MÉMOIRES DE LA S. M. F.

PIERRE BERTHELOT

Valuation p-adique des zéros et pôles de la fonction zêta d'une variété algébrique sur un corps fini

Mémoires de la S. M. F., tome 39-40 (1974), p. 7-21
<http://www.numdam.org/item?id=MSMF_1974__39-40__7_0>

Table Ronde Anal. non archim. (1972, Paris)
Bull. Soc. math. France,
Mémoire 39-40, 1974, p. 7-21

VALUATION p-ADIQUE DES ZEROS ET POLES DE LA FONCTION ZETA D'UNE VARIETE ALGEBRIQUE SUR UN CORPS FINI.

Pierre BERTHELOT

On se propose d'exposer ici un résultat conjecturé par Katz, et prouvé par Mazur ([9], [10]).

1. Polygone de Newton et polygone de Hodge.

1.1. Fixons un nombre premier p, une puissance $q = p^a$ de p, et notons k le corps fini à q éléments, k_s son extension de degré s. Soit X_o une variété algébrique projective et lisse sur le corps k ; pour tout entier $s \geqslant 1$, soit N_s le nombre de points de X_o rationnels sur k_s. La fonction zêta de X_o est alors la série formelle à coefficients entiers

$$(1.1.1)\qquad \zeta_{X_o}(t) = \exp\left(\sum_{s=1}^{\infty} N_s t^s/s\right).$$

Il est bien connu (la première démonstration en est due à Dwork [4]) que cette série formelle est une fraction rationnelle, quotient de deux polynômes à coefficients entiers. En particulier, ses zéros et ses pôles sont algébriques sur $\mathbb{Q}$, et on peut donc chercher à estimer leur valuation p-adique.

Des formules de rationnalité plus précises peuvent être obtenues en utilisant des théories cohomologiques définies sur la catégorie des k-variétés projectives et lisses, à valeur dans la catégorie des K-algèbres graduées anti-commutatives de dimension finie, K étant un corps de caractéristique 0, vérifiant un certain nombre de propriétés standard : dualité de Poincaré, formule de Künneth, etc... (i.e. des théories cohomologiques qui soient des cohomologies de Weil au sens de [7]). Soient alors $\underline{\underline{f}}_{X_o}$ l'endomorphisme de Frobenius de X_o, défini par l'élévation à la puissance p-ième des coordonnées, et $\underline{\underline{f}}^a_{X_o}$ sa puissance a-ième ; $\underline{\underline{f}}^a_{X_o}$ est alors un k-endomorphisme de X_o, et donne par fonctorialité un endomorphisme F_i de l'espace vectoriel de cohomologie $H^i(X_o)$, pour tout i. On montre alors que

$$(1.1.2) \qquad \zeta_{X_o}(t) = \prod_{i=0}^{2n} \det(1-F_i t)^{(-1)^{i+1}} \quad ,$$

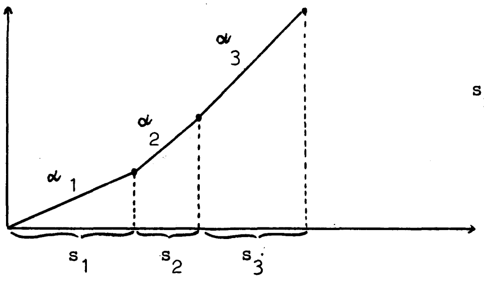
n étant la dimension de X_o .

Comme nous cherchons des estimations p-adiques sur les racines de polynômes $\det(1-F_i t)$, il est naturel de choisir une théorie cohomologique qui nous donne des espaces vectoriels, sinon sur $\mathbb{Q}_p$, du moins sur une extension convenable de $\mathbb{Q}_p$. Nous prendrons donc la <u>cohomologie cristalline</u>, qui associe à toute k-variété projective et lisse des modules de cohomologie, de type fini, sur l'anneau $W = W(k)$ des vecteurs de Witt de k- le fait de disposer de modules sur W au lieu de n'avoir que des vectoriels sur son corps des fractions K jouant de plus un rôle essentiel dans les estimations de divisibilité qui suivront. Rappelons que si X_o provient par réduction modulo p d'un schéma projectif et lisse X sur W, il existe alors un isomorphisme canonique

$$(1.1.3) \qquad H^{*}_{cris}(X_o) \xrightarrow{\sim} \underline{\underline{H}}^{*}(X, \Omega^{\cdot}_{X/W}) \quad ,$$

où H^{*}_{cris} désigne la cohomologie cristalline, et $\underline{\underline{H}}^{*}(X, \Omega^{\cdot}_{X/W})$ l'hyper-cohomologie sur X du complexe $\Omega^{\cdot}_{X/W}$ des formes différentielles algébriques sur X, relativement à W ("cohomologie de De Rham" de X relativement à W).

1.2. Nous fixons maintenant un entier m, et étudions l'action de Frobenius sur le module $H^{m}_{cris}(X_o)$. Soit P_m le polynôme (à coefficients dans W) $\det(t.1-F_m)$. Nous appelerons <u>polygone de Newton</u> (en degré m) <u>de</u> X_o le polygone de Newton du polynôme P_m , normalisé par la condition $v(q) = 1$: rappelons que si $P_m = t^{\beta} + a_1 t^{\beta-1} + \ldots$, ce polygone est l'enveloppe convexe des points de coordonnées $(i, v(a_i))$, que les pentes des segments qui le composent sont les valuations des racines de P_m (i.e. des valeurs propres de F_m), le nombre de racines ayant une valuation donnée étant égal à la longueur de la projection horizontale du segment de pente égale à cette valuation :

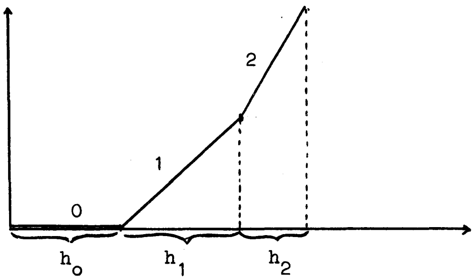


s_i = nombre de racines de valuation α_i .

Considérons d'autre part les k-espaces vectoriels de cohomologie $H^{m-i}(X_o, \Omega^i_{X_o/k})$, où $\Omega^i_{X_o/k}$ est le module des formes différentielles de degré i sur X_o relativement à k, et posons

(1.2.1) $$\bar{h}_i = \dim_k H^{m-i}(X_o, \Omega^i_{X_o/k}).$$

Nous appelerons <u>polygone de Hodge</u> (en degré m) <u>de</u> X_o le polygone obtenu en portant bout à bout des segments de pente i et de projection horizontale $\bar{h}_i$:



Le polygone de Newton et le polygone de Hodge sont alors liées par la

<u>Conjecture</u> 1.3. (Katz). <u>Le polygone de Newton de</u> X_o <u>est situé au dessus du polygone de Hodge de</u> X_o .

Cette conjecture avait été prouvée par Dwork pour les hypersurfaces (cf. [5]). Pour donner une idée du type de renseignements qu'elle implique, indiquons les corollaires suivants :

Corollaire 1.4. <u>L'endomorphisme</u> F_m <u>possède au plus</u> $\bar{h}_o$ <u>valeurs propres qui sont des unités p-adiques ; s'il en possède</u> h_o , <u>les valeurs propres restantes sont toutes divisibles par</u> q, <u>et il en existe au plus</u> $\bar{h}_1$ <u>dont le quotient par</u> q <u>soit une unité p-adique, etc</u>...

Corollaire 1.5. <u>Supposons que</u> $\bar{h}_i = 0$ <u>pour</u> $i < k$; <u>alors toutes les valeurs propres de</u> F_m <u>sont divisibles par</u> q^k .

1.6. Supposons maintenant que X_o provienne par réduction modulo p d'un schéma X projectif et lisse sur W, et posons

$$h_i = \mathrm{rang}_W\, H^{m-i}(X,\Omega^i_{X/W}) = \dim_K H^{m-i}(X_K, \Omega^i_{X_K/K}) ,$$

où X_K est la K-variété déduite de X par le changement de base de W à K. On peut alors former à l'aide des h_i le polygone de Hodge de X, par la même construction qu'en 1.2.

Conjecture 1.7. (Katz). <u>Sous les hypothèses de</u> 1.6, <u>le polygone de Newton de</u> X_o <u>est situé au dessus du polygone de Hodge de</u> X.

Les $\bar{h}_i$ et les h_i sont liés grâce aux suites exactes

$$(1.7.1)\quad 0 \longrightarrow H^j(X,\Omega^i_{X/W}) \otimes_W k \longrightarrow H^j(X_o, \Omega^i_{X_o/k}) \longrightarrow \mathrm{Tor}_1^W(H^{j+1}(X,\Omega^i_{X/W}),k) \longrightarrow 0,$$

valables pour tout j, et qui montrent que

$$(1.7.2)\qquad h_i \leqslant \bar{h}_i$$

pour tout i. Le polygone de Hodge de X est donc situé au dessus de celui de X_o , et la conjecture 1.7 est alors plus forte que la conjecture 1.3.

Notons enfin que la dualité de Poincaré et le théorème de Lefschetz fort permettent de montrer immédiatement que sous les hypothèses de 1.6 les points les plus à droite du polygone de Newton de X_o et du polygone de Hodge de X coïncident.

On a alors :

<u>Théorème</u> 1.8 (Mazur). <u>Si</u> X_o <u>provient par réduction modulo</u> p <u>d'un schéma projectif et lisse sur</u> W, <u>tel que les</u> $H^j(X,\Omega^i_{X/W})$ <u>soient des</u> W-<u>modules libres, la conjecture de Katz est vraie</u>.

On remarquera que lorsque les $H^j(X,\Omega^i_{X/W})$ sont libres, $\bar{h}_i = h_i$ d'après la suite exacte (1.7.1), si bien que les conjectures 1.3 et 1.7 sont identiques. Par contre, ces conjectures n'ont pas encore été prouvées dans le cas général ; un bon point de départ devrait être d'essayer d'adapter les méthodes de Mazur en termes de catégories dérivées, afin de tenir compte des phénomènes liés à la présence de torsion dans les $H^j(X,\Omega^i_{X/W})$.

2. <u>Nombres de Hodge et pentes d'un</u> F-<u>cristal</u>.

Nous allons maintenant donner une idée de la démonstration de Mazur. La première étape va être de réinterpréter les polygones de Newton et de Hodge.

2.1. On suppose désormais que les hypothèses de 1.8 sont vérifiées. Posons $M = H^m_{cris}(X_o) = \underline{\underline{H}}^m(X,\Omega^{\cdot}_{X/W})$; la liberté des $H^j(X,\Omega^i_{X/W})$ entraine alors que M est aussi un W-module libre. L'endomorphisme de Frobenius $\underline{\underline{f}}_{X_o}$ définit, grâce à la fonctorialité de la cohomologie cristalline, un endomorphisme F de M, semi-linéaire par rapport à l'automorphisme de Frobenius φ de W. Il est de plus facile de vérifier, à l'aide de la dualité de Poincaré, que F est un endomorphisme injectif. La donnée d'un module libre M sur W, muni d'un endomorphisme injectif, semi-linéaire par rapport à φ , sera appelée un F-<u>cristal</u> (sur k) ; cette définition ne suppose évidemment pas que k soit fini, et reste valable pour tout corps parfait k de caractéristique p.

L'endomorphisme F s'étend en un endomorphisme du K-espace vectoriel $M_K = M\otimes_W K$, où K est le corps des fractions de W. Soit A l'anneau (non commutatif) des polynômes en l'indéterminée T, à coefficients dans K, la règle de commutation de T avec les éléments de K étant donnée par $T.a = \varphi(a).T$ pour tout $a \in K$. On peut alors considérer M_K , muni de l'endomorphisme F, comme un A-module, et sa structure en tant que A-module est donnée par :

Théorème 2.2 (Dieudonné-Manin [8]). *Soient* k *un corps algébriquement clos*, (M,F) *un* F-*cristal sur* k.

i) *Il existe une suite de nombres rationnels*

$$r_1/s_1 < r_2/s_2 < \dots < r_\ell/s_\ell ,$$

avec $r_i \geqslant 0$, $s_i \geqslant 1$, *et un isomorphisme de* A-*modules*

$$(M_K,F) \xrightarrow{\sim} \bigoplus_{i=1}^{\ell} A/A.(T^{s_i} - p^{r_i}) , \tag{2.2.1}$$

les nombres r_i *et* s_i *étant uniquement déterminés par ces conditions*.

ii) *S'il existe un* F-*cristal* (M_o,F) *sur le corps fini* $\mathbb{F}_q$ *à* $q = p^a$ *éléments, tel que* $(M,F) = (M_o \otimes_{W(\mathbb{F}_q)} W(k), F)$, *alors les* r_i/s_i *sont les valuations* p-*adiques* (*normalisées par* $v(q) = 1$) *des valeurs propres de l'endomorphisme* $W(\mathbb{F}_q)$-*linéaire* F^a *de* M_o , *le nombre de valeurs propres de valuation* r_i/s_i *étant* s_i .

Si (M,F) est un F-cristal sur un corps parfait k, de clôture algébrique $\bar{k}$, on appelle *pentes* de (M,F) les nombres r_i/s_i intervenant dans la décomposition (2.2.1) de $M \otimes_{W(k)} W(\bar{k})$; l'entier s_i est appelé *multiplicité* de la pente r_i/s_i . A tout F-cristal, on associe un *polygone de Newton*, obtenu en portant bout à bout des segments de pente r_i/s_i (en ordre croissant), dont la projection horizontale ait pour longueur s_i . Il résulte de l'assertion ii) que dans le cas où $M = H^m_{cris}(X_o)$, le polygone de Newton du F-cristal M est le polygone de Newton de X_o défini en 1.2.

2.3. Soient (M,F) un F-cristal sur un corps parfait k, et H le module déduit de M en faisant l'extension des scalaires $\varphi : W \longrightarrow W$. Puisque F est semi-linéaire par rapport à φ , il se factorise en un homomorphisme W-linéaire $F' : H \longrightarrow M$. Puisque W est un anneau principal, nous pouvons appliquer à F' le théorème des facteurs invariants, et choisir des bases de H et M telles que la matrice de F' pour ces bases soit une matrice diagonale dont les coefficients soient des puissances de p. Le nombre $h_i^!$ de coefficients égaux à p^i ne dépend pas des bases choisies, et sera appelé *i-ième nombre de Hodge abstrait* du F-cristal (M,F). On peut encore construire un polygone de Hodge au moyen des $h_i^!$, en suivant la méthode de 1.2. On obtient alors :

<u>Proposition</u> 2.4. <u>Soit</u> (M,F) <u>un</u> F-<u>cristal sur un corps parfait</u> k. <u>Le polygone de Newton de</u> (M,F) <u>est situé au dessus du polygone de Hodge de</u> (M,F).

Pour vérifier 2.4, on peut supposer k algébriquement clos. Montrons d'abord que la première pente du polygone de Newton est au moins égale à celle du polygone de Hodge. Si r_1/s_1 est la première pente du polygone de Newton, il existe un élément x de M, qu'on peut supposer n'appartenant pas à pM, tel que $F^{s_1}(x) = p^{r_1}x$.

D'autre part, si b est la première pente du polygone de Hodge, F est divisible par p^b ; on obtient donc $p^{r_1}x \in p^{bs_1}.M$, d'où $bs_1 \leqslant r_1$, et $b \leq r_1/s_1$. On considère alors pour tout i la puissance extérieure i-ième $\Lambda^i(M)$, qui est de façon naturelle un F-cristal ; il est facile de vérifier que la première pente de son polygone de Newton est l'ordonnée du point d'abcisse i sur le polygone de Newton de (M,F), et que celle de son polygone de Hodge est l'ordonnée du point d'abcisse i sur le polygone de Hodge de (M,F), d'où le résultat.

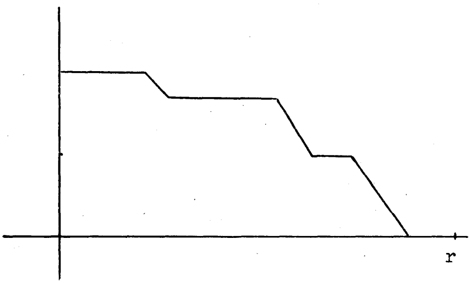
Pour prouver le théorème 1.8, on est donc ramené à prouver :

<u>Théorème</u> 2.5 (Mazur). <u>Sous les hypothèses de</u> 1.8, <u>les nombres de Hodge abstraits</u> $h_i^!$ <u>du</u> F-<u>cristal</u> $M = \underline{\underline{H}}^m(X, \Omega^{\cdot}_{X/W})$ <u>sont égaux aux nombres de Hodge</u> $\bar{h}_i$ <u>de</u> X_o .

3. <u>Jauges</u>.

Pour relier les nombres de Hodge abstraits de M aux nombres de Hodge de X_o , Mazur introduit sur M une structure ressemblant un peu à celle de module filtré, et pour laquelle nous allons donner quelques définitions générales.

3.1. Une <u>jauge</u> est un couple $(\mathcal{E}, r)$, où $\mathcal{E} : \underline{\underline{N}} \longrightarrow \underline{\underline{N}}$ est une fonction décroissante, telle que pour tout i on ait $\mathcal{E}(i) - \mathcal{E}(i+1) \leqslant 1$, et r est un entier tel que $\mathcal{E}(r) = 0$.



L'ensemble des jauges est muni de la relation d'ordre partiel définie par $(\mathcal{E},r) \leqslant (\mathcal{E}',r')$ si et seulement si $\mathcal{E}(i) \leqslant \mathcal{E}'(i)$ pour tout i, et $r \leqslant r'$. Il est facile de voir que toute famille de jauges bornée possède un Sup, et toute famille de jauges possède un Inf, pour cette relation d'ordre. On définit en outre un opérateur de translation sur l'ensemble des jauges de la façon suivante : soit 1_j la fonction définie sur $\underline{\underline{N}}_*$ égale à 1 pour $i < j$, et à 0 pour $i \geqslant j$; la translatée $T(\mathcal{E},r)$ d'une jauge $(\mathcal{E},r)$ est alors la jauge $(\mathcal{E}+1_{r+1}\ , r+1)$.

Soient comme plus haut k un corps parfait de caractéristique p, et W l'anneau des vecteurs de Witt de k. Un W-module jaugé est la donnée d'un W-module M, et, pour toute jauge $(\mathcal{E},r)$, d'un sous-module $M(\mathcal{E},r)$ de M, de façon à vérifier les propriétés suivantes :

i) $M(0,0) = M$;

ii) si $(\mathcal{E},r) \leqslant (\mathcal{E}',r')$, alors $M(\mathcal{E}',r') \subset M(\mathcal{E},r)$;

iii) l'application $(\mathcal{E},r) \longmapsto M(\mathcal{E},r)$ transforme les Sup en intersections et les Inf en sommes ;

iv) pour toute jauge $(\mathcal{E},r)$, $M(T(\mathcal{E},r)) = p.M(\mathcal{E},r)$.

3.2 Supposons maintenant donné un homomorphisme W-linéaire $F' : H \longrightarrow M$, injectif, entre deux W-modules libres de même rang. On définit les nombres de Hodge $h_i^!$ de F' au moyen du théorème des facteurs invariants, selon la méthode de 2.3. On définit d'autre part une filtration décroissante du k-espace vectoriel $\overline{H} = H/pH$ par des sous-espaces vectoriels

$$0 \subset \overline{H}_m \subset \ldots \subset \overline{H}_j \subset \ldots \subset \overline{H}_0 = \overline{H} \quad ,$$

en prenant pour $\overline{H}_j$ l'image dans $\overline{H}$ du sous-module $F'^{-1}(F'(H) \cap p^j M)$ de H. Il est alors évident que

$$h_i^! = \dim_k \overline{H}_i/\overline{H}_{i+1}$$

3.3. On se place toujours sous les hypothèses de 3.2, et on suppose données une filtration décroissante de H par des sous-modules H_i , facteurs directs dans H, et une structure de module jaugé sur M. On va énoncer des conditions reliant la filtration de H à la structure de module jaugé de M. Donnons auparavant quelques définitions.

Pour tout entier j, on pose

$$(3.3.1) \qquad \langle j\rangle = \inf_{i\geqslant j} v_p(p^i/i!) \text{ si } j \geqslant 1,\ \langle j\rangle = 0 \text{ si } j \leq 0 ,$$

v_p désignant la valuation p-adique, normalisée par $v_p(p) = 1$.

Soient d'autre part $(\mathcal{E},r)$ et $(\mathcal{E}',r)$ deux jauges, et j un entier ; on dira que $(\mathcal{E}',r)$ est une <u>augmentation simple de</u> $(\mathcal{E},r)$ <u>en</u> j si $\mathcal{E}'(i) = \mathcal{E}(i)$ pour $i \neq j$, et $\mathcal{E}'(j) = \mathcal{E}(j)+1$.

La première condition que nous introduisons est alors :

A) Pour tout entier r, et toute jauge $(\mathcal{E},r')$ telle que

a) $r \leqslant r'$,

a') pour tout i, $\mathcal{E}(i) \leqslant \langle r-i\rangle$,

alors

$$(3.3.2) \qquad F'(H_r) \subset M(\mathcal{E},r') .$$

Supposons la condition A) vérifiée, et soient $(\mathcal{E},r)$ et $(\mathcal{E}',r)$ deux jauges telles que

b) pour tous $i \leqslant i'$, $\mathcal{E}(i) - \mathcal{E}(i') \leqslant \langle i'-i\rangle$,

b') il existe un entier j tel que $(\mathcal{E}',r)$ soit une augmentation simple de $(\mathcal{E},r)$ en j.

Il est alors facile de voir, en appliquant (3.3.2) aux jauges (η,r), avec $\eta = \mathrm{Max}(0, \mathcal{E} - \mathcal{E}(j))$, et (η',r), avec $\eta' = \mathrm{Max}(0, \mathcal{E}' - \mathcal{E}(j))$, que l'homomorphisme $p^{\mathcal{E}(j)}F'$ définit un homomorphisme

$$(3.3.3) \qquad p^{\mathcal{E}(j)}F' : H'_j/H'_{j+1} \longrightarrow M(\mathcal{E},r)/M(\mathcal{E}',r) ,$$

avec $H'_j = H_j/pH_j$, $H'_{j+1} = H_{j+1}/pH_{j+1}$. La seconde condition s'énonce.

B) L'homomorphisme (3.3.3) est un isomorphisme.

On montre alors :

<u>Proposition</u> 3.4. <u>Si les</u> H_i <u>sont facteurs directs dans</u> H, <u>et si</u> F' <u>vérifie les conditions</u> A) <u>et</u> B), <u>la réduction modulo</u> p <u>de la filtration de</u> H <u>par les</u> H_i <u>est la filtration de</u> $\overline{H}$ <u>par les</u> $\overline{H}_i$ <u>définie en</u> 3.2 ; <u>en particulier</u>

$$h_i^! = \dim_k \overline{H}_i/\overline{H}_{i+1} = \mathrm{rang}_W H_i/H_{i+1} \quad .$$

4. <u>Retour au cas géométrique</u>.

Nous allons maintenant éclairer un peu le mystère entourant les définitions du paragraphe précédent en les appliquant au cas où $M = \underline{\underline{H}}^m(X, \Omega^{\bullet}_{X/W})$, F' étant la linéarisé de l'action de Frobenius comme en 2.3.

4.1. Donnons d'abord quelques compléments sur la cohomologie cristalline (voir [1], [2]). Supposons que X_o se plonge comme sous-schéma fermé dans un schéma Y lisse sur W ; soit Y_n la réduction de Y modulo p^{n+1}. On peut alors calculer la cohomologie cristalline de X_o au moyen du plongement de X_o dans Y. Rappelons qu'on appelle <u>puissances divisées</u> sur un idéal I d'un anneau commutatif R la donnée d'une famille d'applications γ_i de I dans I ($i \geqslant 1$), vérifiant des propriétés analogues à celles des applications $x \longmapsto x^i/i!$ en caractéristique 0 ; de telles applications n'existent pas en général lorsque R n'est pas de caractéristique 0, et, lorsqu'elles existent, elles ne sont pas nécéssairement uniques. Néanmoins, il existe une R-algèbre $\underline{D}(I)$, et un idéal $\tilde{I}$ de $\underline{D}(I)$, muni de puissances divisées, contenant $I.\underline{D}(I)$, universels pour les homomorphismes d'anneaux envoyant I dans un idéal muni de puissances divisées. L'idéal pW de W possède des puissances divisées car les éléments $p^i/i!$ de K appartiennent à pW, et on imposera dans la suite que les puissances divisées de I, lorsque R est une W-algèbre, soient compatibles à celles de pW.

Soit alors $\underline{I}_n$ l'idéal de X_o dans Y_n . On peut former le faisceau $\underline{D}(\underline{I}_n)$ sur Y_n, et on fait agir les W-dérivations de $\underline{O}_{Y_n}$ sur $\underline{D}(\underline{I}_n)$ par la relation $d(\gamma_i(x)) = \gamma_{i-1}(x)\, d(x)$. On obtient de la sorte un complexe $\underline{D}(\underline{I}_n) \otimes \Omega^{\bullet}_{Y_n/W_n}$ (avec $W_n = W/p^{n+1}W$), et il existe un isomorphisme canonique

(4.1.1) $$H^{*}_{cris}(X_o) \xrightarrow{\sim} \varprojlim_n \underline{\underline{H}}^{*}(Y_n , \underline{D}(\underline{I}_n)\otimes\Omega^{\cdot}_{Y_n/W_n}).$$

Soient maintenant X_o et X'_o deux variétés projectives et lisses sur k, et f un morphisme de X'_o dans X_o ; semi-linéaire par rapport à un automorphisme ψ de k ; supposons X_o et X'_o plongés dans des W-schémas lisses Y et Y', et supposons qu'il existe un morphisme g de Y' dans Y, semi-linéaire par rapport au relèvement φ de ψ sur W, et induisant f sur X'_o et X_o . Alors g définit par fonctorialité un homomorphisme

(4.1.2) $$\varprojlim_n \underline{\underline{H}}^{*}(Y_n , \underline{D}(\underline{I}_n)\otimes\Omega^{\cdot}_{Y_n/W_n}) \longrightarrow \varprojlim_n \underline{\underline{H}}^{*}(Y'_n , \underline{D}(\underline{I}'_n)\otimes\Omega^{\cdot}_{Y'_n/W_n}) ,$$

et, via l'isomorphisme (4.1.1), l'homomorphisme (4.1.2) donne l'action de f sur la cohomologie cristalline.

Plaçons nous dans les hypothèses de 1.8. Nous pouvons utiliser pour calculer la cohomologie cristalline de X_o d'une part le relèvement de X_o en X, projectif et lisse sur W, d'autre part le plongement de X_o dans l'espace projectif $\underline{\underline{P}}^N$ = P contenant X. D'autre part, l'endomorphisme de Frobenius de l'espace projectif sur k peut se relever en un endomorphisme de l'espace projectif sur W, en prenant un système de coordonnées projectives, et l'application définie en élevant les coordonnées projectives à la puissances p-ième. L'opérateur de Frobenius sur la cohomologie cristalline se déduit donc simplement par passage à l'hyper-cohomologie (et à la limite projective) du morphisme de complexes

(4.1.3) $$\underline{D}(\underline{I}_n)\otimes\Omega^{\cdot}_{P_n/W_n} \xrightarrow{F} \underline{D}(\underline{I}_n)\otimes\Omega^{\cdot}_{P_n/W_n} \longrightarrow \Omega^{\cdot}_{X_n/W_n} ,$$

où F provient du relèvement choisi de Frobenius sur l'espace projectif.

4.2. Supposons toujours les hypothèses de 1.8 vérifiées. Soient $M = \underline{\underline{H}}^m(X,\Omega^{\cdot}_{X/W})$, $H = M\otimes_W W$, W étant considéré comme W-algèbre par le relèvement φ de l'automorphisme de Frobenius de k. On munit alors H de la filtration H_i déduite de la filtration de Hodge M_i sur M. Rappelons que cette dernière est définie comme suit : si $\tau_r(\Omega^{\cdot}_{X/W})$ est le sous-complexe de $\Omega^{\cdot}_{X/W}$ égal à $\Omega^{\cdot}_{X/W}$ en degrés $\geq r$, et à 0 en degrés $<$ r, M_r est l'image dans M de $\underline{\underline{H}}^m(X, \tau_r(\Omega^{\cdot}_{X/W}))$. On peut également la calculer en utilisant l'isomorphisme

$$\underline{\underline{H}}^m(X,\Omega^{\cdot}_{X/W}) \xrightarrow{\sim} \varprojlim_n \underline{\underline{H}}^m(P_n\ ,\ \underline{D}(\underline{I}_n)\otimes\Omega^{\cdot}_{P_n/W_n}).$$

Soient $\tilde{\underline{J}}$ l'idéal à puissances divisées engendré dans $\tilde{\underline{I}}$ par l'idéal $\underline{J}$ de X dans P, $\tilde{\underline{J}}_n$ sa réduction modulo p^{n+1}, et pour tout k soit $\tilde{\underline{J}}_n^{[k]}$ l'idéal de $\underline{D}(\underline{I}_n)$ engendré par les sections de la forme $\gamma_{i_1}(x_1)\ \ldots\ \gamma_{i_j}(x_j)$, les x_i étant des sections de $\tilde{\underline{J}}_n$ et $i_1+\ldots+i_j \geqslant k$. On filtre alors le complexe $\underline{D}(\underline{I}_n)\otimes\Omega^{\cdot}_{P_n/W_n}$ par les sous-complexes $\mathrm{Fil}_r(\underline{D}(\underline{I}_n)\otimes\Omega^{\cdot}_{P_n/W_n})$ donnés en degré i par

$$\mathrm{Fil}_r(\underline{D}(\underline{I}_n)\otimes\Omega^i_{P_n/W_n}) = \tilde{\underline{J}}_n^{[r-i]}.\underline{D}(\underline{I}_n)\otimes\Omega^i_{P_n/W_n}\ .$$

4.3. Munissons maintenant M d'une structure de module jaugé. Pour cela, on associe à toute jauge $(\mathcal{E},r)$ un sous-complexe $\Omega^{\cdot}(\mathcal{E},r)$ de $\Omega^{\cdot}_{X/W}$ défini en degré i par

$$\Omega^i(\mathcal{E},r) = p^{\mathcal{E}(i)+i}\,\Omega^i_{X/W} + p^{\mathcal{E}(i-1)+i-1}\,d\Omega^{i-1}_{X/W} \qquad \text{si } i \leqslant r\ ,$$

$$\Omega^i(\mathcal{E},r) = p^r\,\Omega^i_{X/W}\ . \qquad \text{si } i > r\ .$$

On pose alors

$$M(\mathcal{E},r) = \underline{\underline{H}}^m(X,\Omega^{\cdot}(\mathcal{E},r)).$$

On montre que les $M(\mathcal{E},r)$ sont bien des sous-modules de M, et qu'ils munissent M d'une structure de module jaugé.

4.4. Vérifions alors que les conditions de 3.4 sont satisfaites. D'abord, les H_i sont facteurs directs de H. En effet, l'hypothèse que les $H^j(X,\Omega^i_{X/W})$ sont libres entraîne que la suite spectrale

$$E_1^{p,q} = H^q(X,\Omega^p_{X/W}) \Longrightarrow \underline{\underline{H}}^n(X,\Omega^{\cdot}_{X/W})$$

dégénère (en tensorisant par K, on se ramène à un théorème de dégénérescence en caractéristique zéro dû à Deligne [3]), de sorte que

(4.4.1) $$H_i/H_{i+1} \xrightarrow{\sim} H^{m-i}(X,\Omega^i_{X/W}).$$

Vérifions ensuite la condition A). Soient donc r un entier et $(\mathcal{E},r')$ une jauge vérifiant les conditions a) et a') de 3.3. Calculons l'image par le morphisme (4.1.3) du sous-complexe $\mathrm{Fil}_r(\underline{D}(\underline{I}_n)\otimes\Omega^{\bullet}_{P_n/W_n})$. Pour toute section x de $\underline{D}(\underline{I}_n)$, on a

$$F(x) \equiv x^p \mod. p \quad ,$$

puisque F induit Frobenius en caractéristique p. Par suite,

(4.4.2) $$F(d(x)) = d(F(x)) \equiv p.x^{p-1}d(x) \equiv 0 \mod. p.$$

D'autre part, soit y une section de $\underline{J}_n$. Alors $y^p = p!\,\gamma_p(y)$, de sorte que $F(y) \equiv 0$ mod. p ; on en déduit pour tout i

$$F(\gamma_i(y)) = \gamma_i(F(y)) = \gamma_i(py') = y'^i.\ p^i/i! \quad .$$

Comme, pour $i_1+\ldots+i_j \geq k$,

$$v_p(p^{i_1}/i_1!)+\ldots+v_p(p^{i_j}/i_j!) \geq \langle k\rangle \ ,$$

il en résulte que

(4.4.3) $$F(\underline{J}_n^{[r-i]}.\underline{D}(\underline{I}_n)) \subset p^{\langle r-i\rangle}.\underline{D}(\underline{I}_n)$$

Les relations (4.4.2) et (4.4.3), et la condition a'), montrent donc que l'homomorphisme (4.1.3) envoie $\mathrm{Fil}_r(\underline{D}(\underline{I}_n)\otimes\Omega^{\bullet}_{P_n/W_n})$ dans l'image de $\Omega^{\bullet}(\mathcal{E},r')$ dans $\Omega^{\bullet}_{X_n/W_n}$. Par passage à l'hypercohomologie et à la limite, on en déduit la condition A).

Reste à montrer la condition B). Soient $(\mathcal{E},r)$ et $(\mathcal{E}',r)$ deux jauges vérifiant les conditions b) et b') de 3.3. Les relations précédentes et la condition b) montrent que $p^{\mathcal{E}(j)}F$ envoie $\mathrm{Fil}_j(\underline{D}(\underline{I}_n)\otimes\Omega^{\bullet}_{P_n/W_n})$ dans l'image $\Omega^{\bullet}(\mathcal{E},r)_n$ de $\Omega^{\bullet}(\mathcal{E},r)$ dans $\Omega^{\bullet}_{X_n/W_n}$.

D'autre part, dès que n est assez grand, le complexe quotient $\Omega^{\bullet}(\mathcal{E},r)_n/\Omega^{\bullet}(\mathcal{E}',r)_n$

est isomorphe au complexe

$$0 \longrightarrow \dots \longrightarrow 0 \longrightarrow \Omega^j_{X_o/k}/d\Omega^{j-1}_{X_o/k} \longrightarrow d\Omega^j_{X_o/k} \longrightarrow 0 \longrightarrow \dots ,$$

dont les objets de cohomologie sont réduits au faisceau $\underline{H}^j(\Omega^{\bullet}_{X_o/k})$ placé en degré j. On en déduit que l'homomorphisme

$$p^{\mathcal{E}(j)}F : \mathrm{Fil}_j(\underline{D}(\underline{I}_n) \otimes \Omega^{\bullet}_{P_n/W_n}) \longrightarrow \Omega^{\bullet}(\mathcal{E},r)_n / \Omega^{\bullet}(\mathcal{E}',r)_n$$

est nul sauf en degré j, où il induit un homomorphisme

$$\Omega^j_{X_o/k} \longrightarrow \underline{H}^j(\Omega^{\bullet}_{X_o/k}) \quad , \tag{4.4.4}$$

semi-linéaire par rapport à l'endomorphisme de Frobenius de X_o : par construction, l'image d'une forme $a.dx_1 \wedge \dots \wedge dx_j$ est la forme

$$a^p\, x_1^{p-1} \dots x_j^{p-1}.dx_1 \wedge \dots \wedge dx_j \quad . \tag{4.4.5}$$

Si on note $X_o^{(p)}$ la variété déduite de X_o par le changement de base $k \longrightarrow k$ défini par l'automorphisme de Frobenius de k, et $f : X_o \longrightarrow X_o^{(p)}$ le morphisme canonique, l'homomorphisme (4.4.4) peut encore s'interpréter comme un homomorphisme linéaire sur $X_o^{(p)}$

$$\Omega^j_{X_o^{(p)}/k} \longrightarrow \underline{f}_*(\underline{H}^j(\Omega^{\bullet}_{X_o/k})) \quad , \tag{4.4.6}$$

et d'après (4.4.5), ce dernier n'est autre que <u>l'inverse de l'isomorphisme de Cartier</u> (voir par exemple [6]). Mais par ailleurs,

$M(\mathcal{E},r)/M(\mathcal{E}',r) = \underline{\underline{H}}^m(X, \Omega^{\bullet}(\mathcal{E},r)/\Omega^{\bullet}(\mathcal{E}',r))$, car

$\underline{\underline{H}}^i(X, \Omega^{\bullet}(\mathcal{E},r)) \subset \underline{\underline{H}}^i(X, \Omega^{\bullet}(\mathcal{E}',r))$ pour tout i, donc

$M(\mathcal{E},r)/M(\mathcal{E}',r) \xrightarrow{\sim} H^{m-j}(X_o, \underline{H}^j(\Omega^{\bullet}_{X_o/k}))$.

D'autre part, la liberté des $H^j(X, \Omega^i_{X/W})$ et la dégénerescence de la suite spectrale correspondante entraînent que le quotient $H^!_j/H^!_{j+1}$ est isomorphe à $H^{m-j}(X_o^{(p)}, \Omega^j_{X_o^{(p)}/k})$. Le fait que (3.3.3) soit un isomorphisme résulte donc par passage à la cohomologie de ce que (4.4.6) est l'inverse de l'isomorphisme de Cartier, d'où la condition B).

Nous pouvons alors appliquer 3.4 à M; ce qui donne le théorème 2.5.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BERTHELOT, P. Notes aux Comptes-Rendus à l'Académie des Sciences : t. 269, p. 297-300, 357-360, 397-400; t. 272, p. 42-45, 141-144, 254-257, 1314-1317, 1397-1400, 1574-1577.

[2] BERTHELOT, P. Cohomologie cristalline des schémas de caractéristique p Thèse à paraître.

[3] DELIGNE, P. Théorème de Lefschetz et critères de dégénérescence de suites spectrales, Publ. Math. IHES n° 35, 1968, p. 107-126

[4] DWORK, B. On the rationality of the zeta function of an algebraic variety, Am. Jour. Math. 82, 1960, p. 631-648.

[5] DWORK, B. A deformation theory for the zeta function of a hypersurface, Proc. Int. Cong. Math. 1962, p. 247-259.

[6] KATZ, N. Nilpotent connections and the monodromy theorem, Publ. Math. IHES n° 39, p. 175-232.

[7] KLEIMAN, S. Algebraic cycles and the Weil conjectures, Dix exposés sur la cohomologie des schémas, North-Holland.

[8] MANIN, Y. The theory of commutative formal groups overs fields of finits characteristic, Russ. Math. Surveys 18, N°6, 963.

[9] MAZUR, B. Frobenius and the hodge filtration I, Bull. Am. Math. Soc. 78, n°5, 1972, p. 653-667.

[10] MAZUR, B. Frobenius and the Hodge filtration II (abstract estimates) Ann. Math, 98, n°1, 1973, p. 58-95.

Pierre BERTHELOT
Université de Rennes I
Département de Mathématiques