

MÉMOIRES DE LA S. M. F.

MICHEL GONDRAN

Un algorithme de coupes en programmation en nombres entiers

Mémoires de la S. M. F., tome 49-50 (1977), p. 93-100

http://www.numdam.org/item?id=MSMF_1977__49-50__93_0

© Mémoires de la S. M. F., 1977, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Mémoires de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Memoires/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

UN ALGORITHME DE COUPES
EN PROGRAMMATION EN NOMBRES ENTIERS

par Michel GONDRAN

RESUME -

Dans le cas des programmes linéaires tout entier, l'auteur propose un algorithme de coupes basé sur les deux règles suivantes :

1°) Les conditions d'intégrité des variables de base de la solution continue sont utilisées pour générer une suite de coupes. Le pivotage sur ce petit nombre de coupes permet d'obtenir une solution duale réalisable entière du problème augmenté.

2°) Ces coupes sont déterminées par des endomorphismes, puis consolidées par certaines agrégations comme dans " the accelerated Euclidean Algorithm " de Glenn MARTIN.

Ces deux règles permettent de définir un algorithme de coupes efficace pour une classe importante de problèmes en nombres entiers : recouvrement et partition.

1.- Un algorithme de coupes -

Considérons le programme entier linéaire :

$$(P) \quad \begin{cases} \min z = cx \\ \text{avec } Ax = b \\ 0 \leq x \leq \alpha \quad x \in \mathbb{Z}^n \end{cases}$$

où

- A est une $m \times n$ matrice entière
- b est un m vecteur entier,
- α est un n vecteur entier.

Nous présentons pour résoudre ce programme des variantes de l'algorithme des coupes de GOMORY (1) et de l'algorithme de MARTIN (2).

L'algorithme sera le suivant :

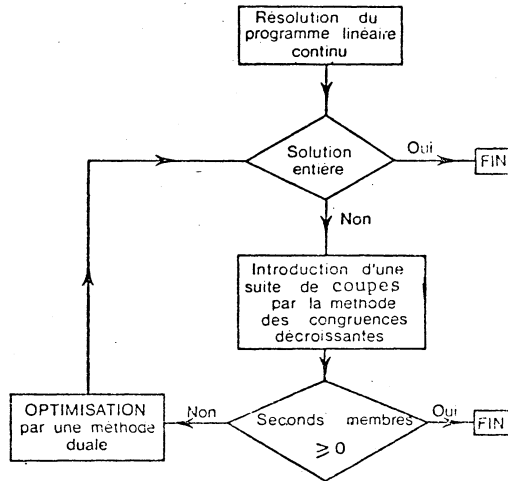
a) Résolution de (P) en continu par le simplexe. Si la solution est entière, FIN. Sinon aller en b).

b) On ajoute un petit nombre de coupes permettant d'obtenir une solution entière duale réalisable du problème augmenté. Si cette solution est positive, FIN. Sinon aller en c).

c) Résolution du problème augmenté en continu par la méthode duale du simplexe. Si cette solution est entière, FIN. Sinon aller en b).

Pour générer les coupes de b), on utilisera la condition d'intégrité d'une des variables de base. Le pivotage qu'on fera sur cette suite de coupes conservera à chaque étape une solution duale réalisable tout en diminuant le déterminant de la matrice de base. (méthode des congruences décroissantes (3)).

L'organigramme de l'algorithme sera donc :



Au paragraphe 2, on montre comment sont générées les coupes par la méthode des congruences décroissantes.

Au paragraphe 3, nous donnons des expériences numériques et des conclusions.

Une présentation plus détaillée de cet algorithme est donnée dans (12).

2.- Génération des coupes et méthodes des congruences décroissantes -

En écrivant l'intégrité d'une variable de base, nous obtenons l'équation de congruence

$$(2-1) \quad \sum_{i \in I} g_i x_i \equiv g_0 \pmod{D}$$

où D , le déterminant de la matrice de base, est le produit des pivots.

On notera par $|g|_D$ le représentant de g dans $[0, D-1]$.

Etape 1.-

Soit ϕ_λ un endomorphisme de Z/DZ dans Z/DZ défini par

$$\phi_\lambda(g) \equiv \lambda g$$

L'équation (2-1) entraîne alors :

$$(2-2) \quad \sum_{i \in I} \phi_\lambda(g_i) x_i \equiv \phi_\lambda(g_0) \pmod{D}$$

Il y aura équivalence entre (2-1) et (2-2) si ϕ_λ est un automorphisme.

En posant alors $f_i = |\phi_\lambda(g_i)|_D$ pour $i \in I + \{0\}$, l'équation (2-2) s'écrit :

$$(2-3) \quad \sum_{i \in I} \frac{f_i}{D} x_i - s = \frac{f_0}{D}$$

avec s entier positif.

Pratiquement on choisira un automorphisme qui maximise $|\phi_\lambda(g_0)|_D$.

En effet si $\delta = \text{pgcd}(D, |g_0|_D)$, il existe deux entiers relatifs λ et μ tel que (3) :

$$(2-4) \quad -\lambda |g_0|_D + \mu D = \delta \quad (\text{Bezout})$$

$$(2-5) \quad \text{pgcd}(\lambda, D) = 1$$

Alors pour cet automorphisme, on obtient la plus grande valeur pour f_0 , c'est-à-dire $D - \delta$.

Etape 2.-

On ajoutera alors au programme (P) la contrainte (2-3) et on pivotera dessus.

Soit $i_0 \in I$ la variable qui rentre en base.

Le déterminant D' de la nouvelle matrice de base est alors :

$$(2-6) \quad D' = \frac{f_{i_0}}{D} D = f_{i_0} \leq D - 1$$

Si toutes les variables de bases sont entières, Fin. Sinon en écrivant l'intégrité d'une variable de base, on obtient une équation de congruence du même type que (2-1) mais dans un groupe $Z/D'Z$ d'ordre plus petit que D ($D' \leq D - 1$).

En un nombre fini de telles étapes, on obtient donc une solution duale réalisable entière.

Le nombre de ces étapes est approximativement égal à $\log_2 D$ lorsque l'on prend l'automorphisme qui maximise f_0 .

Remarque 1 -

A la fin de chaque étape de la méthode duale du simplexe, un certain nombre de coupes non actives sont supprimées.

Remarque 2 -

Un certain nombre d'autres coupes peuvent être considérées, en particulier les coupes consolidées développées dans (12).

3.- EXPERIENCES NUMERIQUES ET CONCLUSIONS -

3.1. Expériences numériques.

Jusqu'à présent deux codes ont été écrits sur cet algorithme, l'un par l'auteur à l'Electricité de France sur CDC 6400, l'autre par Monsieur J. DELORME (4) à la R.A.T.P. sur Bull 6050.

1°) Le premier, et différentes variantes, a été testé sur les différents problèmes tests de la littérature (cf. TRAUTH et WOOLSEY (5) et GARFINKEL et NEMHAUSER (6)), c'est-à-dire sur :

- a) neuf problèmes d'allocation,
- b) les dix problèmes de charge fixe de HALDI
- c) les six problèmes tests " IBM " de HALDI

Deux variantes particulières ont été étudiées :

Cathy 1 correspondant aux coupes du paragraphe 2,
Cathy 3 aux coupes consolidées citées en Remarque 2.

Les heuristiques choisies ont été les suivantes :

- La variable choisie pour obtenir la congruence (2.1) sera prise suivant l'ordre naturel,
- L'endomorphisme ϕ_λ sera un automorphisme qui maximise f_0 ,
- A la fin de chaque étape du dual, on supprime toutes les coupes non actives à $\varepsilon (= 2)$ près,

On donne aux tableaux 1 à 3 une comparaison des résultats de ces deux codes aux résultats des différents codes de coupes de la littérature (cf. TRAUTH et WOOSLEY ⁽⁵⁾) :

- . IPM3, code écrit par R.E. LEVITAN et R.E. GOMORY en 1961 ⁽⁷⁾.
- . ILP1, code écrit par J. HALDI et L. ISAACSON en 1965 ⁽⁸⁾.
- . ILP2-1 et ILP2-2, codes écrits par D. SOMMERS, qui utilisent l'algorithme tout entier de GOMORY ⁽⁹⁾.
- . IPSC, code écrit en 1966 par R.E. WOOSLEY ⁽¹⁰⁾, basé sur l'algorithme tout entier de GOMORY ⁽⁹⁾.

TABLEAU 1

Nombre de pivotages pour les 9 problèmes d'allocations

| Problèmes | D à l'optimum continu | Nbre de pivotages pour opt. continu | IPM3 | ILP1 | ILP2-1 | ILP2-2 | IPSC | Cathy 1 | Cathy 3 |
|-----------|-----------------------|-------------------------------------|------|------|--------|--------|------|---------|---------|
| 1 | 20 | 12 | 14 | 19 | 54 | 51 | 46 | 14 | 14 |
| 2 | 18 | 12 | 31 | 55 | 163 | 77 | 64 | 52 | 33 |
| 3 | 18 | 13 | 30 | 41 | 168 | 59 | 71 | 28 | 29 |
| 4 | 18 | 14 | 18 | 19 | 192 | 48 | 62 | 18 | 18 |
| 5 | 25 | 12 | 12 | 12 | 139 | 32 | 50 | 12 | 12 |
| 6 | 25 | 12 | 18 | 40 | 157 | 54 | 81 | 21 | 22 |
| 7 | 25 | 12 | 61 | 81 | 504 | 119 | 131 | 63 | 54 |
| 8 | 25 | 12 | 21 | 51 | 370 | 57 | 102 | 41 | 19 |
| 9 | 30 | 11 | 11 | 11 | 201 | 34 | 44 | 11 | 11 |

TABLEAU 2

Nombre de pivotages pour les 10 problèmes de charge fixe.

| Problèmes | D à l'optimum continu | Nbre de pivotages pour opt. continu | IPM3 | ILP1 | ILP2-1 | ILP2-2 | IPSC | Cathy 1 | Cathy 3 |
|-----------|-----------------------|-------------------------------------|--------|------|--------|--------|--------|---------|---------|
| 1 | 183 | 4 | 54 | 24 | 135 | 36 | 32 | 25 | 24 |
| 2 | 258 | 4 | 81 | 15 | 94 | 47 | 45 | 24 | 12 |
| 3 | 320 | 4 | 37 | 26 | 154 | 104 | 56 | 18 | 18 |
| 4 | 205 | 4 | 91 | 18 | 93 | 18 | 22 | 12 | 9 |
| 5 | 19400 | 4 | ≥ 7000 | 158 | ≥ 7000 | ≥ 7000 | 6104 | 346 | 106 |
| 6 | 32000 | 4 | ≥ 7000 | 123 | ≥ 7000 | 311 | 3320 | 293 | 104 |
| 7 | 19400 | 4 | ≥ 7000 | 159 | ≥ 7000 | ≥ 7000 | ≥ 7000 | 561 | 106 |
| 8 | 32000 | 4 | ≥ 7000 | 126 | ≥ 7000 | 306 | ≥ 7000 | 298 | 110 |
| 9 | 2000 | 6 | 118 | 42 | ≥ 7000 | 298 | 339 | 73 | 31 |
| 10 | 6098400 | | 1396 | 102 | ≥ 7000 | ≥ 7000 | ≥ 7000 | | |

TABLEAU 3

Nombre de pivotages pour les 6 problèmes "IBM" d'HALDI

| Problèmes | D à l'optimum continu | Nbre de pivotages pour opt. continu | IPM3 | ILP1 | ILP2-1 | ILP2-2 | IPSC | Cathy 1 | Cathy 3 |
|-----------|-----------------------|-------------------------------------|-------|------|--------|--------|-------|---------|---------|
| 1 | 32 | 7 | 8 | 11 | 9 | 11 | 9 | 9 | 8 |
| 2 | 32 | 7 | 17 | 32 | 13 | 15 | 16 | 18 | 22 |
| 3 | 72 | 4 | 22 | 53 | 23 | 14 | 14 | 20 | 19 |
| 4 | 16 384 | 17 | 24 | 73 | 41 | 18 | 17 | 46 | 53 |
| 5 | 131 072 | 16 | 1 144 | 351 | ≥ 7000 | 842 | 1 020 | | |
| 9 | | | 6 758 | 953 | ≥ 7000 | 1 105 | 752 | | |

Nous sommes sans résultats pour le problème de charge fixe n° 10 et pour les problèmes IBM 5 et 9 car les nombres étant très grands ($D > 100\ 000$) nous avons eu des erreurs d'arrondis.

Nous préparons d'ailleurs un code pour remédier à cet inconvénient.

Toutefois pour $D < 50000$, le code Cathy 3 est presque toujours en tête.
Pour des détails sur le code, voir (11).

2°) Le second a été écrit afin de résoudre de grands problèmes (plusieurs milliers de variables, plusieurs centaines de contraintes) de partition auxquels on a ajouté quelques contraintes supplémentaires de la forme $\sum x_j = N$ et $\sum t_j x_j \leq T$.

Les résultats actuels montrent que très peu de coupes (moins d'une dizaine) suffisent pour résoudre ces gros problèmes : cf tableau 4.

Pour des détails complémentaires, voir la thèse de Docteur Ingénieur de J. DELORME (4) et l'article de J. DELORME et E. HEURGON (13).

TABLEAU 4

Problèmes de partition avec une contrainte de la forme
 $\sum_j x_j = N$ et une autre de la forme $\sum_j t_j x_j \leq T$.

| n | m | D à l'optimum continu | z à l'optimum continu | Nbre de pivotages pour opt continu | z optimum | Nbre de coupes | Nbre pivotages après optimum continu |
|------|-----|-----------------------|-----------------------|------------------------------------|-----------|----------------|--------------------------------------|
| 913 | 51 | 3 | 459.667 | 258 | 479 | 3 | 41 |
| 953 | 88 | 68 | 3305.5 | 360 | 3316 | 1 | 1 |
| 2186 | 111 | 4 | 3320. | 577 | 3327 | 6 | 59 |
| 1020 | 91 | 4 | 3161. | 260 | 3162 | 3 | 42 |

5.2.- CONCLUSIONS -

Une première constatation est de remarquer que la difficulté de résolution des problèmes en nombres entiers par une méthode de coupes, qui peut être mesurée par le nombre de pivotages, est une fonction croissante de n et m , mais aussi fortement de D .

Il semble donc que les méthodes de coupes ne doivent pas être utilisées pour D grand ($D > 1000$). Cela restreint pratiquement l'utilisation des méthodes de coupes aux problèmes dont la matrice des contraintes est peu dense avec des coefficients très petits (en général 0, 1, -1). Dans cette classe on trouve cependant les problèmes de recouvrement et de partition et quelques problèmes combinatoires.

Cependant un grand nombre d'améliorations que nous étudions actuellement peuvent être apportées aux méthodes de coupes :

1°) On a intérêt à choisir une coupe augmentant strictement la fonction économique. Pour cela, si le vecteur c est entier, tant que la fonction économique z n'est pas entière, on l'utilisera pour générer la congruence (2-1).

C'est ce que font Haldi et Issacson ⁽⁸⁾. Nous améliorons ainsi Cathy 1 et Cathy 3.

2°) Lorsque l'on n'arrive pas à déterminer une coupe améliorant strictement la fonction économique, on fera une énumération partielle des solutions, ce qui permettra de sortir de cette impasse.

3°) Dans tous les cas nous devons travailler en variables bornées.

Ainsi par exemple pour le problème n° 1 d'allocation, l'optimum est atteint alors avec 2 pivotages seulement (1 pour la solution du problème en continu, l'autre pour la coupe) avec Cathy 3.

Nous préparons actuellement un code tenant compte des améliorations 1, 2 et 3.

BIBLIOGRAPHIE

- (1) GOMORY R.E.- "An algorithm for integer solutions to linear programs".- Princeton IBM Math. Report, Nov. 1958, also in Recent Advances in Mathematical Programming. (R.L. GRAVEG and P. WOLFE, eds). Mc Graw-Hill, New-York 1963).
- (2) MARTIN G.T.- "An accelerated Euclidean Algorithm for Integer Linear Programming".- in Recent Advances in Mathematical Programming (R.L. GRAVES and P. WOLFE, eds) Mc Graw-Hill, New-York, 1963)
- (3) GONDRAN M.- "Un outil pour la programmation en nombres entiers : la méthode des congruences décroissantes".- R.A.I.R.O 7ème année, Septembre 1973, V-3, p. 35 à 54.
- (4) DELORME J.- "Contribution à la résolution du problème de recouvrement : méthode de tronçatures".- Thèse de Docteur-Ingénieur Université de Paris VI Juin 1974.
- (5) TRAUTH C.A. and WOOSLEY R.E.- "Integer Linear Programming : A study in Computational Efficiency".- Man. Sci. 15, p. 481-493 (1969).
- (6) GARFINKEL R.S. and NEMHAUSER G.L.- "Integer Programming".- John Wiley and Sons (1972).
- (7) LEVITAN R.E.- IPM 3, SHARE Distribution Number 1190, September 1961.
- (8) HALDI J. and ISSACSON L.M.- "A computer Code for Integer Solutions to linear programs".- Operations Research, vol. 13, n° 6, November-December 1965 p. 946-959.
- (9) GOMORY R.E.- "All-Integer Programming".- IBM Research Report RL-189, January 1960.
- (10) WOOSLEY R.E.- "On Integer Linear Programming in Combinational Analysis".- Sandia Laboratories Reprint SC-R-65-963, August 1965
- (11) GONDRAN M.- "Expériences numériques en programmation en nombres entiers par des méthodes de coupes".- note EDF HI 1398/02 de Janvier 1974.

- (12) GONDRAN M.- "Un algorithme de coupes efficace par la méthode des congruences décroissantes".- note EDF HI 1234/02 du 11 Décembre 1973, à paraître en anglais dans les "Proceeding" de : International Meeting on Optimization Problems in Engineering and Economics.- Naples, Italie, Décembre 1974.
- (13) DELORME J. et HEURGON E.- "Problèmes de partitionnement : exploration arborescente ou méthodes de troncatures ?" R.A.I.R.O., 9ème année, Juin 1975, V-2, p. 53 à 65.

Michel GONDRAN
Département TRAITEMENT DE L'INFORMATIQUE
ET ETUDES MATHÉMATIQUES
17, Avenue du Général de Gaulle
92140 CLAMART
