

# MÉMOIRES DE LA S. M. F.

J.-D. THEROND

## Sur deux conjectures de Small

*Mémoires de la S. M. F.*, tome 48 (1976), p. 117-122

[http://www.numdam.org/item?id=MSMF\\_1976\\_\\_48\\_\\_117\\_0](http://www.numdam.org/item?id=MSMF_1976__48__117_0)

© Mémoires de la S. M. F., 1976, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Mémoires de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Memoires/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

SUR DEUX CONJECTURES DE SMALL

par

J.-D. THEROND

Soient  $A$  un anneau commutatif unitaire,  $U(A)$  le groupe de ses éléments inversibles et  $G(A)$  le groupe défini en [2, § 7]. Si  $A(4)$  désigne le groupe des éléments  $z \in A$  tels que  $1-4z \in U(A)$  (muni de la loi  $z \circ z' = z+z'-4zz'$ ) il y est montré, si  $\alpha : G(A) \rightarrow U(A)/U^2(A)$  est définie par  $\alpha(z) = \overline{1-4z}$ , que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} A(4) & \longrightarrow & U(A) \\ \downarrow & & \downarrow \\ G(A) & \xrightarrow{\alpha} & U(A)/U^2(A) \end{array}$$

Dans [3] Small conjecture, si  $d > 0$ , les résultats suivants

$$G(\mathbb{Z}[\sqrt{d}]) \neq \{0\} \text{ si } d \equiv 3 \pmod{4} \text{ et } G(\mathbb{Z}[\sqrt{d}]) = \{0\} \text{ si } d \equiv 2 \pmod{4}.$$

On se propose de déterminer  $G(A)$  quand  $A$  est l'anneau des entiers de  $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ , quand  $d$  est positif (sinon  $A(4)$  est nul).

Comme  $A$  est intégralement clos, d'après le lemme 6 de [1], l'application  $\alpha$  est injective. On cherchera donc  $G(A)$  en déterminant  $\text{Im}(\alpha)$ .

Lemme 1. Si  $z \in A(4)$  alors  $z \in \mathbb{Z}[\sqrt{d}]$  et  $N(1-4z) = 1$ .

Preuve. Si  $d \not\equiv 1 \pmod{4}$   $A = \mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ . Sinon soit  $0 \neq z = a_0 + b_0 \frac{1+\sqrt{d}}{2} \in A$   
 $N(1-4z) = N(1-4a_0 - 2b_0\sqrt{d}) = (1-4a_0 - 2b_0\sqrt{d})^2 - (2b_0)^2 d = 1+4k$  d'où  $N(1-4z) = 1$ .  
 En développant on en déduit  $b_0^2 d = (2a_0 + b_0)(2a_0 + b_0 - 1)$  qui est pair, or  $d$  est impair donc  $b_0$  est pair et  $z \in \mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ .

Soit maintenant  $z = a+b\sqrt{d} \in A(4) \subset \mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ . Alors

$$N(1-4z) = \pm 1 = N(1-4a-4b\sqrt{d}) = 1 + 8(2a^2 - a - 2b^2 d);$$

seul  $+1$  convient (et le lemme est démontré) et  $2a^2 - a = 2b^2 d$ .

Ainsi  $a = 2^{\alpha+1} a'$ ,  $b = 2^\beta b'$ ,  $\alpha \geq 0$ ,  $\beta \geq 0$ ,  $a'$  et  $b'$  impairs et

$$2^{\alpha+1} a' (2^{\alpha+2} a' - 1) = 2^{2\beta+1} b'^2 d.$$

Comme  $a'(2^{\alpha+2} a' - 1)$  est impair on obtient, en égalant les puissances de 2

$$\alpha+1 = 2(\beta+1) \text{ si } d = 2d' \quad \alpha+1 = 2\beta+1 \text{ si } d = d' \text{ impair}$$

d'où, après simplification par  $2^{\alpha+1}$  :

$$a'(2^{\alpha+2} a' - 1) = b'^2 d'.$$

Si  $a_1^2$  est le plus grand carré divisant  $a'$ ,  $a' = \delta a_1^2$  d'où

$$\delta a_1^2 (2^{\alpha+2} a_1^2 \delta^{-1}) = b'^2 d'$$

où  $\delta$  et  $d$  sont sans facteur carré et où  $\delta$  et  $a_1^2$  sont premiers avec  $2^{\alpha+2} a_1^2 \delta^{-1}$  donc  $\delta$  divise  $d'$  et  $a_1$  divise  $b'$ . Ainsi  $d' = \delta d_3$  et  $b' = a_2 y$  et alors

$$2^{\alpha+2} a_1^2 \delta^{-1} = d_3 y^2$$

Comme  $\alpha$  est positif et  $y$  est impair on en déduit  $d_3 \equiv 3 \pmod{4}$ . Si  $d$  est impair  $d = d' = \delta d_3$  et  $\alpha+2 = 2(\beta+1)$  ; l'équation devient :

$$(2^{\beta+1} a_1)^2 \delta^{-1} = d_3 y^2 .$$

Si  $d$  est pair  $d = 2d' = 2\delta d_3$ ,  $\alpha+2 = 2(\beta+1)+1$  ; l'équation devient :

$$(2^{\beta+1} a_1)^2 2\delta^{-1} = d_3 y^2 .$$

Ainsi dans chaque cas, si  $d = d_0 d_3$  et  $x = 2^{\beta+1} a_1$  (qui est pair) on a

$$d_0 x^2 - d_3 y^2 = 1 \qquad d_0 d_3 = d, \quad d_3 \equiv 3 \pmod{4} .$$

Comme  $a = 2^{\alpha+1} a' = 2^{\alpha+1} a_1^2 \delta$  on en déduit

$$\begin{aligned} \text{si } d = 2d' \quad (d' \text{ où } \alpha+1 = 2(\beta+1)) \quad a &= \frac{(2^{\beta+1} a_1)^2 2\delta}{2} = \frac{x^2}{2} d_0 \\ \text{si } d = d' \quad (d' \text{ où } \alpha+1 = 2\beta+1) \quad a &= \frac{(2^{\beta+1} a_1)^2 \delta}{2} = \frac{x^2}{2} d_0 \end{aligned}$$

Et  $b = 2^\beta b' = 2^\beta a_1 y = \frac{(2^{\beta+1} a_1) y}{2} = \frac{xy}{2}$ . D'où la condition nécessaire de la

**Proposition 1.** Soit  $A$  l'anneau des entiers de  $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ ,  $d > 0$ . Un élément non nul  $z$  appartient à  $A(4)$  si et seulement si

$$z = \frac{x}{2} d_0 + \frac{xy}{2} \sqrt{d}$$

où  $d_0 d_3 = d$ ,  $d_3 \equiv 3 \pmod{4}$  et  $d_0 x^2 - d_3 y^2 = 1$  avec  $x$  pair.

Démonstration de la réciproque. Soit  $z$  vérifiant les hypothèses. Alors

$$1-4z = 1-2d_0 x^2 + 2xy \sqrt{d} \quad d' \text{ où}$$

$$N(1-4z) = (1-2d_0 x^2)^2 - 4d x^2 y^2 = 1-4(d_0 x^2 - d_0 x^2 (d_0 x^2 - d_3 y^2)) = 1$$

donc  $1-4z \in U(A)$  d'où  $z \in A(4)$ , c.q.f.d.

D'après le lemme 1,  $A(4) \subset \mathbb{Z}[\sqrt{d}]$  donc  $1-4z = \pm \varepsilon^n$  pour tout  $z \in A(4)$  où  $\varepsilon$  est l'unité fondamentale de  $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$  (c'est le cube de celle de  $A$  si celle de  $A$  n'appartient pas à  $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ ).

**Lemme 2.** Soit  $0 \neq z = \frac{x}{2} d_0 + \frac{xy}{2} \sqrt{d} \in A(4)$ . On a  $\alpha(z) = \pm \varepsilon$  si et seulement si  $d_0 \neq 1$  et  $d_0 \neq -d$ .

Preuve.  $1-4z = 1-2(d_0x^2 + xy\sqrt{d}) = 1 - (d_0x^2 - d_3y^2) - d_0x^2 - d_3y^2 - 2xy\sqrt{d}$  d'où  

$$1-4z = -(d_0x^2 + d_3y^2 + 2xy\sqrt{d})$$

Si  $d_0 > 0$  (donc  $d_3$  aussi) alors  $1-4z = -(x\sqrt{d_0} + y\sqrt{d_3})^2$  et si  $d < 0$   
 $1-4z = (x\sqrt{|d_0|} + y\sqrt{|d_3|})^2$ . Donc, comme  $\alpha(z) = \pm \varepsilon$  est équivalent à  $\alpha(z) \neq \pm 1$ ,  
 on doit avoir  $x\sqrt{d_0} + y\sqrt{d_3} \notin \mathbb{Z}[\sqrt{d}]$  et  $x\sqrt{|d_0|} + y\sqrt{|d_3|} \notin \mathbb{Z}[\sqrt{d}]$  c'est-à-dire,  
 puisque  $d_3 \equiv 3 \pmod{4}$ ,  $d_0 \neq 1$  et  $d_0 \neq -d$ . La réciproque est évidente.

Lemme 3. Soit  $\varepsilon = \eta + \zeta\sqrt{d}$  l'unité fondamentale de  $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ . On a  $-1 \in \text{Im}(\alpha)$  si  
 et seulement si  $d \equiv 3 \pmod{4}$  et  $\zeta$  est impair.

Preuve. D'après la démonstration précédente, si  $\alpha(z) = -1$  alors  $d_0 = 1$ . Donc  
 $d = d_0d_3 = d_3 \equiv 3 \pmod{4}$  et comme  $z \in A(4)$  l'équation  $x^2 - dy^2 = 1$  a une solu-  
 tion avec  $x$  pair. Comme  $d \equiv 3$ ,  $N(\varepsilon) = \eta^2 - \zeta^2d = +1$  et  $\eta\zeta$  est pair. Le dévelop-  
 pement de  $x + y\sqrt{d} = (\eta + \zeta\sqrt{d})^n$  donne alors

$$x = \eta^n + \zeta^n d^{n/2} \equiv 1 \pmod{2} \quad \text{si } n \text{ est pair}$$

$$x = \eta^n \equiv \eta \pmod{2} \quad \text{si } n \text{ est impair.}$$

Donc  $x$  pair exige  $\eta$  pair donc  $\zeta$  impair. Réciproquement si  $d \equiv 3 \pmod{4}$  et  
 $\zeta$  impair, l'équation  $x^2 - dy^2 = 1$  a une solution avec  $x = \eta$  pair. Ainsi

$$z = \frac{\eta^2}{2} + \frac{\eta\zeta}{2}\sqrt{d} \in A(4) \text{ et } \alpha(z) = -1.$$

Lemme 4. Si  $N(\varepsilon) = -1$  alors  $G(A) = \{0\}$ .

Preuve. Comme  $N(\varepsilon) = -1$  implique  $d \not\equiv 3 \pmod{4}$ , du lemme 3 on déduit  
 $G(A) \subset \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ . Si  $0 \neq z \in G(A)$ , comme  $1-4z = \pm \varepsilon^n$ , d'après le lemme 1 on obtient  
 $1 = N(1-4z) = N(\pm \varepsilon^n) = N(\varepsilon^n) = (N(\varepsilon))^n = (-1)^n$  ainsi  $n = 2m$  donc  $\alpha(z) = 1$  ou  
 $-1$  mais ce dernier cas est impossible car  $d \not\equiv 3$ .

Théorème 1. Soit  $A$  l'anneau des entiers de  $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ ,  $d > 0$ .

Si  $d \equiv 3 \pmod{4}$  alors  $G(A) \sim \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$

Si  $d \not\equiv 3 \pmod{4}$  alors  $G(A) \sim \{0\}$  ou  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$

et dans ce cas  $G(A)$  n'est pas nul si et seulement si les propositions suivantes,  
qui sont équivalentes, sont vérifiées :

(a) il existe une décomposition de  $d$  en  $d_0d_3$  avec  $d_0 \neq 1$ ,  $d_0 \neq -d$ ,  
 $d_3 \equiv 3 \pmod{4}$  telle que l'équation  $d_0x^2 - d_3y^2 = 1$  ait une solution ;

(b) l'unité fondamentale  $\varepsilon = \eta + \zeta\sqrt{d}$  de  $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$  vérifie  $\zeta \equiv 0 \pmod{4}$ .

Démonstration. 1) Cas où  $d \not\equiv 3 \pmod{4}$ . Si  $G(A) \neq \{0\}$ , d'après le lemme 3 et le lemme 2 la condition (a) est vérifiée avec  $x$  pair ; mais s'il y a une solution comme  $d_3 \equiv 3 \pmod{4}$  et  $d_0 \not\equiv 1 \pmod{4}$ , obligatoirement  $x$  est pair. D'où (a).

Réciproquement si (a) est vérifiée  $x$  est pair d'où

$$z = \frac{x^2}{2} d_0 + \frac{xy}{2} \sqrt{d} \in A(4) \text{ et } \alpha(z) = \overline{+\varepsilon} \text{ donc } G(A) \text{ n'est pas nul.}$$

(a)  $\Rightarrow$  (b) Si (a) est vérifiée il existe  $0 \neq z \in G(A)$  tel que

$$1-4z = -(d_0 x^2 + d_3 y^2 + 2xy \sqrt{d}) = -\varepsilon = -(\eta + \zeta \sqrt{d}) \text{ si } d_0 \text{ est positif}$$

et  $1-4z = +(|d_0| x^2 + |d_3| y^2 + 2xy \sqrt{d}) = \varepsilon = \eta + \zeta \sqrt{d}$  si  $d_0$  est négatif donc, comme  $x$  est pair,  $\zeta = \pm 2xy \equiv 0 \pmod{4}$ .

(b)  $\Rightarrow$  (a) Si  $\zeta \equiv 0 \pmod{4}$  alors  $N(\varepsilon) = \eta^2 - \zeta^2 d \equiv \eta^2 \pmod{16}$  donc  $N(\varepsilon) = 1$  d'où  $\eta = \pm 1 \pmod{8}$ . Ainsi une valeur  $z = \frac{1 + (\eta + \zeta \sqrt{d})}{4}$  appartient à  $Z[\sqrt{d}]$ . Et comme  $1-4z = \pm \varepsilon$ ,  $\alpha(z) \neq \overline{1}$  donc  $G(A)$  n'est pas nul et (a) est vérifiée.

2) Cas où  $d \equiv 3 \pmod{4}$  (donc  $d_0 \equiv 1 \pmod{4}$ ). Si (a) est vérifiée avec  $x$  impair l'équation  $-d_0 x^2 - (-d_0) y^2 = 1$  (où  $-d_0 \equiv 3$ ) a une solution avec  $x$  pair (la valeur  $y$  de  $d_0 x^2 - d_3 y^2 = 1$ ). Ici encore (a) et (b) sont équivalents. Ainsi, d'après la condition (b) ( $\zeta \equiv 0 \pmod{4}$ ) et le lemme 3 ( $\zeta \equiv 1$  ou  $3 \pmod{4}$ )  $\overline{1}$  et  $\overline{+\varepsilon}$  ne peuvent, compte tenu du lemme 2, appartenir simultanément à  $\text{Im}(\alpha)$ . Donc dans ces trois cas  $G(A) \sim Z/2Z$ . Comme le cas  $\zeta \equiv 2 \pmod{4}$  est exclu (car  $\eta^2 - \zeta^2 d = 1$  impliquerait  $4d \equiv 0 \pmod{8}$ ) le théorème est démontré.

Corollaire. Si  $N(\varepsilon) = -1$ , alors  $G(A)$  est nul et, si  $d$  est impair, la réciproque est vraie.

Preuve. La condition est nécessaire (c'est le lemme 4). Réciproquement si  $G(A) = \{0\}$  alors  $d \not\equiv 3 \pmod{4}$  donc  $d \equiv 1 \pmod{4}$  et d'après le théorème 1 on a  $\zeta \not\equiv 0 \pmod{4}$ . Si  $\zeta$  est impair,  $\eta$  est pair donc  $N(\varepsilon) = \eta^2 - \zeta^2 d \equiv -1 \pmod{4}$  donc  $N(\varepsilon) = -1$ . Si  $\zeta \equiv 2 \pmod{4}$ ,  $N(\varepsilon) \equiv 1-4d \pmod{8}$ . Si  $N(\varepsilon) = 1$  alors  $4d \equiv 0 \pmod{8}$  impossible car  $d$  impair et si  $N(\varepsilon) = -1$  alors  $2 \equiv 4d \pmod{8}$  impossible. Ce cas est donc exclu.

Comme  $N(5 + 2\sqrt{6}) = +1$ , la réciproque est fautive pour  $d$  pair.

Remarque 1. Le théorème 1 démontre la conjecture de Small pour  $d \equiv 3 \pmod{4}$ . Il infirme celle pour  $d \equiv 2 \pmod{4}$  car  $G(Z[\sqrt{d}]) \sim Z/2Z$  pour  $d = 14, 46, 62, 94$  et 138 car les cinq expressions suivantes, qui fournissent explicitement des valeurs de  $z$  telles que  $\alpha(z) = \overline{-\varepsilon}$ , valent 1 :

$$\begin{aligned} 2.2^2 - 7.1^2 &= 2.78^2 - 23.23^2 = 2.4^2 - 31.1^2 = 2.732^2 - 47.151^2 = \\ &= 6.2^2 - 23.1^2 = 1 \end{aligned}$$

Remarque 2. La comparaison du théorème 1 avec le théorème 1 de [5] montre que le cardinal de  $G(A)$  est plus petit ou égal à celui de  $Q_{fs}(A)$  groupe des extensions quadratiques séparables libres de  $A$ . En est-il ainsi pour tout anneau  $A$  ?

Notons  $(A, a, b)$  l'extension quadratique séparable libre  $B = A \oplus Ax$  où  $x^2 = ax + b$  et  $a^2 + 4b \in U(A)$  et  $[A, a, b]$  sa classe d'isomorphisme. Comme d'après [4] la loi sur  $Q_{fs}(A)$  est

$$[A, a, b] [A, c, d] = [A, ac, a^2d + c^2b + 4bd]$$

les éléments  $[A, 1, b]$  forment un sous-groupe de  $Q_{fs}(A)$ .

Théorème 2. Soient  $A$  un anneau commutatif unitaire quelconque et  $Q_{fs}(A)$  le groupe des classes d'isomorphisme des extensions quadratiques séparables libres de  $A$ . Le groupe  $G(A)$  est isomorphe au sous-groupe formé des éléments  $[A, 1, -z]$  de  $Q_{fs}(A)$ .

Démonstration. Soient  $z \in A(4)$  et  $\bar{z} \in G(A)$ . Si  $\bar{z} = \bar{z}'$ , d'après [2],  $z' = z - (x^2 - x)(1-4z)$  donc  $1-4z' = (1-4z)(1-2x)^2$ . Comme  $z$  et  $z'$  appartiennent à  $A(4)$ ,  $u = 1-2x \in U(A)$  et donc  $v = \frac{-x}{1-2x} \in A$ . Ainsi

$$-z' = -z + (x^2 - x)(1-4z) = u^2(v-z-v^2) \quad \text{et} \quad u(1-2v) = 1$$

donc, d'après le lemme 1 de [4], on a  $(A, 1, -z) \simeq (A, 1, -z')$ . L'homomorphisme

$$g : G(A) \rightarrow Q_{fs}(A)$$

$$\bar{z} \mapsto [A, 1, -z]$$

est donc bien défini. Considéré comme application à valeurs dans le sous-groupe des éléments  $[A, 1, b]$  il est surjectif. L'élément neutre de  $Q_{fs}(A)$  étant  $[A, 1, 0]$  si  $g(\bar{z}) = [A, 1, -z] = [A, 1, 0]$  d'après le lemme 1 de [4] il existe  $u \in U(A)$  et  $v \in A$  tels que  $1 = u(1-2v)$  et  $0 = u^2(v \cdot 1 - z - v^2)$ , donc  $z = v - v^2 = 0 - (v^2 - v)(1-4 \cdot 0)$  donc  $z \sim 0 \in A(4)$  donc  $\bar{z} = \bar{0}$  et  $g$  est injective.

Elle peut ne pas être surjective : la comparaison entre le théorème 1 et le théorème 1 de [5] montre en effet que pour les trois cas  $d \equiv 1, 2$  ou  $3 \pmod{4}$  les plus petites valeurs de  $d$  telle que  $G(A)$  soit un sous-groupe strict de  $Q_{fs}(A)$  sont respectivement  $d = 5, 6$  et  $39$  (les unités fondamentales étant  $\frac{1+\sqrt{5}}{2}, 5+2\sqrt{6}$  et  $25+4\sqrt{39}$ ). Dans le cas où  $d \equiv 1 \pmod{4}$ , si  $\varepsilon \in Z[\sqrt{d}]$  alors  $G(A) \simeq Q_{fs}(A)$  (car  $\zeta$  pair implique  $\zeta \equiv 0 \pmod{4}$ ) et si  $\varepsilon \notin Z[\sqrt{d}]$ ,  $G(A) \simeq Q_{fs}(A)$  si et seulement si  $N(\varepsilon) = 1$  (car,  $\eta + \zeta\sqrt{d}$  désignant  $\varepsilon^3$ ,  $N(\varepsilon) = 1$  implique  $\zeta \equiv 0 \pmod{4}$  et  $N(\varepsilon) = -1$  implique  $\zeta$  impair).

Comme  $Q_{fs}(A)$  est un sous-groupe de  $Q(A)$  (cf. [3], théorème 2), on déduit du théorème 2 le corollaire suivant :

Théorème 3. Soit  $A$  un anneau commutatif unitaire. Le groupe  $G(A)$  est un sous-groupe du groupe  $Q(A)$  des extensions quadratiques de  $A$ .

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] A. MICALI et P. REVOY - Algèbres de Clifford séparables, Secrétariat des Mathématiques, Université de Montpellier, 1969 ; M.R.46,198 b(1973).
- [2] A. MICALI et O. VILLAMAYOR - Sur les algèbres de Clifford, Ann. Sc. Ecole Norm. Sup. 4è. I (1968), 271-304.
- [3] C. SMALL - The group of quadratic extensions. J. of Pure and Applied Algebra 2 (1972) 83-105.
- [4] K. KITAMURA - On the free quadratic extension of a commutative ring. Osaka J. Math. 10 (1973), 15-20.
- [5] J.-D. THEROND - Le groupe des extensions quadratiques séparables libres de l'anneau des entiers de  $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ , C.R.Acad. Sc. Paris. Série A, 281 (1975), 939-942.

Institut de Mathématiques  
Université des Sciences et  
Techniques du Languedoc

34060 MONTPELLIER CEDEX

FRANCE

---