MÉMOIRES DE LA S. M. F.

J. BARGE

Formes hermitiennes sur les $Z[x, x^{-1}]$-modules

Mémoires de la S. M. F., tome 48 (1976), p. 7-10
<http://www.numdam.org/item?id=MSMF_1976__48__7_0>

Col. sur les Formes Quadratiques (1975, Montpellier)
Bull. Soc. Math. France
Mémoire 48, 1976, p. 7-10

FORMES HERMITIENNES SUR LES $Z[X,X^{-1}]$ - MODULES

par

J. BARGE

1. Introduction. Soit V une variété différentiable, compacte, sans bord, de dimension n, et orientée. Notons [V] sa classe d'orientation. Notons respectivement $T_p(V)$ et $T^{(n-p)}(V)$, la torsion du $p^{\text{ième}}$ groupe d'homologie $H_p(V\ ;\ Z)$ et du $(n-p)^{\text{ième}}$ groupe de cohomologie $H^{(n-p)}(V\ ;\ Z)$ de la variété V. Notons $L_p(V)$ et $L^{(n-p)}(V)$, les quotients libres, $H_p(V\ ;\ Z)/T_p(V)$ et $H^{(n-p)}(V\ ;\ Z)/T^{(n-p)}(V)$.

La "formule" des coefficients universels (voir par exemple [6])

$$0 \to \mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(H_{n-p-1}(V\ ;\ Z)\ ;\ Z) \to H^{n-p}(V\ ;\ Z) \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(H_{n-p}(V\ ;\ Z)\ ;\ Z) \to 0$$

identifie $\mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(H_{n-p-1}(V\ ;\ Z)\ ;\ Z)$ à $T^{n-p}(V)$ et $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(H_{n-p}(V\ ;\ Z)\ ;\ Z)$ à $L^{n-p}(V)$.

L'isomorphisme de Poincaré [6] :

$$\cap[V]\ :\ H^{n-p}(V\ ;\ Z) \xrightarrow{\sim} H_p(V\ ;\ Z)$$

ou plutôt son inverse se "découpe" donc en deux isomorphismes

a) $T_p(V) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(H_{(n-p-1)}(V\ ;\ Z)\ ;\ Z) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(T_{(n-p-1)}(V)\ ;\ \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$

b) $L_p(V) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(H_{n-p}(V\ ;\ Z)\ ;\ Z) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(L_{(n-p)}(V)\ ;\ Z)$.

Ces deux isomorphismes donnent naissance, dans les bonnes dimensions à deux types de formes bilinéaires.

a) La forme d'enlacement [4]

$$n = 2k-1\ :\ T_{k-1}(V) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(T_{k-1}(V)\ ;\ \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$$

qui est $(-1)^k$ symétrique et non dégénérée.

b) La forme d'intersection [4]

$$n = 2k\ :\ L_k(V) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(L_k(V)\ ;\ Z)$$

qui est $(-1)^k$ symétrique et non dégénérée.

Le but de cet exposé est de mettre en évidence des phénomènes analogues, lorsqu'on remplace l'anneau Z par l'anneau des polynômes de Laurent à coefficients entiers $Z[X,X^{-1}]$. Cette situation est géométrique : elle apparaît dans l'étude des noeuds [5] ou plus généralement des revêtements infinis cycliques [1].

2. Filtration des $Z[X,X^{-1}]$-modules

Soit A l'anneau $Z[X,X^{-1}]$.

a) Spectre de A. Le spectre de l'anneau A est constitué d'idéaux premiers de hauteur 0, 1 et 2. Le seul idéal premier de hauteur 0 est l'idéal (0). Les idéaux premiers de hauteur 1 sont principaux. Nous les notons π.
Les idéaux premiers de hauteur 2 sont maximaux. Nous les notons $\mathfrak{m}$.

b) A-modules de torsion et A-modules pseudo-nuls. [2] . Soit M un A-module. Nous notons $M_{(p)} = M \otimes_A A_{(p)}$ le localisé de M par rapport à l'idéal premier p.

Définitions :

Le sous-module de torsion $T(M)$ du A-module M est le noyau de l'homomorphisme : $M \to M_{(0)}$. Le module M est dit de torsion si $M = T(M)$. Le module M est dit sans torsion si $T(M) = 0$.

Le sous-module pseudo-nul $P(M)$ du A-module M est le noyau de l'homomorphisme $M \to \oplus M_{\pi(\pi)}$. Le module M est dit pseudo-nul si $M = P(M)$. Le module M est dit pur de torsion si M est de torsion et $P(M) = 0$.
L'élément m du module M est dit pseudo-nul s'il appartient à $P(M)$. Ce qui signifie que son annulateur est non nul et non contenu dans un idéal premier de hauteur 1.

Exemples

Tout quotient, tout sous-module d'un module pseudo-nul est pseudo-nul.

Tout A-module M de cardinal fini est pseudo-nul car $(\# M).\ M = 0$ et $[X^{(\# \mathrm{Aut}\ M)} - 1].\ M = 0$.

Réciproquement tout A-module M, pseudo-nul, de type fini est fini.

Soit M un A-module de type fini. Le sous-module $P(M)$ est contenu dans la torsion sur Z de M et ne lui est égale que lorsque cette dernière est finie.

c) Filtration des A-modules. Pour tout A-module M, nous avons l'inclusion $P(M) \subset T(M)$. Tout A-module M porte donc une filtration fonctorielle.

$$0 \subset P(M) \subset T(M) \subset M \quad .$$

Nous notons $P(M), T'(M), L(M)$ le gradué associé. Le module $T'(M)$ est donc pur de torsion.

3. Cohomologie des complexes différentiels de A-modules

a) La résolution injective minimale de A.

Proposition. La suite

$$0 \to A \to A_{(0)} \to \bigoplus_{\pi} \frac{A_{(0)}}{A_{(\pi)}} \to C \to 0$$

est la résolution injective minimale de A.
Le A-module $A_{(0)}/A$ est pur de torsion.
Le A-module C est pseudo-nul.
Nous en déduisons les corollaires suivants.

Corollaire. Pour tout A-module M, nous avons les isomorphismes canoniques

$$\mathrm{Ext}^1_A(M\ ;\ A) \simeq \mathrm{Hom}_A(T'(M)\ ;\ \frac{A_{(0)}}{A}) \ .$$

$$\mathrm{Ext}^2_A(M\ ;\ A) \simeq \mathrm{Hom}_A(P(M)\ ;\ C) \ .$$

Corollaire. Pour tout A-module M, le A-module $\mathrm{Ext}^1_A(M\ ;\ A)$ est pur de torsion et le A-module $\mathrm{Ext}^2_A(M\ ;\ A)$ est pseudo-nul.

b) Complexes différentiels de A-modules

Soit C_* un complexe différentiel de A-modules libres de type fini. Nous faisons maintenant l'hypothèse (H) suivante :

(H). Les A-modules d'homologie $H_*(C_*\ ;\ A)$ du complexe C_* sont de torsion.

Sous l'hypothèse (H), la suite spectrale qui "calcule" la cohomologie du complexe C_* dégénère et fournit la suite exacte [3].

$$0 \to \mathrm{Ext}^2_A\,[H_{p-2}(C_*\ ;\ A)\ ;\ A] \to H^p(C_*\ ;\ A) \to \mathrm{Ext}^1_A\,[H_{p-1}(C_*\ ;\ A)\ ;\ A] \to 0$$

Nous pouvons alors énoncer la :

Proposition fondamentale

Sous l'hypothèse (H), la filtration fonctorielle (2-C) de la cohomologie du complexe C_* coïncide avec la filtration fournie par la suite spectrale.

4. Dualité

Si nous nous plaçons dans un contexte géométrique où vaut l'isomorphisme de Poincaré. Par exemple C_* est le complexe de chaînes singulières d'un revêtement infini cyclique d'une variété différentielle compacte sans bord, orientée, de dimension n nous avons un isomorphisme :

$$\cap[V]\ :\ H^{n-p}(C_*\ ;\ A) \xrightarrow{\sim} H_p(C_*\ ;\ A) \ .$$

Lorsque le complexe C_* satisfait l'hypothèse (H), cet isomorphisme se découpe en deux

a) $T'_p(C_*) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ext}^1_A\,[H_{(n-p-1)}(C_*\ ;\ A)\ ;\ A] = \mathrm{Hom}_A[T'_{(n-p-1)}(C_*)\ ;A_{(0)}/A]$

b) $P_p(C_*) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ext}^2_A\,[H_{(n-p-2)}(C_*\ ;\ A)\ ;\ A] = \mathrm{Hom}_A\,[P_{(n-p-2)}(C_*)\ ;\ C]$

où les notations $T'_p(C_*)$ et $P_p(C_*)$ sont des abréviations respectivement pour

$T'[H_p(C_* \; ; A)]$ et $P[H_p(C_* \; ; A)]$.

Nous obtenons donc dans les bonnes dimensions deux types de formes hermitiennes (pour l'involution $X \to X^{-1}$).

1) $n = 2k-1$

$$T'_{k-1}(C_*) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_A(T'_{k-1}(C_*) \; ; A_{(0)}/A)$$

qui est $(-1)^k$- hermitienne et non dégénérée.

2) $n = 2k-2$

$$P_{k-2}(C_*) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_A(P_{k-2}(C_*) \; ; C)$$

qui est $(-1)^k$-hermitienne et non dégénérée.

5. Remarques

1. Les formes hermitiennes précédentes apparaissent naturellement dans l'étude des noeuds [1], [5]. Pour étudier les links à p composantes, il faut travailler avec l'anneau $\mathbb{Z}[X_1,\dots,X_p, X_1^{1},\dots,X_p^{1}]$. Là encore nous trouvons deux types de formes hermitiennes qui fournissent des invariants du type des links.

2. Les notions précédentes se "Wittifient". Le calcul des groupes de Witt correspondants donne des invariants géométriques pour des relations de cobordisme adaptées [1].

BIBLIOGRAPHIE

[1] J. BARGE - J. LANNES - Papiers secrets

[2] N. BOURBAKI - Algèbre commutative. Ch. 7, Hermann, Paris

[3] H. CARTAN - S. EILENBERG - Homological Algebra, Princeton Series

[4] A. GRAMAIN - Formes d'intersection et d'enlacement sur une variété (ce volume)

[5] J. LEVINE - KNOT-MODULES, I. Préprint.

[6] E.H. SPANIER, Algebraic topology. Mc Graw Hill Series

Bat. 425
Université d'Orsay

91400 ORSAY