

# MÉMOIRES DE LA S. M. F.

O. LABORDE

## **Classes de Stiefel-Whitney en cohomologie étale**

*Mémoires de la S. M. F.*, tome 48 (1976), p. 47-51

<[http://www.numdam.org/item?id=MSMF\\_1976\\_\\_48\\_\\_47\\_0](http://www.numdam.org/item?id=MSMF_1976__48__47_0)>

© Mémoires de la S. M. F., 1976, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Mémoires de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Memoires/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

CLASSES DE STIEFEL - WHITNEY EN COHOMOLOGIE ÉTALE

par

O. LABORDE

On donne une construction des classes de Stiefel-Whitney d'un fibré quadratique complexe en cohomologie usuelle et on indique comment la paraphraser au cas d'un module projectif quadratique sur un schéma avec la cohomologie étale. Enfin, on remarque que les classes ainsi obtenues coïncident avec celles définies par A. Delzant pour un espace quadratique sur un corps de caractéristique différente de 2.

I - Généralités sur les fibrés vectoriels

Étant donné un espace topologique  $B$ , un fibré  $\xi = (E, p, B)$  sur  $B$  est formé d'un espace topologique  $E$  et d'une application continue  $p$  de  $E$  dans  $B$ . Un exemple bien connu est le  $n$ -fibré type réel  $\theta^n = (B \times \mathbb{R}^n, pr_1, B)$ .

A tout  $n$ -fibré vectoriel réel localement trivial, on associe un faisceau  $\underline{\text{Isom}}(\theta^n, \xi)$  sur  $\text{Ouv}(B)$  où  $\Gamma(U, \underline{\text{Isom}}(\theta^n, \xi)) = \text{Isom}(U \times V, \xi|U)$ . C'est un toreur sous le faisceau en groupes  $\underline{\text{Aut}}(\theta^n)$ .

$\Gamma(U, \underline{\text{Aut}}(\theta^n))$  s'identifiant à l'ensemble  $\Gamma(U, \underline{\text{GL}}(n, \mathbb{R}))$  des applications continues de  $U$  dans  $\text{GL}(n, \mathbb{R})$ , il y a une équivalence de catégories entre les  $n$ -fibrés vectoriels réels localement triviaux et les toreurs sous le faisceau en groupes  $\underline{\text{GL}}(n, \mathbb{R})$ . Par conséquent, à chaque classe d'isomorphie de  $n$ -fibrés vectoriels localement triviaux, correspond un élément de l'ensemble  $H^1(B, \text{GL}(n, \mathbb{R}))$ , qui est d'ailleurs en correspondance bijective avec le premier groupe de cohomologie de Čech non abélienne  $H^1(B, \text{GL}(n, \mathbb{R}))$ . On a un résultat analogue pour les fibrés complexes.

Un fibré  $\mathbb{C}$ -orthogonal est un fibré muni d'une application continue  $Q$  de  $E$  dans  $\mathbb{C}$  dont la restriction à chaque fibre sera une forme quadratique non dégénérée. Il est localement isomorphe au fibré  $B \times \mathbb{C}^n$  muni de la forme

$$Q(x, \sum_{i=1}^n z_i e_i) = \sum z_i^2$$

et comme ci-dessus, on lui associe un élément de  $H^1(B, O(n, \mathbb{C}))$ . Les inclusions de  $O(n, \mathbb{R})$  dans  $O(n, \mathbb{C})$  et  $\text{GL}(n, \mathbb{R})$  ayant des espaces quotients qui sont contractiles (cf. [1]), si l'espace  $B$  est paracompact, le théorème de Feldbau ([8]) (Tout fibré de base paracompacte à fibre contractile admet une section), nous fournit des isomorphismes entre  $H^1(B, O(n, \mathbb{R}))$ ,  $H^1(B, O(n, \mathbb{C}))$  et  $H^1(B, \text{GL}(n, \mathbb{R}))$ .

Ces résultats nous montrent que les classifications sont équivalentes.

II - Classes de Stiefel-Whitney d'un fibré orthogonal complexe

Dans ce qui suit, on note  $P^{n-1}(\mathbb{C})$  l'espace projectif complexe de dimension  $n-1$  et  $P^{n-1}(\mathbb{C})^*$  désigne  $P^{n-1}(\mathbb{C}) - V_{\mathbb{C}}$ , où  $V_{\mathbb{C}} = \{L \in P^{n-1}(\mathbb{C}) \mid Q(L) = 0\}$ ,  $Q$  étant ici la forme

$$\sum_{i=1}^n z_i e_i \in \mathbb{C}^n \mapsto \sum_{i=1}^n z_i^2 \in \mathbb{C} .$$

A un fibré quadratique complexe  $\xi = (E, p, B, Q)$ , on associe le fibré  $P(\xi) = (E', q', B)$  où  $E'$  est obtenu en identifiant les vecteurs non nuls des droites des fibres, l'application  $q'$  étant obtenue à partir de  $p$ . Il contient la sous-variété  $V_{\xi} = \{L \in E' \mid Q(L) = 0\}$ .

On appelle  $P(\xi)^*$  le fibré d'espace total  $E' - V_{\xi}$ , de base  $B$ , la projection  $q$  est obtenue par restriction de  $q'$ . Ce fibré est localement isomorphe à  $B \times P^{n-1} \times P^{n-1}(\mathbb{C})^*$ .

Considérons le champ  $\mathcal{F}$  (cf. [4]) formé par les fibrés vectoriels sur  $\text{Ouv}(B)$  qui sont munis d'une forme quadratique non dégénérée. Le fibré trivial de rang un, i. e.  $(B \times \mathbb{C}, \text{pr}_1, B, (x, z) \mapsto z^2)$  sera désigné par  $\mathbb{1}$ .

Il y a une équivalence de catégories entre les fibrés quadratiques sur  $B$  localement isomorphes à  $\mathbb{1}$  et les torsseurs sur  $B$  en groupe  $\mathbb{Z}/2 \simeq \text{Aut}(\mathbb{1})$  qui à tout fibré quadratique  $\xi$  associe le faisceau  $\text{Isom}(\mathbb{1}, \xi)$ .

On notera  $E^{n-1}(\mathbb{C})$  (resp.  $E^{n-1}(\mathbb{R})$ ) le fibré universel linéaire sur  $P^{n-1}(\mathbb{C})$  (resp.  $P^{n-1}(\mathbb{R})$ ) (cf. [5] ou [6]).

Il est bien connu que l'élément  $\text{Isom}(\mathbb{1}, E^{n-1}(\mathbb{R}))$  de  $H^1(P^{n-1}(\mathbb{R}), \mathbb{Z}/2)$  est un générateur de  $H^*(P^{n-1}(\mathbb{R}), \mathbb{Z}/2)$  (cf. [7]).

Puisque  $P^{n-1}(\mathbb{R})$  est un rétracte par déformation de  $P^{n-1}(\mathbb{C})^*$ , si  $E^{n-1}(\mathbb{C})^*$  est la restriction de  $E^{n-1}(\mathbb{C})$  à  $P^{n-1}(\mathbb{C})^*$ , il en résulte que  $\text{Isom}(\mathbb{1}, E^{n-1}(\mathbb{C})^*) \in H^1(P^{n-1}(\mathbb{C}), \mathbb{Z}/2)$  est un générateur de  $H^*(P^{n-1}(\mathbb{C})^*, \mathbb{Z}/2)$ .

Nous avons dans  $q^{-1}\xi$  le sous-fibré de rang un  $\lambda_{\xi} = \{(\langle \Delta, x \rangle \in P(\xi^*) \times E \mid x \in [L])\}$ .

On lui associe l'élément  $\text{Isom}(\mathbb{1}, \lambda_{\xi})$  de  $H^1(P(\xi^*), \mathbb{Z}/2)$  que l'on notera  $a_{\xi}$ . Pour chaque  $b \in B$ , on a en choisissant une base dans la fibre, un isomorphisme  $j_b$  entre  $q^{-1}(b)$  et  $P^{n-1}(\mathbb{C})^*$ . Considérons le diagramme

$$\begin{array}{ccccccc} E^{n-1}(\mathbb{C})^* & \longrightarrow & \lambda_{\xi} & \hookrightarrow & q^{-1}\xi & \longrightarrow & E \\ \downarrow & & \searrow & & \downarrow & & \downarrow p \\ P^{n-1}(\mathbb{C})^* & \xrightarrow{j_b} & P(\xi^*) & \xrightarrow{q} & B & & B \end{array}$$

Les fibrés  $j_b^{-1}(\lambda_{\xi})$  et  $E^{n-1}(\mathbb{C})^*$  étant isomorphes,  $j_b^*(a_{\xi})$  est un générateur de  $H^*(P^{n-1}(\mathbb{C})^*, \mathbb{Z}/2)$ .

Les éléments  $1, a_\xi, \dots, a_\xi^{n-1}$  sont tels que leurs images par  $j_b^*$  forment une  $\mathbb{Z}/2$ -base de  $H^{n-1}(P^{n-1}(\mathbb{C})^*, \mathbb{Z}/2)$  et le théorème de Leray-Hirsch ([7]) montre qu'ils forment une  $H^*(B, \mathbb{Z}/2)$ -base de  $H^*(P(\xi^*), \mathbb{Z}/2)$ .

L'élément  $a_\xi^n$  peut donc s'écrire

$$= \sum_{i=1}^n w_i(\xi) a_\xi^{n-i}$$

où les  $w_i(\xi) \in H^i(B, \mathbb{Z}/2)$ , et on définit la classe de Stiefel-Whitney totale de  $\xi$  par :

$$w(\xi) = 1 + w_1(\xi) + \dots + w_n(\xi)$$

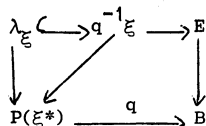
Remarquons que  $H^*(B, \mathbb{Z}/2)$  s'injecte dans  $H^*(P(\xi^*), \mathbb{Z}/2)$ .

Ces classes possèdent les propriétés suivantes qui les caractérisent de façon unique :

- 1) fonctorialité,
- 2) additivité,
- 3) normalité : si  $\xi$  est un fibré quadratique de rang un,  $w_1(\xi)$  est l'élément de  $H^1(B, \mathbb{Z}/2)$  fourni par ce fibré.

Pour les démontrer, on commence par remarquer qu'il existe pour chaque fibré  $\xi = (E, P, B, Q)$  une application continue d'un espace  $B_1$  dans  $B$  telle que  $f^{-1}\xi$  soit une somme orthogonale de fibrés quadratiques de rang un et que l'application  $f^*$  de  $H^*(B)$  dans  $H^*(B_1)$  soit injective.

Son existence est obtenue à partir de la décomposition  $q^{-1}\xi = \lambda_\xi + \sigma_\xi$  ( $\lambda_\xi$  anisotrope) et on réitère.



Pour l'additivité, il suffit de montrer que si  $\xi = \lambda_1 \perp \dots \perp \lambda_n$ , alors

$w(\xi) = \prod_{i=1}^n (1 + w_1(\lambda_i))$ . La démonstration s'inspire de ([5]). On a les suites

exactes :

$$0 \rightarrow \lambda_\xi \rightarrow q^{-1}\xi \simeq \bigoplus_{i=1}^n q^{-1}\lambda_i \rightarrow \sigma_\xi \rightarrow 0$$

$$0 \rightarrow \theta^1 \simeq \bigvee \lambda_\xi \otimes \lambda_\xi \rightarrow \bigoplus_{i=1}^n [\bigvee \lambda_\xi \otimes q^{-1}\lambda_i] \rightarrow \bigvee \lambda_\xi \otimes \sigma_\xi \rightarrow 0$$

Le fibré  $\bigvee \lambda_\xi \otimes \lambda_\xi$  a une section non triviale que nous composons pour obtenir des sections  $s_i$  de  $\bigvee \lambda_\xi \otimes q^{-1}\lambda_i$ .

Soit  $V_i$  l'ouvert de  $P^{n-1}(\mathbb{C})^*$  formé des points où  $s_i$  est non nulle. L'image de  $\bigvee \lambda_\xi \otimes q^{-1}\lambda_i$  est nulle dans  $H^1(V_i)$  et elle prend ses valeurs en fait dans

$H^*(P^{n-1}(\mathbb{C})^*, V_i)$ . En outre, le cup-produit  $\sum_{i=1}^n w_i(\lambda_{\xi}^{\vee} \otimes q^{-1}\lambda_i)$  est un élément de  $H^*(P^{n-1}(\mathbb{C})^*, \bigcup_{i=1}^n V_i) = H^*(P^{n-1}(\mathbb{C})^*, P^{n-1}(\mathbb{C})^*) = 0$ . Nous avons donc une relation.

$\prod_{i=1}^n [q^*(w_i(\lambda_i^{\vee}) + w_i(\lambda_{\xi}^{\vee})) = 0$  qui donne l'égalité recherchée. On en déduit aussitôt l'unicité.

### III - Classes caractéristiques d'un module quadratique sur un schéma S

Soit M un  $\mathcal{O}_S$ -Module. On appelle forme quadratique sur M un morphisme Q de M dans S qui vérifie les conditions suivantes :

- pour tout ouvert U de S, pour tout  $\lambda \in \Gamma(U, S)$  et tout  $x \in \Gamma(U, M)$ , on a  $Q(\lambda x) = \lambda^2 Q(x)$ ,
- l'application de  $M \times M$  dans S définie par  $Q(x+y) - Q(x) - Q(y)$  est bilinéaire en x et y.

On suppose que M est localement libre de type fini. Considérons le foncteur qui à chaque S-schéma S' associe l'ensemble  $G(Q(M_{S'}))$  formé des sous-modules quadratiques inversibles et localement facteurs directs tels que la forme quadratique induite soit non dégénérée. Il est représentable par un schéma noté  $P(M)^*$ .

Nous supposons maintenant que les corps résiduels sont de caractéristique différente de 2. Pour la cohomologie étale, on peut se référer à ([2]).

En employant une construction identique à celle qui précède, on obtient un module  $L^*$  qui correspond à la donnée d'un torseur sur  $\mu_2 \simeq \mathbb{Z}/2$ , i. e. d'un élément de  $H^1(P(M)^*, \mathbb{Z}/2)$ . L'analogie en cohomologie étale du théorème de Leray-Hirsch, implique encore que les éléments  $1, \eta, \dots, \eta^{n-1}$  forment une  $H^*(S, \mathbb{Z}/2)$ -base de  $H^*(P(M)^*, \mathbb{Z}/2)$ .

Les classes de Stiefel-Whitney de Q sont données par  $\eta^n = - \sum_{i=1}^n w_i(Q) \eta^{n-i}$  et on pose encore  $w(Q) = 1 + w_1(Q) + \dots + w_n(Q)$ . Ces classes ont les propriétés suivantes :

- fonctorialité par changement de base,
- $w(Q_1 \perp Q_2) = w(Q_1) w(Q_2)$ ,
- normalité : si Q est une forme quadratique sur S,  $w(Q)$  correspond au torseur associé à celle-ci et elles les caractérisent de façon unique.

Si nous prenons un espace quadratique sur un corps k de caractéristique différente de 2, nous retrouvons les classes définies par A. Delzant dans ([3]) car  $X = \text{Spec}(k)$  et si  $\bar{k}$  est la clôture séparable de k, nous avons  $H_{\text{ét}}^1(\text{Spec}(k), \mathbb{Z}/2) = H(G(\bar{k}/k), \mathbb{Z}/2)$  et  $H^1(G(\bar{k}/k), \mathbb{Z}/2) \simeq k^*/k^{*2}$ .

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] C. CHEVALLEY, Theory of Lie groups. Princeton University Press, 1946.
- [2] P. DELIGNE, Cohomologie étale : Les points de départ. Cours à Arcata en 1974.
- [3] A. DELZANT, Définition des classes de Stiefel-Whitney d'un module quadratique sur un corps de caractéristique différente de 2. C.R.Acad. Sci. Paris. 255, 1366-1368 (1962).
- [4] J. GIRAUD, Cohomologie non abélienne. Springer Verlag, Berlin, 1971.
- [5] D. HUSEMOLLER, Fibre Bundles. Mc Graw Hill, 1966.
- [6] J.W. MILNOR and J.D. STASHEFF, Characteristic classes. Annals of Mathematics studies. Princeton University Press, 1974.
- [7] E.H. SPANIER, Algebraic topology, Mc Graw Hill, 1966.
- [8] N. STEENROD, The topology of fibre bundle. Princeton University Press, 1951.

Institut des Mathématiques  
Université des Sciences et  
Techniques du Languedoc

34060 - MONTPELLIER-CEDEX

FRANCE

---