MÉMOIRES DE LA S. M. F.

PHILIPPE ROBBA

Une classe d'ensembles analytiques à plusieurs dimensions

Mémoires de la S. M. F., tome 39-40 (1974), p. 351-357
<http://www.numdam.org/item?id=MSMF_1974__39-40__351_0>

Table Ronde Anal. non archim. (1972, Paris)
Bull. Soc. math. France.
Mémoire 39-40, 1974, p. 351-357

UNE CLASSE D'ENSEMBLES ANALYTIQUES A PLUSIEURS DIMENSIONS

Philippe ROBBA

I. Introduction.

1.1. Soit K un corps valué ultramétrique, complet et algébriquement clos.

On dira que la classe U des fonctions définies sur l'ouvert $A \subset K^m$ vérifie un principe d'unicité dans A si pour toute fonction f de U, la nullité de f au voisinage d'un point x de A entraîne la nullité de f partout dans A. Lorsque la classe U est formée de fonctions localement développables en série de Taylor on parlera de principe du prolongement analytique au lieu de principe d'unicité.

Si la différence de deux fonctions de U appartient à U on voit qu'une fonction de U est entièrement définie dans A lorsqu'on la connait au voisinage d'un point de A. On pourra donc parler du prolongement analytique dans A de la fonction définie au voisinage d'un point de A.

1.2. A cause de la structure totalement discontinue de K, une classe de fonctions définies par des propriétés locales ne peut pas vérifier un principe d'unicité.

Les sommes de séries de Laurent à m variables sur K convergeant sur un polycouronne Δ vérifient bien le principe du prolongement analytique. Mais, à cause de la structure ultramétrique de K, si l'on considère les domaines de convergence des développements en série de Laurent d'une même fonction, relativement à deux points distincts, l'un des domaines de convergence est contenu dans l'autre, on ne peut donc pas sortir de cette classe de fonction par des changements d'origine.

Suivant la démarche inaugurée par M. Krasner [1] nous dirons que f est un élément analytique sur un ouvert $A \subset K^m$ si f est la limite uniforme sur A d'une suite de fractions rationnelles sans singularités dans A. Nous dirons que l'ouvert A est un ensemble analytique si la classe des éléments analytiques sur A vérifie le principe du prolongement analytique.

Dans le cas d'une variable (m=1), M. Krasner a été le premier à construire une famille d'ensembles analytiques : les quasi-connexes [1] . Plus tard, E. Motzkin et moi-même avons donné une caractérisation de tous les ensembles analytiques [3] .

Dans le cas de plusieurs variables on ne connait pas de caractérisation de tous les ensembles analytiques. Dans cet exposé nous allons définir une classe $\mathcal{K}$ de sous-ensembles de K^m et montrer que ces sous-ensembles sont analytiques. Dans le cas $m=1$, $\mathcal{K}$ coïncide avec la classe des quasi-connexes introduits par M. Krasner. Aussi appellerons-nous ces ensembles quasi-connexes. Ces ensembles sont définis par des propriétés de connexité et de finitude de leur projection dans $\mathbb{R}^m$ (nous appelons projection l'application qui au point x de K^m associe le point de $\mathbb{R}^m$ dont les coordonnées sont les valuations des coordonnées de x).

1.3. Au paragraphe 2 nous indiquons certaines propriétés sur la localisation des singularités d'une fraction rationnelle : on montre que la projection sur $\mathbb{R}^m$ de l'ensemble des singularités d'une fraction rationnelle est l'intersection d'un réseau polyédral convexe de $\mathbb{R}^m$ avec la projection de K^m.

Au paragraphe 3 on introduit une classe naturelle d'ensembles analytiques et on montre que tout élément analytique sur un tel ensemble est développable en série de Laurent.

Au paragraphe 4 on affaiblit la condition précédente pour obtenir les quasi-connexes en plusieurs variables.

1.4. Avant de clore cette introduction, signalons que la classe des éléments analytiques sur un ensemble est trop restreinte : en effet la somme d'une série de Laurent n'est pas toujours un élément analytique dans son domaine de convergence. On généralise de la façon suivante.

<u>La famille</u> $(A_i)_{i\in I}$ <u>est dite enchaînée si</u>, <u>quels que soient les indices</u> j <u>et</u> j' <u>de</u> I, <u>il existe une famille finie d'indices</u> $i_o = j, i_1, \dots, i_n = j'$ <u>tels que</u> $A_{i_k} \cap A_{i_{k+1}} \neq \emptyset$ <u>pour</u> $0 \leq k \leq n-1$.

Soient A un ouvert de K^m et f une fonction définie sur A; nous dirons que f <u>est une fonction analytique sur</u> A <u>s'il existe une famille enchaînée</u> $(A_i)_{i\in I}$ <u>d'ensembles analytiques tels que</u> $A = \bigcup_{i\in I} A_i$ <u>et que la restriction de</u> f <u>à chaque</u> A_i <u>soit un élément analytique</u>.

On démontre sans peine que les fonctions analytiques sur un ouvert A vérifient le principe du prolongement analytique.

(Un corollaire intéressant est le suivant : Si la famille $(A_i)_{i\in I}$ est enchaînée et si les A_i sont analytiques, $\bigcup_{i\in I} A_i$ est analytique).

Malheureusement les fonctions analytiques ne sont pas aussi agréables à manier que les éléments analytiques. Il peut même arriver que la différence de deux fonctions analytiques sur un même ensemble ne soit pas analytique, on ne peut donc pas utiliser le principe d'unicité pour montrer que les deux fonctions coïncident dès qu'elles coïncident au voisinage d'un point (cette situation ne se produit évidement pas avec les éléments analytiques). On trouvera dans [4] une étude détaillée des fonctions analytiques dans le cas d'une variable avec les phénomènes pathologiques que l'on observe et les restrictions qu'on est amené à imposer.

1.5. On trouvera dans [5] les démonstrations complètes des résultats énoncés dans cet exposé.

2. Singularités d'une fraction rationnelle.

2.1. $\bar{\mathbb{R}}$ désigne la droite numérique achevée : $\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty,+\infty\}$, et $\bar{\mathbb{R}}^m = (\bar{\mathbb{R}})^m$.

Si $|a|$ désigne la valeur absolue de $a \in K$, on notera $v(a) = -\log |a|$.

Pour $x = (x_1 ,\ldots, x_m) \in K^m$, on notera $v(x) = (v(x_1),\ldots, v(x_m)) \in \bar{\mathbb{R}}^m$.

Si $\alpha = (\alpha_1 ,\ldots,\alpha_m) \in \mathbb{Z}^m$ est un multi-indice on posera $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \ldots x_m^{\alpha_m}$ et pour $y \in \bar{\mathbb{R}}^m$, $\alpha y = \alpha_1 y_1 +\ldots+ \alpha_m y_m$ (avec la convention $0.\infty = 0$).

2.2. Soit $P(x) = \sum_\alpha a_\alpha x^\alpha$ un polynôme à m-variables. Pour $\mu \in \bar{\mathbb{R}}^m$ on pose $v(P,\mu) = \inf_\alpha (v(a_\alpha) + \alpha\mu)$.

On dit que $\mu \in \mathrm{Reg}(P)$ si et seulement s'il existe un seul multi-indice β tel que $v(P,\mu) = v(a_\beta) + \beta\mu$, sinon on dit que $\mu \in Z(P)$.

On montre que :

i) Reg(P) est un ouvert, les composantes connexes de Reg(P) sont des polytopes convexes et sont en nombre fini.

ii) Z(P) est la réunion d'un nombre fini de morceaux d'hyperplans

iii) Si $\mu \in v(K^m)$, P a un zéro dans le polycercle $v(x) = \mu$ si et seulement si $\mu \in Z(P)$.

i), ii) et le "seulement si" de (iii) résultent trivialement des définitions. Pour le "si" de (iii) on procède par induction, le résultat étant connu pour m = 1 (cf. [2] par exemple).

A cause de (i) et (ii) on dit que Z(P) est un réseau polydral convexe.

2.3. Soit $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ une fraction rationnelle, où P et Q sont deux polynômes remiers entre eux. On prolonge par continuité, lorsque c'est possible, la fonction R(x) aux points où P et Q ont des zéros communs.

Soit A l'ensemble des singularités de R, on note W(R) l'adhérence dans $\overline{R}^m$ de v(A). D'après ce qu'on vient de voir $W(R) \subset Z(Q)$. Nous allons préciser la forme de W(R).

2.4. On voit facilement que si π est une composante connexe de Reg(Q), R est développable en série de Laurent dans $v^{-1}(\pi)$. On a en fait

<u>Théorème</u> : <u>les composantes connexes de</u> $\complement$ W(R) <u>sont des polytopes convexes et</u> R <u>est développable en série de Laurent dans les images réciproques de ces composantes connexes</u>.

W(R) est donc un réseau polyédral convexe.

<u>I onstration</u> : A l'aide d'une formule de Cauchy formelle on commence par démontrer q sous certaines hypothèses une fonction séparément développable en série de I rent est globalement développable en série de Laurent.

Soit alors π une composante connexe de $\complement$ W(R). A l'aide de cette propriété et des propriétés des fractions rationnelles d'une variable on démontre que R est développable en série de Laurent dans $v^{-1}(\pi)$. Soit alors $\hat{\pi}$ l'enveloppe convexe de π . On montre que cette série de Laurent converge dans $v^{-1}(\hat{\pi})$ et que sa somme coïncide avec R. R n'a donc pas de singularités dans $v^{-1}(\hat{\pi})$, donc $\hat{\pi} \cap W(R) = \emptyset$ (car π ouvert) et donc $\hat{\pi} = \pi$, ce qui prouve que π est convexe. Le fait que π est un polytope résulte alors du fait que $W(R) \subset Z(Q)$.

2.5. Par définition, si $a \in K^m$ est une singularité de R, $v(a) \in W(R)$. Cette propriété a-t-elle une réciproque ?

<u>Théorème</u> : <u>Si</u> $\mu \in W(R) \cap v(K^m)$, <u>la fraction rationnelle</u> R <u>a des singularités dans le polycercle</u> $v(x) = \mu$.

Pour la démonstration on utilise encore le fait qu'une fonction séparément développable en série de Laurent est globalement développable en série de Laurent.

3. Ensembles saturés P-connexes.

3.1. L'ouvert $A \subset K^m$ est dit saturé si $v^{-1}(v(A)) = A$, autrement dit si $x \in A$ et $v(y) = v(x)$ impliquent $y \in A$.

(Le domaine de convergence d'une série de Laurent est saturé, c'est ce qui motive cette définition).

L'ensemble saturé A est dit P-connexe s'il existe Ω, ouvert convexe de $\mathbb{R}^m$, tel que $\Omega \cap v(K^m) \subset v(A) \subset \bar{\Omega} \cap v(K^m)$

(P indique qu'il s'agit d'une propriété de la projection de A).

3.2. Théorème : Soit A un ensemble saturé P-connexe. Alors A est analytique; de plus si f est un élément analytique sur A, f est développable en série de Laurent dans A.

Démonstration : Soit R une fraction rationnelle sans singularités dans A. En utilisant le théorème 2.5 et le fait que A est saturé on démontre que $\Omega \cap W(R) = \emptyset$. Comme Ω est connexe, Ω est contenu dans π, composante connexe de $\complement W(R)$; comme aussi $v(A) \cap W(R) = \emptyset$, on a aussi $v(A) \subset \pi$ et donc R est développable en série de Laurent dans A d'après 2.4.

Une fonction f qui est limite uniforme sur A de fonctions développables en série de Laurent dans A est aussi développable en série de Laurent dans A. Pour montrer que A est analytique il suffit alors d'observer que si la somme d'une série de Laurent est nulle au voisinage d'un point, elle est identiquement nulle dans le domaine de convergence.

3.3. Corollaire : Soit A un ouvert saturé P-connexe. Notons $\hat{A} = v^{-1}(\widehat{v(A)})$. Alors $\hat{A}$ est analytique et tout élément analytique sur A se prolonge en un élément analytique sur $\hat{A}$.

($\widehat{v(A)}$ désigne l'enveloppe convexe de $v(A)$ dans $\bar{\mathbb{R}}^m$).

4. Ensembles quasi-connexes.

4.1. Pour $y \in K^m$ on pose $v_y(x) = v(x-y)$.

L'ouvert $A \subset K^m$ est appelé quasi-connexe élémentaire si, et seulement si, quel que soit $y \in A$, il existe un ouvert $\Omega \in \mathbb{R}^m$ tel que

a) $v_y^{-1}(\Omega) \subset A$

b) (Ω_k) désignant la famille des composantes connexes de Ω, la famille $(\bar{\Omega}_k \cap R^m)$ est enchaînée

c) $v_y(A) \subset (\bigcup_k \bar{\Omega}_k)$

A est dit quasi-connexe si c'est la réunion d'une famille enchaînée de quasi-connexes élémentaires.

Si $m = 1$, un quasi-connexe élémentaire est un quasi-connexe au sens de Krasner[1]. En effet soient y et z appartenant à A, nous allons montrer que si $x \in \complement A$ et $v_y(x)$ $v_y(z)$ alors $v_y(x)$ ne peut prendre qu'un nombre fini de valeurs ce qui montrera que A est quasi-connexe au sens de Krasner. Soit Ω_o la composante connexe de Ω voisinage de $v_y(y) = +\infty$. D'après la condition c) il existe k tel que $v_y(z) \in \bar{\Omega}_k$. On a $\Omega_o =]a_o, +\infty]$ et $\Omega_j =]a_j, b_j[$. La condition b exprime qu'il existe $j_1 \dots j_s$ avec $j_1 = 0, j_s = k$, tels que $a_{j_n} = b_{j_{n+1}}$, $1 \leqslant n \leqslant s-1$. Si $r \in v(K)$, $r > v_y(z)$ et $r \neq a_{j_n}$, $1 \leqslant n \leqslant s-1$, r appartient à l'un des Ω_{j_n} et d'après la condition a) le cercle $v_y(x) = r$ est contenu dans A. Donc si $x \in \complement A$ et $v_y(x) > v_y(z)$, on a nécessairement $v_y(x) = a_{j_n}$ pour un n, $1 \leqslant n \leqslant m-1$, ce qui achève la démonstration.

4.2. Théorème : Un ensemble quasi-connexe est analytique.

Démonstration : Il suffit de démontrer la proposition pour un quasi-connexe élémentaire.

Soit f un élément analytique sur A.

Notons d'abord que d'après 3.2, f est développable en série de Laurent dans $v_y^{-1}(\Omega_k)$ pour tout k.

Soit $\mu \in \Omega \cap v_y(K^m)$. On pose $v_y(f,\mu) = \inf_{v_y(x)=\mu} v(f(x))$. On montre que cette fonction se prolonge par continuité à $\bar{\Omega}$. On montre d'autre part que si y et $z \in A$, $v(y-z) = \mu$, on a $v_y(f,\mu) = v_z(f,\mu)$.

Utilisant le fait que f est développable en série de Laurent dans $v_y^{-1}(\Omega_k)$, on montre que si $v_y(f,\mu) = +\infty$ pour un $\mu \in \bar{\Omega}_k \cap \mathbb{R}^m$ alors $v_y(f,\mu) = +\infty$ pour tout $\mu \in \bar{\Omega}_k$, il résulte alors de b et c que si $v(f,\mu)$ prend la valeur $+\infty$ dans $v_y(A) \cap \mathbb{R}^m$, $v(f,\mu) = +\infty$ pour tout $\mu \in v_y(A)$.

Si A n'était pas analytique, il existerait un élément analytique f sur A et deux points y et z de A tels que f soit nulle au voisinage de y et $f(z) \neq 0$. D'après ce qu'on vient de voir on a alors $v_y(f,\mu) = +\infty$ pour $\mu \in v_y(A)$ et $v_z(f,\mu) = +\infty$ pour tout $\mu \in v_z(A)$. On obtient une contradiction puisqu'on doit avoir $v_y(f,\mu) = v_z(f,\mu)$ pour $\mu = v(y-z)$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] KRASNER, M. Prolongement analytique uniforme et multiforme dans les corps valués complets. Colloque CNRS Clermont-Ferrand 1964.

[2] LAZARD, M. Les zéros d'une fonction analytique d'une variable sur un corps valué complet IHES. Pub. Math. n°14 - 1962.

[3] MOTZKIN, E. et ROBBA, P. Prolongement analytique en analyse p-adique. Bull. Soc. Math. France. Mémoire 25, 1971, p. 151-158.

[4] ROBBA, P. Fonctions analytiques sur les corps valués ultramétriques complets. Astéristique n°10, 1973.

[5] ROBBA, P. Prolongement analytique pour les fonctions de plusieurs variables sur un corps valué complet. Bull. soc. Math. France 101, 1973, p. 193-217.

P. ROBBA
138, rue Nationale
75 - PARIS 13e