MÉMOIRES DE LA S. M. F.

ALBRECHT PFISTER

Quelques problèmes des formes quadratiques sur les corps

Mémoires de la S. M. F., tome 48 (1976), p. 89-91
<http://www.numdam.org/item?id=MSMF_1976__48__89_0>

Col. sur les Formes Quadratiques (1975, Montpellier)
Bull. Soc. Math. France
Mémoire 48, 1976, p. 89-91

QUELQUES PROBLEMES DES FORMES QUADRATIQUES SUR LES CORPS

par

A. PFISTER

Introduction

Soit K un corps formellement réel. Toutes les formes quadratiques sur K sont supposées régulières et en forme diagonale :

$$\phi(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i^2 \qquad (a_i \in K^*),\ \phi = (a_1,\dots,a_n) \quad .$$

On note $\oplus$ la somme orthogonale, $\otimes$ le produit tensoriel des formes quadratiques. Nous écrivons $\phi \sim 0$ si ϕ est une forme hyperbolique (c'est-à-dire l'élément $\overline{\phi}$ induit par ϕ dans le groupe de Witt W de K est 0).

Nous étudions les formes de torsion ϕ où il existe un nombre naturel n tel que $n \times \phi = \phi \underbrace{\oplus \dots \oplus}_{n} \phi \sim 0$. On sait que les résultats suivants sont vérifiés [P] :

a) l'ordre exact de ϕ est une puissance de 2,

b) ϕ est une forme de torsion si et seulement si la signature totale de ϕ s'annule,

c) si $2^m \times \phi \sim 0$, alors il existe une forme ψ, $\psi \sim \phi$; tel que

$$\psi = \bigoplus_{i=1}^{r} (b_i, -t_i b_i) \qquad r \in \mathbb{N},\ b_i \in K^*,\ t_i = \text{somme de } 2^m \text{ carrés} \in K^*.$$

Problème : Est-il vrai que toute forme de torsion ϕ puisse être écrite comme

$$\phi = \bigoplus_{i=1}^{r} (b_i, -t_i b_i) \quad \text{où} \quad r \in \mathbb{N},\ b_i \in K^*,\ t_i \in T = \{\text{somme de carrés} \neq 0\} \subset K^* \ ?$$

(on note la différence entre le problème et le résultat c) !)

Le but principal de cette note est la construction des contre-exemples à cette question.

1. Le théorème de Cassels et une application

Théorème 1 (Cassels)

a) Soit K_1 un corps (car $K_1 \neq 2$), x une indéterminée sur K_1, $K = K_1(x)$. Soit ϕ une forme quadratique sur K_1, $\phi = (a_1,\dots,a_n)$, et soit $p(x) \in K_1[x]$ un polynôme. Alors on a :

Si ϕ représente $p(x)$ sur $K_1(x)$, alors ϕ représente $p(x)$ sur $K_1[x]$.

b) Le théorème (et sa démonstration) reste vrai si les a_i sont permis dans

$K_1[x]$ avec $\text{dég}(a_i) \leqslant 1$.

Soit maintenant K_1 un corps réel, $t_1, t_2 \in T_1 = T(K_1)$ et soit ϕ la forme de dimension 4

(1) $\phi = (1,x) \otimes (1,-(t_1+t_2x))$ sur $K = K_1(x)$.

Il est évident que ϕ est une forme de torsion. Nous avons :

Proposition 2

Pour que $\phi = (b_1,-u_1b_1) \oplus (b_2,-u_2b_2)$ avec $b_1,b_2 \in K^*$, $u_1,u_2 \in T = T(K)$ il est nécessaire et suffisant qu'il existe $t_3 \in T_1$ tel que

(2) $(1,t_3)$ représente t_1 et t_2 sur K_1.

2. Deuxième réduction

Soit maintenant K_o un corps réel, $K_1 = K_o(y)$ où y est une indéterminée sur K_o. Soient $t,u \in T_o = T(K_o)$ et soit $t_1 = t$, $t_2 = t + u\,y^2 \in T_1$. Alors

Proposition 3

Pour qu'il existe $t_3 \in T_1$ tel que

$(1,t_3)$ représente t_1 et t_2 sur K_1

il est nécessaire et suffisant que

(3) $(t,u,-1)$ est isotrope sur K_o.

Pour construire des contre-exemples au Problème, il suffit maintenant d'exhiber un corps K_o et des éléments $t,u \in T_o$ tel que (3) n'est pas achevé.

Exemples : $K_o = \mathbb{Q}$, $t = 2$, $u = 3$

$K_o = \mathbb{R}(z,w)$, $t = 1 + z^2$, $u = 1 + w^2$.

3. Remarques (dues à J. Arason)

Soit K un corps (formellement) réel. On considère les trois propriétés suivantes de K :

A(K) : Toute forme de torsion ϕ sur K est somme des formes binaires de torsion

B(K) : Pour tous $t_1,t_2 \in T(K)$ il y a $t_3 \in T(K)$ tel que

$(1,t_3)$ représente t_1 et t_2

C(K) : Pour tous $t,u \in T(K)$ on a $(1,-t) \otimes (1,-u) \sim 0$ sur K

(c'est équivalent à (3) au dessus).

Alors les implications suivantes sont remplies :

$$\begin{array}{ccccc} C(K) & \Rightarrow & B(K) & \Rightarrow & A(K) \\ {\scriptstyle\text{prop. 3}}\Uparrow & & \Uparrow{\scriptstyle\text{prop. 2}} & & \\ C(K(x)) & \Rightarrow & B(K(x)) & \Rightarrow & A(K(x)) \end{array}$$

Malheureusement on ne connaît pas des conditions simples nécessaires et suffisantes pour qu'un corps K ait la propriété A ou B ou C. Par exemple on ne sait pas si $\mathbb{R}(x,y)$ ait la propriété B ou si $\mathbb{R}(x,y,z)$ ait la propriété A.

REFERENCE

P A. PFISTER, Quadratische Formen in beliebigen Körpern. Invent. Math. 1, 116-132 (1966).

Johannes Gutenberg Universität
Fachbereich Mathematik
Postfach 3980

6500 MAINZ

ALLEMAGNE