ouverts particuliers, pour lesquels les fonctions analytiques, au sens fort, se recollent. Ainsi, considérons le disque unité fermé D comme réunion du disque $D' = \{ |z| \leq |a| \}$ et de la couronne $C = \{|a| \leq |z| \leq 1\}$. Il est immédiat qu'une série entière convergente sur D s'obtient par recollement sur $C \cap D'$ (couronne d'épaisseur nulle, de rayon $|a|$) d'une série entière convergente sur D' et d'une série de Laurent convergente sur C.

Dans la première partie de cet exposé, nous allons généraliser la notion de fonction analytique au sens fort, en remplaçant les polydisques par des "espaces affines" et nous mettrons en évidence une large classe de recouvrements ouverts qui possèdent la propriété de recollement.

1. Espaces rigides affines et fonctions holomorphes.

1.1. Algèbres de Tate.

Pour tout entier $r \geq 0$, soit $K\{\underline{T}\}$, où $\underline{T} = (T_1, \dots, T_r)$, l'anneau des séries convergentes sur le polydisque unité fermé D^r

$$f = \sum a_\alpha \underline{T}^\alpha \qquad a_\alpha \in K \ , \quad a_\alpha \longrightarrow 0 \quad \text{quand} \quad |\alpha| \longrightarrow +\infty \quad .$$

C'est une algèbre de Banach pour la norme $\|f\| = \sup |a_\alpha|$. Tout idéal de $K\{\underline{T}\}$ est fermé et de type fini [4] , et en particulier $K\{\underline{T}\}$ est noethérien. A un idéal I de $K\{\underline{T}\}$ est donc associée une algèbre de Banach quotient $K\{\underline{T}\}/I$. Tout morphisme entre deux telles K-algèbres est continu [4] et en particulier, la topologie de $K\{\underline{T}\}/I$ ne dépend pas de la présentation.

Définition 1. Une algèbre de Tate est une K-algèbre isomorphe à une K-algèbre de la forme $K\{\underline{T}\}/I$. La catégorie des espaces rigides affines est la catégorie opposée à celle des algèbres de Tate.

Soit X un espace rigide affine, donc défini par une algèbre de Tate $A = A(X)$. On associe à X un ensemble sous-jacent $|X|$ qui est le spectre maximal de A. En fait les idéaux maximaux de A sont les idéaux x tels que A/x soit un corps K(x), extension finie de K [4] . Comme K est complet, la valeur absolue de K se prolonge canoniquement à K(x). Donc si $f \in A$ et si $x \in |X|$, on peut parler de la valeur f(x) de f en x et de sa valeur absolue $|f(x)|$. Si on choisit une présentation $K\{\underline{T}\}/(f_1, \ldots, f_n)$ de A et une clôture algébrique $\bar{K}$ de K, l'ensemble $|X|$ s'identifie aux orbites du groupe de Galois de $\bar{K}/K$, opérant sur les points du polydisque unité de $\bar{K}^r$, qui annulent $f_1, \ldots, f_n$.

Définition 2. A(X) est l'anneau des "fonctions holomorphes" sur l'espace affine rigide X.

Comme d'habitude, tout élément f de A(X) définit une fonction sur l'ensemble $|X|$ $(x \longmapsto f(x))$, mais cette application n'est pas en général injective car A(X) peut avoir des éléments nilpotents.

1.2. Immersions ouvertes.

Soit $u : Y \longrightarrow X$ un morphisme d'espaces rigides affines, donc défini par un morphisme d'algèbres de Tate $A(X) \longrightarrow A(Y)$.

Définition 3. Le morphisme u est une immersion ouverte si

a) l'application sur les espaces sous-jacents déduite de u

$$|u| : |Y| \longrightarrow |X|$$

est injective.

b) Pour tout espace affine Z et tout morphisme $v : Z \longrightarrow X$ tel que $|v|$ se factorise à travers $|u|$, il existe un unique morphisme $w : Z \longrightarrow Y$ tel que $v = u\,w$.

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[rr, "u"] & & X \\ & Z \arrow[ul, dashed, "w"] \arrow[ur, "v"'] & \end{tikzcd}$$

(cf. [4]).

Exemples. Soient $f \in A = A(X)$ et b un élément non nul de K. L'ensemble des points x de $|X|$, tels que $|f(x)| \leq |b|$ (resp. $|f(x)| \geq |b|$) est sous-jacent à un ouvert affine de X d'algèbre $A\{T\}/f - Tb$ (resp. $A\{T\}/fT - b$).

Plus généralement, soient $f_1, \ldots, f_n$ des éléments de A sans zéros communs (donc qui engendrent l'idéal unité de A). Alors, pour tout $i=1,\ldots,n$, l'ensemble des points x de $|X|$ où $|f_i(x)|$ est maximum parmi les $|f_j(x)|$, $j=1,\ldots,n$ est sous-jacent à un ouvert affine X_i de X d'algèbre $A_i = A\{T_1, \ldots, T_n\}/J_i$ où J_i est l'idéal engendré par les éléments $f_j - T_j f_i$, $j=1,\ldots,n$. (Noter que l'image de f_i dans A_i est inversible).

Ceci étant, nous dirons qu'une famille d'immersions ouvertes $u_i : X_i \longrightarrow X$ est un recouvrement de l'espace rigide X si les $|u_i|\ |X_i|$ recouvrent $|X|$.

Exemple. Dans l'exemple ci-dessus, les ouverts affines X_i pour $i=1,\ldots,n$ recouvrent X. Un recouvrement de ce type sera appelé un recouvrement standard de X.

Si $u_i : X_i \longrightarrow X$ et $u_j : X_j \longrightarrow X$ sont deux immersions ouvertes affines, l'intersection $|u_i|\ |X_i| \cap |u_j|\ |X_j|$ est sous-jacente à une immersion ouverte affine $X_{ij} \longrightarrow X$, où X_{ij} n'est autre que le produit fibré $X_i \times_X X_j$.

Définition 4. Un recouvrement ouvert $u_i : X_i \longrightarrow X$, $i \in I$, possède la propriété de recollement si le début du complexe de Čech

$$0 \longrightarrow A(X) \longrightarrow \prod_{i \in I} A(X_i) \rightrightarrows \prod_{i,j \in I \times J} A(X_{ij})$$

est exact.

Théorème 1. Tout recouvrement affine fini d'un espace rigide affine possède la propriété de recollement.

(Plus généralement, un tel recouvrement a un complexe de Čech acyclique).

Théorème 2. Tout recouvrement affine fini de X peut être raffiné en un recouvrement standard.

* En bref, on peut retenir que la propriété de recollement pour les fonctions holomorphes vaut pour les recouvrements standard qui eux ont une signification très géométrique. Convenablement étendu aux faisceaux cohérents, le théorème 1 est à la base de la théorie cohomologique des espace rigides [2].

2. Espaces rigides et schémas formels.

La théorie que l'on vient d'esquisser porte sur des K-algèbres et l'anneau R des entiers ne semble pas jouer un grand rôle. Nous allons maintenant adopter un autre point de vue où au contraire les constructions fondamentales se font sur R, la théorie précédente se récupérant par produit tensoriel de R à K (ou encore, comme nous dirons par analogie avec la géométrie algébrique, par "passage à la fibre générique").

2.1. Schémas formels.

Considérons l'algèbre de Banach $K\{\underline{T}\}$ des fonctions holomorphes sur un polydisque unité. Sa boule unité est la sous-R-algèbre $R\{\underline{T}\}$ des séries $f = \sum a_\alpha \underline{T}^\alpha$ avec $a_\alpha \in R$, $a_\alpha \longrightarrow 0$. La K-algèbre $K\{\underline{T}\}$ se déduit de $R\{\underline{T}\}$ par tensorisation avec K

$$K\{T\} = R\{T\} \otimes_R K .$$

Si on réduit $R\{\underline{T}\}$ modulo un idéal non nul m de R on trouve l'anneau de polynômes $R/m[\underline{T}]$. En particulier, si $R_n = R/a^n$, on a $R\{\underline{T}\}/a^n R\{\underline{T}\} = R_n[\underline{T}]$ et

$$R\{\underline{T}\} = \varprojlim_n R_n[T]$$

(ce qui est la description usuelle des séries formelles restreintes).

Plus généralement, soit $A = K\{\underline{T}\}/I$ une algèbre de Tate. Alors I est de type fini, $I = (f_1, \ldots, f_n)$ et quitte à multiplier les f_i par une puissance convenable de a, on peut supposer que les f_i sont dans $R\{\underline{T}\}$. Soit $\mathfrak{J}$ l'idéal de $R\{\underline{T}\}$ engendré par $f_1, \ldots, f_n$. Considérons la R-algèbre $\mathcal{A} = R\{\underline{T}\}/\mathfrak{J}$. Alors $A = \mathcal{A} \otimes_R K$,

$\mathcal{A} = \varprojlim \mathcal{A}/a^n\mathcal{A}$ et, pour tout n, $\mathcal{A}/a^n\mathcal{A}$ est une R_n-algèbre de type fini.

<u>Définition 5. Une R-algèbre $\mathcal{A}$ est topologiquement de type fini si elle est isomorphe à une R-algèbre de la forme</u> $R\{\underline{T}\}/\mathfrak{J}$.

Soit $\mathcal{A}$ une R-algèbre topologiquement de type fini. Pour tout entier n, $\mathcal{A}_n = \mathcal{A}/a^n\mathcal{A}$ est une R_n-algèbre de type fini, à laquelle on peut associer le schéma de type fini sur R_n

$$\mathcal{X}_n = \mathrm{Spec}(\mathcal{A}_n).$$

Pour n variable les schémas $\mathcal{X}_n$ forment un système inductif de schémas ayant même espace sous-jacent (qui est aussi l'espace sous-jacent du k-Schéma Spec$(\mathcal{A}\otimes_R k)$. Ce système inductif définit un schéma formel $\mathcal{X}$; plus précisément, la catégorie des R-schémas formels affines est la catégorie opposée à celle des R-algèbres topologiquement de type fini (cf. EGA I). Plus généralement, un R-schéma formel $\mathcal{X}$ (non nécessairement affine), de type fini, est la donnée d'un système inductif de R_n-schémas de type fini $\mathcal{X}_n$, qui se "recollent", c'est-à-dire tels que

$$\mathcal{X}_{n+1} \otimes_{R_{n+1}} R_n \text{ "="} \mathcal{X}_n .$$

2. R-modèle d'un espace rigide affine.

Soient X un espace rigide affine, A son algèbre de Tate, $\mathcal{A}$ une R-algèbre topologiquement de type fini, telle que $A = \mathcal{A} \otimes_R K$ (on a vu qu'il en existait toujours). Enfin soit $\mathcal{X}$ le R-schéma formel défini par $\mathcal{A}$. Nous dirons que $\mathcal{X}$ est un R-modèle de X et que X est la fibre générique de $\mathcal{X}$ on écrira $X = \mathcal{X} \otimes_R K$. On a donc le diagramme suivant.

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{X} & \longrightarrow & X = \mathcal{X} \otimes_R K \\
\text{schéma formel affine} & & \text{espace rigide affine} \\
 & & \text{fibre générique de } \mathcal{X} \\
\Updownarrow & & \Updownarrow \\
\mathcal{A} & \longrightarrow & A = \mathcal{A} \otimes_R K \\
\text{R-algèbre topologiquement} & & \text{algèbre de Tate.} \\
\text{de type fini} & &
\end{array}$$

3. Interprétation des recouvrements.

Soit $\mathcal{X}$ un schéma formel affine d'algèbre $\mathcal{A}$, X sa fibre générique d'algèbre A. A tout recouvrement ouvert affine $\mathcal{X}_i \longrightarrow \mathcal{X}$, $i \in I$, de $\mathcal{X}$, est associé un recouvrement ouvert affine $X_i \longrightarrow X$ de X, par passage à la fibre générique, mais on n'obtient pas de cette façon le recouvrement affine le plus général de X. Cherchons maintenant à interpréter, en terme de schémas formels, un recouvrement standard de X.

Soient donc $f_1, \dots, f_n$ des éléments de A qui engendrent l'idéal unité de A. Quitte à multiplier les f_i par des puissances de a, on peut supposer que les f_i proviennent d'éléments de $\mathcal{A}$ que nous noterons encore f_i. Alors l'idéal $\mathfrak{I}$ de $\mathcal{A}$ engendré par $f_1, \dots, f_n$ contient une puissance de a. Considérons l'ouvert affine X_i de X où $|f_i|$ est maximum parmi les $|f_j|$. On a vu que son algèbre de Tate est

$A_i = A\{T_1, \ldots, T_n\}/J_i$ où J_i est l'idéal engendré par les $f_j - T_j f_i$ pour $j=1,\ldots,n$. Soit $\mathcal{A}_i$ la R-algèbre topologiquement de type fini égale à $\mathcal{A}\{T_1, \ldots, T_n\}/\mathcal{J}_i$ où $\mathcal{J}_i$ est l'idéal engendré par les $f_j - T_j f_i$. Enfin soit $\bar{\mathcal{A}}_i$ le quotient de $\mathcal{A}_i$ par son idéal de torsion, ensemble des éléments annulés par une puissance de a. Il est clair que l'idéal $\mathfrak{J}$ de $\mathcal{A}$, devient monogène dans $\mathcal{A}_i$ et engendré par un élément non diviseur de zéro dans $\bar{\mathcal{A}}_i$.

Or, en géométrie formelle, on dispose, grâce aux éclatements, d'une technique "universelle" pour rendre inversible un faisceau d'idéaux ([1] 5.1.). Ainsi, considérons le R-schéma formel $\mathcal{X}'$ au-dessus de $\mathcal{X}$, obtenu par complétion du schéma éclaté de l'idéal $\mathfrak{J}$ dans Spec($\mathcal{A}$). Alors l'idéal $\mathfrak{J}$ donne un faisceau d'idéaux inversible $\mathfrak{J}'$ dans $\mathcal{X}'$. Le schéma formel $\mathcal{X}'$ n'est pas nécessairement affine, mais il admet un recouvrement affine canonique par des ouverts $\mathcal{X}'_i$ où $\mathcal{X}'_i$ est le plus grand ouvert de $\mathcal{X}'$ au-dessus duquel $\mathfrak{J}'$ est engendré par l'image de f_i. On montre facilement que l'algèbre de $\mathcal{X}'_i$ n'est autre que $\bar{\mathcal{A}}_i$. Il en résulte que le recouvrement standard de X provient, par passage à la fibre générique, non pas d'un recouvrement ouvert de $\mathcal{X}$, mais d'un recouvrement ouvert de $\mathcal{X}'$, schéma éclaté de $\mathcal{X}$ suivant un idéal qui contient une puissance de a. C'est cette remarque qui est à l'origine des définitions suivantes.

3. Espaces rigides de type fini.

Soit $\mathfrak{F}$ la catégorie des R-schémas formels de type fini.

Définition 5. La catégorie E des K-espaces rigides, de type fini, quasi-séparés, est la catégorie déduite de $\mathfrak{F}$, en rendant inversibles les morphismes qui sont des éclatements d'idéaux contenant une puissance de a.

Autrement dit, les objets de E sont les objets de $\mathfrak{F}$ et une flêche $\mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{Y}$ dans E est un diagramme dans $\mathfrak{F}$.

$$\begin{tikzcd} \mathcal{X}' \arrow[d, "u"'] \arrow[dr] & \\ \mathcal{X} & \mathcal{Y} \end{tikzcd}$$

où u est un éclatement d'un faisceau d'idéaux de $\mathcal{X}$, contenant une puissance de a.

Définition 6. L'espace rigide X défini par un schéma formel $\mathcal{X}$ s'appelle la fibre générique de $\mathcal{X}$ et se note $\mathcal{X} \otimes_R K$. Si X est un espace rigide, tout schéma formel $\mathcal{X}$, dont la fibre générique est isomorphe à X s'appelle un R-modèle de X.

Les espaces rigides affines déjà définis s'identifient à la sous-catégorie pleine de E formée des objets qui admettent des R-modèles formels affines.

On peut montrer que la catégorie E est équivalente à la catégorie des espaces rigides au sens de Kiehl, (définis par recollement), qui sont réunion d'un nombre fini d'ouverts affines (i.e. de type fini) et tels que l'intersection de deux ouverts affines soit réunion d'un nombre fini d'ouverts affines (i.e. quasi-séparés). Les K-espaces rigides propres au sens de Kiehl [3] correspondent ici aux espaces rigides qui admettent des R-modèles propres (i.e. $\mathcal{X}_n$ est propre sur R_n pour tout n).

Terminons par une brève discussion sur la motivation de l'introduction des schémas formels.

Avantages : Choisir un R-modèle $\mathcal{X}$ d'un espace rigide X revient à décrire X à l'aide d'équations à coefficients entiers. Une telle structure entière existe souvent de façon naturelle et le fait de travailler avec $\mathcal{X}$ plutôt que X fournit des renseignements plus précis.

Par ailleurs, l'utilisation des schémas formels permet de ramener dans une large mesure la géométrie rigide à la géométrie formelle. Ainsi le théorème 1 et le théorème de finitude de la cohomologie cohérente d'un espace rigide propre [3] apparaissent comme des cas particuliers d'un théorème de Grothendieck (EGA III, 3.4.2).

Inconvénients : l'introduction des schémas formels apporte nécessairement certaines complications de nature technique et elle semble rapprocher la géométrie rigide de la géométrie algébrique plutôt que de la géométrie analytique (complexe). Par ailleurs, elle semble mal adaptée à traiter les espaces rigides qui ne sont pas de type fini. Il faut toutefois noter que dans certains cas, par exemple dans les travaux récents de Mumford, il est tout à fait naturel d'introduire des espaces rigides qui sont des fibres génériques de schémas formels, qui sont localement de type fini mais ne sont pas de type fini.

BIBLIOGRAPHIE

GROTHENDIECK, A. DIEUDONNE, J. Eléments de géométrie algébrique. Pub. I.H.E.S. n°4, 8,.. (cité EGA).

[1] GRUSON, L. RAYNAUD, M. Critères de platitude et de projectivité. Inventiones Math. 13 (1971).

[2] KIEHL, R. Theorem A und theorem B in der nichtarchimedischen Funktionen theorie - Invent. Math. 2 (1967).

[3] KIEHL, R. Der Endlichkeitssatz für eigentliche Abbildungen in der nichtarchimedischen theorie - Invent. Math. 2 (1967).

[4] TATE, J. Rigid analytic spaces - Invent. Math. 12 (1971).

M. RAYNAUD
Université Paris Sud
bâtiment 425
91 - ORSAY