MÉMOIRES DE LA S. M. F.

HUBERT RUBENTHALER

Paramétrisation d’orbites dans les nappes de Dixmier admissibles

Mémoires de la S. M. F. 2e série, tome 15 (1984), p. 255-275

<http://www.numdam.org/item?id=MSMF_1984_2_15__255_0>

Société Mathématique de France
2e série, Mémoire n° 15, 1984, p. 255-275

PARAMÉTRISATION D'ORBITES DANS LES NAPPES DE DIXMIER ADMISSIBLES

Hubert RUBENTHALER
I.R.M.A. , 7, rue René Descartes
67084 Strasbourg Cedex, France

Résumé : Nous montrons que dans les algèbres de Lie semi-simples complexes, certaines nappes de Dixmier dites admissibles, admettent une section de leurs orbites qui est un espace affine.
Ceci généralise la section de Kostant des éléments réguliers.

Abstract: We show that in a complex semi-simple Lie algebra, suitable Dixmier sheets (so called admissible) admit a section of their orbits which is an affine space.
This is a generalization of Kostant's section of the regular elements.

1. Sous-algèbres paraboliques et espaces préhomogènes associés.

Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie semi-simple complexe, $\mathfrak{h}$ une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}$, R le système de racines de la paire $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$, Ψ une base de R fixée une fois pour toutes et θ une partie de Ψ. On désigne par $\mathfrak{h}_\theta$ l'orthogonal de θ :

$$\mathfrak{h}_\theta = \{X \in \mathfrak{h} \ , \ \alpha(X) = 0 \ \ \forall \alpha \in \theta\} \ .$$

Dans $\mathfrak{h}_\theta$ on distingue l'élément H^θ défini par les équations $\alpha(H^\theta) = 0$ si $\alpha \in \theta$ et $\alpha(H^\theta) = 2$ si $\alpha \in \Psi - \theta$.
Pour $p \in \mathbb{Z}$, on pose

$$d_p(\theta) = \{X \in \mathfrak{g} \ , \ [H^\theta, X] = 2pX\} \ .$$

On vérifie trivialement que $[d_i(\theta), d_j(\theta)] \subset d_{i+j}(\theta)$, ce qui montre qu'on a ainsi obtenu une $\mathbb{Z}$-graduation.
L'espace $d_o(\theta)$, <u>que nous noterons désormais</u> $\mathfrak{l}_\theta$, est une sous-algèbre réductive de $\mathfrak{g}$, qui opère par l'action adjointe dans chacun des $d_i(\theta)$. Nous noterons L_θ le sous-groupe connexe du groupe adjoint G de $\mathfrak{g}$ correspondant à $\mathfrak{l}_\theta$. La représentation précédente de $\mathfrak{l}_\theta$ dans chacun des $d_i(\theta)$ provient évidemment d'une représentation de L_θ dans les $d_i(\theta)$. Ces représentations sont notées $(\mathfrak{l}_\theta, d_i(\theta))$ et $(L_\theta, d_i(\theta))$.
On sait (Vinberg) que ces représentations sont préhomogènes, c'est-à-dire que l'action de L_θ dans $d_i(\theta)$ admet une orbite Zariski ouverte. Pour tout ce qui concerne de tels espaces préhomogènes (qui sont dits de type parabolique) nous renvoyons à [9] ou [10]. Posons

$$n_\theta^+ = \sum_{p \geq 1} d_p(\theta) \quad , \quad n_\theta^- = \sum_{p \leq -1} d_p(\theta) \ .$$

Alors $\mathfrak{p}_\theta = \mathfrak{l}_\theta + n_\theta^+$ est la sous-algèbre parabolique standard associée à θ.
Son radical nilpotent est n_θ^+ et son radical résoluble est $\mathfrak{r}_\theta = \mathfrak{h}_\theta + n_\theta^+$.
L algèbre $\mathfrak{l}_\theta$ est une sous-algèbre de Lévi de $\mathfrak{p}_\theta$.

La représentation $(\mathfrak{l}_\theta, d_1(\theta))$ est irréductible si et seulement si la sous-algèbre $\mathfrak{p}_\theta$ est maximale, c'est-à-dire si et seulement si $\mathrm{Card}(\Psi - \theta) = 1$ (ce résultat est classique, voir par exemple [9]).
On sait que les espaces préhomogènes intéressants (ceux qui, par exemple, possèdent une fonction zêta associée) sont les espaces préhomogènes dits réguliers, ce qui signifie que le sous-groupe d'isotropie de la grosse orbite est réductif.

Le critère important de régularité est le suivant :

THÉORÈME 1.1. ([9],[10])

Supposons que $\mathrm{Card}(\psi - \theta) = 1$.

Alors l'espace préhomogène $(\ell_\theta, d_1(\theta))$ est régulier si et seulement si il existe $X \in d_1(\theta)$ et $Y \in d_{-1}(\theta)$ tels que (Y, H^θ, X) soit un $s\ell_2$-triplet.

2. Parties admissibles et sous-algèbres associées.

Ce paragraphe constitue un rappel des résultats de l'article [11] auquel nous renvoyons pour les démonstrations.

Si π est une partie de ψ nous désignerons par $<\pi>$ l'ensemble des racines qui sont combinaison linéaire d'éléments de π. On pose également $<\pi>^+ = R^+ \cap <\pi>$ et $<\pi>^- = R^- \cap <\pi>$, où R^+ et R^- sont respectivement les racines positives et négatives. Si $\gamma \in R$ on désigne par $\mathfrak{g}^\gamma$ l'espace radiciel usuel correspondant à γ et par H_γ la coracine habituelle.

Nous identifierons toute partie de ψ à un sous-graphe du graphe de Dynkin de ψ. Il est alors possible de parler des composantes connexes d'une telle partie. Si $\alpha \in \psi - \theta$, nous noterons ψ_α la composante connexe de $\theta \cup \{\alpha\}$ contenant α.

Soit $\theta_\alpha = \psi_\alpha - \{\alpha\}$. Soit $\ell_{\theta_\alpha} = \sum_{\gamma\in\psi_\alpha} \mathbb{C}.H_\gamma + \sum_{\gamma\in<\theta_\alpha>} \mathfrak{g}^\gamma$.

Soient

$$n^+_{\theta_\alpha} = \sum_{\gamma\in<\psi_\alpha>^+ - <\theta_\alpha>^+} \mathfrak{g}^\gamma \; , \; n^-_{\theta_\alpha} = \sum_{\gamma\in<\psi_\alpha>^- - <\theta_\alpha>^-} \mathfrak{g}^\gamma$$

On pose $d_1(\theta_\alpha) = d_1(\theta) \cap n^+_{\theta_\alpha}$ et on définit l'élément $H^\theta_\alpha \in \sum_{\gamma\in\psi_\alpha} \mathbb{C}.H_\gamma$ par les équations $\alpha(H^\theta_\alpha) = 2$ et $\gamma(H^\theta_\alpha) = 0$ lorsque $\gamma \in \theta_\alpha$. Il est évident que $d_1(\theta_\alpha) = \{X \in n^+_{\theta_\alpha} \, , \, [H^\theta_\alpha, X] = 2X\}$.

Lorsque la sous-algèbre $\mathfrak{p}_\theta$ n'est pas maximale $(\mathrm{Card}(\psi - \theta) \neq 1)$ la décomposition de la représentation $(\ell_\theta, d_1(\theta))$ s'obtient comme suit.

PROPOSITION 2.1.

a) $\mathfrak{g}(\psi_\alpha) = n^-_{\theta_\alpha} + \ell_{\theta_\alpha} + n^+_{\theta_\alpha}$ est une algèbre de Lie semi-simple de graphe de Dynkin ψ_α.

b) $\mathfrak{p}_{\theta_\alpha} = \ell_{\theta_\alpha} + n^+_{\theta_\alpha}$ est une sous-algèbre parabolique maximale de $\mathfrak{g}(\psi_\alpha)$.

c) Soit $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \ldots \oplus \mathfrak{g}_n$ la décomposition de $\mathfrak{g}$ en idéaux simples et soit

$R = R_1 \oplus \ldots \oplus R_n$ la décomposition correspondante de R. Soit I l'ensemble des indices i tels que $R_i \cap (\Psi - \theta) = \emptyset$. On a alors

$$\mathfrak{l}_\theta = \left(\bigoplus_{i \in I} \mathfrak{g}_i \right) \oplus \left(\sum_{\alpha \in \Psi - \theta} \mathfrak{l}_{\theta_\alpha} \right)$$

(la somme des $\mathfrak{l}_{\theta_\alpha}$ n'étant pas directe).

d) $d_1(\theta) = \bigoplus_{\alpha \in \Psi - \theta} d_1(\theta_\alpha)$ (somme directe) et chaque $d_1(\theta_\alpha)$ est $\mathfrak{l}_\theta$-stable et irréductible sous l'action de $\mathfrak{l}_{\theta_\alpha}$ (donc a fortiori irréductible sous l'action de $\mathfrak{l}_\theta$).

e) Les éléments H_α^θ $(\alpha \in \Psi - \theta)$ forment une base de $\mathfrak{h}_\theta$.

Soit $(\mathfrak{l}_\theta, d_1(\theta))$ un espace préhomogène de type parabolique dans une algèbre de Lie semi-simple $\mathfrak{g}$. Nous allons nous intéresser aux parties θ de Ψ telles que pour tout $\alpha \in \Psi - \theta$, l'espace préhomogène $(\mathfrak{l}_{\theta_\alpha}, d_1(\theta_\alpha))$ soit régulier. Autrement dit, nous considérons les espaces préhomogènes $(\mathfrak{l}_\theta, d_1(\theta))$ dont toutes les composantes irréductibles sont régulières (ce qui n'est pas le cas en général lorsque $(\mathfrak{l}_\theta, d_1(\theta))$ est régulier).

Introduisons quelques notations. Soit $\bar{R}$ l'ensemble des restrictions non nulles des éléments de R à $\mathfrak{h}_\theta$. Les éléments de $\bar{R}$ seront appelés racines restreintes. Si $\alpha \in R$ nous noterons $\bar{\alpha}$ sa restriction à $\mathfrak{h}_\theta$. Une racine restreinte $\bar{\alpha}$ sera dite non divisible si elle n'est pas de la forme $c\bar{\gamma}$ $(c \in \mathbb{Z}, c > 1, \gamma \in R)$. Nous désignerons par $\bar{R}_{nd}$ l'ensemble des racines restreintes non divisibles.

Si $\alpha \in R$, nous poserons $\mathfrak{g}^{\bar{\alpha}} = \{X \in \mathfrak{g}, [H,X] = \bar{\alpha}(H)X \ \forall H \in \mathfrak{h}_\theta\}$.
De ce fait, si $\alpha \in \Psi - \theta$, on a $d_1(\theta_\alpha) = \mathfrak{g}^{\bar{\alpha}}$.

Au vu du théorème 1.1. et de ce qui précède, on est amené à poser la définition suivante :

DEFINITION 2.2.

Une partie θ est dite admissible si pour tout $\alpha \in \Psi - \theta$, il existe $X_{\bar{\alpha}} \in \mathfrak{g}^{\bar{\alpha}}$, $X_{-\bar{\alpha}} \in \mathfrak{g}^{-\bar{\alpha}}$ tels que $(X_{-\bar{\alpha}}, H_\alpha^\theta, X_{\bar{\alpha}})$ soit un $\mathfrak{sl}_2$-triplet.

On remarque immédiatement d'après la définition que θ est admissible si et seulement si pour tout $\alpha \in \Psi - \theta$, θ_α est admissible dans Ψ_α.
Autrement dit, la classification des parties admissibles se ramène à la classifi-

cation des parties admissibles telles que $\mathrm{Card}(\psi - \theta) = 1$, et cette dernière a été obtenue dans [10] grâce au théorème 1.1.

La table qu'on trouvera plus loin donnera notamment la liste des parties admissibles dans les algèbres de Lie simples.

Le résultat essentiel est alors le suivant.

THÉORÈME 2.3. ([11])

Soit θ une partie admissible de ψ et soit B la forme de Killing de $\mathfrak{g}$. Alors :

a) Pour tous $\alpha, \beta \in \psi - \theta$ les nombres $\dfrac{2B(H^\theta_\alpha, H^\theta_\beta)}{B(H^\theta_\alpha, H^\theta_\alpha)}$ sont des entiers négatifs ou nuls.

b) Les éléments $X_{-\bar{\alpha}}, H^\theta_\alpha, X_{\bar{\alpha}}$ $(\alpha \in \psi - \theta)$ engendrent dans $\mathfrak{g}$ une sous-algèbre $\mathfrak{g}_\theta$ semi-simple dont $\mathfrak{h}_\theta$ est une sous-algèbre de Cartan. Les restrictions des éléments de $\psi - \theta$ à $\mathfrak{h}_\theta$ forment une base du système de racines de $(\mathfrak{g}_\theta, \mathfrak{h}_\theta)$ et la base correspondante du système inverse est constituée des éléments H^θ_α .

Remarque 2.4.

a) La partie $\theta = \emptyset$ est toujours admissible. Les espaces $\mathfrak{g}^{\bar{\alpha}}$ sont alors les espaces radiciels usuels et $\mathfrak{g}_\emptyset = \mathfrak{g}$.

b) La sous-algèbre $\mathfrak{g}_\theta$ dépend évidemment du choix des éléments $X_{\bar{\alpha}}$. Deux choix distincts conduisent à des sous-algèbres conjuguées par le groupe L_θ .

c) Désignons par R_θ le système de racines de la paire $(\mathfrak{g}_\theta, \mathfrak{h}_\theta)$. On peut montrer que $R_\theta = \bar{R}_{nd}$.

Soit W le groupe de Weyl de R et W_θ le groupe de Weyl de R_θ . Le lien entre ces deux groupes est donné dans la proposition suivante.

PROPOSITION 2.5.

Soit $W_o = \{w \in W,\ w.\mathfrak{h}_\theta \subset \mathfrak{h}_\theta\}$ et soit $\bar{W}_o$ l'ensemble des restrictions des éléments de W_o à $\mathfrak{h}_\theta$. On a $\bar{W}_o = W_\theta$.

Démonstration :

a) $W_\theta \subset \bar{W}_o$.

Soit G_θ le sous-groupe connexe de G correspondant à $\mathfrak{g}_\theta$. Soit $w \in W_\theta$.

Il existe $g \in G_\theta$ tel que $g_{|\mathfrak{h}_\theta} = w$. Mais alors il est facile de voir que g stabilise la partie semi-simple ℓ'_θ de ℓ_θ . Soit $\mathfrak{h}(\theta)$ l'orthogonal de $\mathfrak{h}_\theta$ dans $\mathfrak{h}$ (pour la forme de Killing). L'algèbre $\mathfrak{h}(\theta)$ est une sous-algèbre de

Cartan de $\mathfrak{l}'_\theta$. Soit $\mathfrak{h}_1 = g.\mathfrak{h}(\theta)$, c'est encore une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{l}'_\theta$. Il existe donc $g_1 \in L'_\theta$ (le sous-groupe connexe correspondant à $\mathfrak{l}'_\theta$) tel que $g_1 g.\mathfrak{h}(\theta) = \mathfrak{h}(\theta)$. D'autre part :

$$g_1 g_{|\mathfrak{h}_\theta} = g_{|\mathfrak{h}_\theta} = w \quad \text{car} \quad g_1 \quad \text{agit trivialement sur} \quad \mathfrak{h}_\theta \ .$$

Finalement, on constate que $g_1 g$ conserve $\mathfrak{h}$ et $\mathfrak{h}_\theta$, donc $g_1 g_{|\mathfrak{h}_\theta} \in \bar{W}_o$.

b) $\bar{W}_o \subset W_\theta$.

Soit $w \in W_o$. En utilisant un élément $g \in G$ tel que $g_{|\mathfrak{h}} = w$, on voit facilement que, si $\bar{\alpha} \in \bar{R}$, alors $w(\bar{\alpha}) = \bar{\alpha} \circ w^{-1}$ appartient aussi à $\bar{R}$. Ainsi w est un automorphisme de $\bar{R}$, qui envoie $\bar{R}_{nd} = R_\theta$ sur lui-même (si $\bar{\alpha} \in \bar{R}_{nd}$ et si $w\bar{\alpha} = n\bar{\beta}$ alors $\bar{\alpha} = n\, w^{-1}\bar{\beta}$: impossible ....). Il existe alors $w_1 \in W_\theta$ tel que $w_1 w$ soit un automorphisme de R_θ laissant stable la base $\overline{\Psi-\theta}$. Soit $g_1 \in G_\theta$ un élément qui vérifie $g_{1|\mathfrak{h}_\theta} = w_1$.

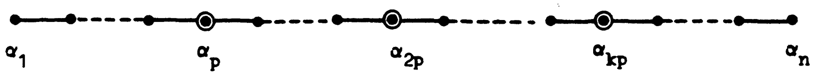
Comme dans la partie a) de la démonstration, on constate que $g_1 g$ stabilise $\mathfrak{h}_\theta$ et on en déduit qu'il existe $g_2 \in L'_\theta$ tel que $g_2 g_1 g$, non seulement stabilise $\mathfrak{h}(\theta)$, mais envoie θ sur θ . Mais alors $g_2 g_1 g$ stabilise $\mathfrak{h}$ et envoie Ψ sur Ψ . Donc $g_2 g_1 g_{|\mathfrak{h}_\theta} = id = g_1 g_{|\mathfrak{h}_\theta} = w_1 w_{|\mathfrak{h}_\theta}$.

Ainsi $w_{|\mathfrak{h}_\theta} = w_1^{-1}$. □

La table ci-dessous donne la liste complète (sous forme de diagrammes) des parties admissibles des bases des systèmes de racines irréductibles.
A côté de chaque diagramme figure le type de l'algèbre $\mathfrak{g}_\theta$ associée, ce dernier ayant été calculé cas par cas.

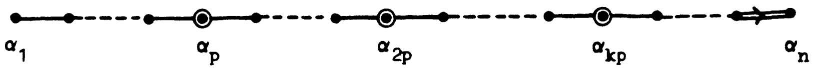
Table

Type A_n : $n = (k+1)p-1$, $k \geq 1$, $n \geq 1$, $p \geq 1$.



A_k

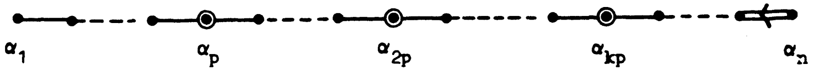
Type B_n : $n \geq kp$, $(2k+1)p \leq (2n+1)$, $p \geq 1$.



B_k

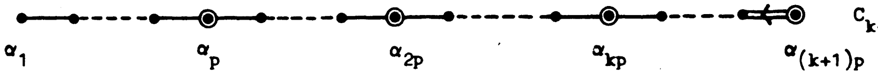
Type C_n :

1) p pair, $(2k+1)p \leq 2n$.



B_k

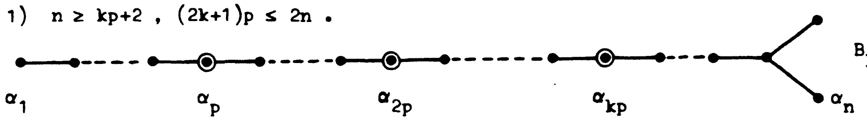
2) $n = (k+1)p$, $k \geq 0$, $p \geq 1$.



C_{k+1}

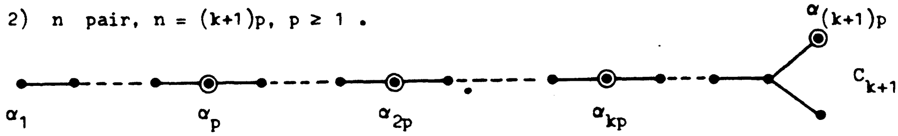
Type D_n :

1) $n \geq kp+2$, $(2k+1)p \leq 2n$.



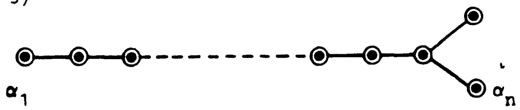
B_k

2) n pair, $n = (k+1)p$, $p \geq 1$.



C_{k+1}

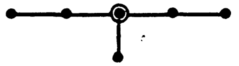
3)



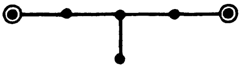
D_n

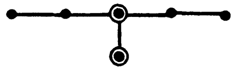
Table (suite)

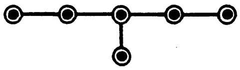
<u>Type</u> E_6

1)  A_1

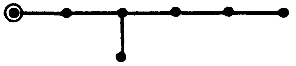
2)  A_1

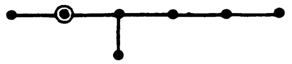
3)  A_2

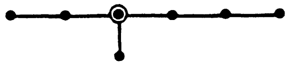
4)  G_2

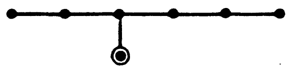
5)  E_6

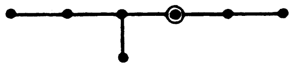
<u>Type</u> E_7

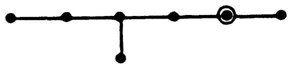
1)  A_1

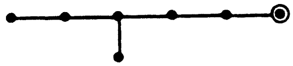
2)  A_1

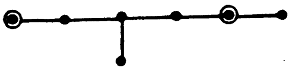
3)  A_1

4)  A_1

5)  A_1

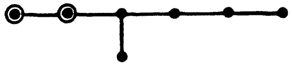
6)  A_1

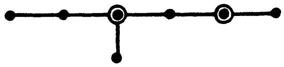
7)  A_1

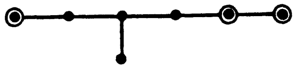
8)  B_2

<u>Table</u> (suite)

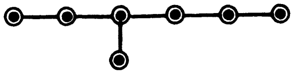
<u>Type</u> E_7 (suite)

9)  G_2

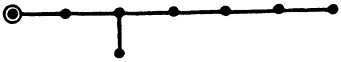
10)  G_2

11)  C_3

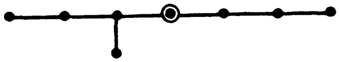
12)  F_4

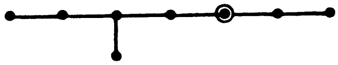
13)  E_7

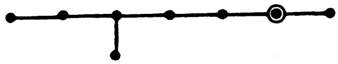
<u>Type</u> E_8 :

1)  A_1

2)  A_1

3)  A_1

4)  A_1

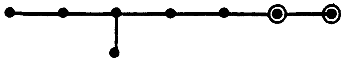
5)  A_1

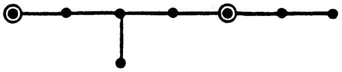
6)  A_1

7)  B_2

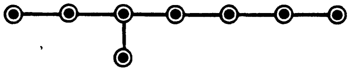
Table (suite)

Type E_8 (suite) :

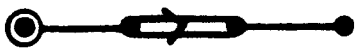
8)  G_2

9)  G_2

10)  F_4

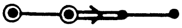
11)  E_8

Type F_4 :

1)  A_1

2)  A_1

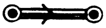
3)  A_1

4)  G_2

5)  F_4

Type G_2 :

1)  A_1

2)  G_2

3. Paramétrisation d'orbites.

De manière générale pour tout sous-ensemble $X \subset \mathfrak{g}$, on définit l'ensemble des points réguliers de X par

$$X^{reg} = \{x \in X \text{ , } \dim \mathfrak{g}^x \leq \dim \mathfrak{g}^y \ \forall y \in X\} \text{ .}$$

Les notations $\mathfrak{g}^x$ (resp. $\mathfrak{g}^y$) désignant le centralisateur de x (resp. y) dans $\mathfrak{g}$.

On voit alors facilement que pour toute partie θ de ψ on a

$$\mathfrak{h}_\theta^{reg} = \{H \in \mathfrak{h}_\theta \text{ , } \alpha(H) \neq 0 \ \ \forall \alpha \in \psi - \theta\} \text{ .}$$

DÉFINITION 3.1.

Soit $\mathfrak{p}$ une sous-algèbre parabolique de $\mathfrak{g}$, soit $\mathfrak{h}_\mathfrak{p}$ le centre d'une sous-algèbre de Lévi de $\mathfrak{p}$. On appelle nappe de Dixmier fermée associée à $\mathfrak{p}$ l'ensemble

$$X_\mathfrak{p} = \overline{G \cdot \mathfrak{h}_\mathfrak{p}^{reg}}$$

(la barre indiquant la fermeture pour la topologie de Zariski).

On appelle nappe de Dixmier associée à $\mathfrak{p}$, l'ensemble $X_\mathfrak{p}^{reg}$.

Remarque 3.2. :

a) Ces ensembles ont été introduits par Dixmier dans [4]. En fait Dixmier appelle nappe les ensembles $G.\mathfrak{h}_\mathfrak{p}^{reg}$. La définition ci-dessus des nappes est due à Borho et Richardson. On peut démontrer ([8]), qu'en fait $X_\mathfrak{p}$ ne dépend que de la classe d'association de $\mathfrak{p}$ (rappelons que par définition deux sous-algèbres paraboliques $\mathfrak{p}$ et $\mathfrak{p}'$ sont associées si leurs sous-algèbres de Lévi sont conjuguées).

b) Soit $n_\mathfrak{p}$ le radical nilpotent de $\mathfrak{p}$, on a

$$X_\mathfrak{p} = G.(\mathfrak{h}_\mathfrak{p} + n_\mathfrak{p}). \quad ([6], [2])$$

c) Désignons par $\mathfrak{m}_\mathfrak{p}$ une sous-algèbre de Lévi de $\mathfrak{p}$. On montre ([4]) que

$$X_\mathfrak{p}^{reg} = \{x \in X_\mathfrak{p} \mid \dim \mathfrak{g}^x = \dim \mathfrak{m}_\mathfrak{p}\}$$

et que $X_\mathfrak{p}^{reg}$ est une composante irréductible de l'ensemble des $x \in \mathfrak{g}$ tels que $\dim \mathfrak{g}^x = \dim \mathfrak{m}_\mathfrak{p}$ ([2])

d) W. Borho et H. Kraft ([2]) ont alors élargi la notion de nappe en définissant une nappe comme étant une composante irréductible de l'ensemble des points dont le stabilisateur a une dimension constante. L'étude de ces nappes a été faite par W. Borho ([1]) .

Notations 3.3. : Si θ est une partie de Ψ nous noterons X_θ la nappe fermée $X_{\mathfrak{p}_\theta}$. Nous désignerons également par S_θ (resp. $\mathcal{N}_\theta$, resp. $\mathcal{R}_\theta$) l'ensemble des éléments semi-simples (resp. nilpotents, resp. réguliers) de X_θ . Notamment donc $\mathcal{R}_\theta = X_\theta^{reg}$ est la nappe de Dixmier associée à $\mathfrak{p}_\theta$.

On remarque facilement que $X_\phi = \mathfrak{g}$. La nappe $\mathcal{R}_\phi$ correspondante (les éléments réguliers de $\mathfrak{g}$) a été étudiée par B. Kostant dans un article fondamental ([7]) . On pourra aussi se reporter au compte rendu de R. Godement au Séminaire Bourbaki ([5]) . Il démontre notamment qu'il existe une section des orbites régulières qui est un espace affine $\mathbb{C}^\ell$ (où ℓ est le rang de $\mathfrak{g}$) .

Nous allons montrer que dans le cas où θ est admissible, il existe toujours une section des orbites de $\mathcal{R}_\theta$ qui est un espace affine de type $\mathbb{C}^\ell$ où $\ell = \dim \mathfrak{h}_\theta$.

Si V est une variété algébrique sur laquelle agit un groupe Γ , nous noterons toujours $\mathbb{C}[V]$ l'anneau des fonctions régulières sur V et $\mathbb{C}[V]^\Gamma$ le sous-anneau des fonctions régulières invariantes par Γ . La question qui se pose naturellement est de savoir si les éléments de $\mathbb{C}[X_\theta]^G$ suffisent à séparer les orbites de $\mathcal{R}_\theta$; cela a été démontré par B. Kostant pour les orbites régulières de $\mathfrak{g}$. La réponse est en général négative (voir [1] , 6.1. pour un contre-exemple) .

Soit $\widetilde{\mathcal{C}}_\theta$ la clôture intégrale de $\mathbb{C}[X_\theta]^G$ (le spectre maximal de $\widetilde{\mathcal{C}}_\theta$ est donc le normalisé du spectre maximal de $\mathbb{C}[X_\theta]^G$) . Pour une partie θ quelconque, nous définissons $\bar{W}_o$ comme au paragraphe précédent. Rappelons l'important théorème suivant dû à W. Borho.

THÉORÈME 3.4.(*) ([1] Satz 6.3.)

L'homomorphisme de restriction $\widetilde{\mathcal{C}}_\theta \to \mathbb{C}[\mathfrak{h}_\theta]^{\bar{W}_o}$ est un isomorphisme.

Supposons à présent que θ soit admissible. Dans ce cas, on a vu (Prop. 2.5.) que $\bar{W}_o = W_\theta$. On en déduit que $\widetilde{\mathcal{C}}_\theta$ est un anneau de polynômes engendré par $\ell = \dim \mathfrak{h}_\theta$ générateurs algébriquement indépendants $u_1, u_2, \dots, u_\ell$. D'après [1] , Théorème 6.5. les fonctions u_i sont continues sur X_θ pour la topologie de Zariski.

Soit X un élément nilpotent régulier de $\mathfrak{g}_\theta$ (c'est-à-dire nilpotent principal dans la terminologie de [7]) . Un tel X est simplement un conjugué

(*) Le théorème 3.4. est vrai pour les nappes généralisées. Nous ne l'énonçons ici que pour les nappes de Dixmier.

par G_θ de l'élément $\sum_{\alpha\in\Psi-\theta} X_{\bar{\alpha}}$. Soit (Y,H,X) un $s\ell_2$-triplet de $\mathfrak{g}_\theta$ contenant X et soit $\mathfrak{g}_\theta^X$ le centralisateur de X dans $\mathfrak{g}_\theta$. Posons $\nu_\theta = Y+\mathfrak{g}_\theta^X$. L'ensemble ν_θ est donc un plan affine de dimension égale à celle de $\mathfrak{h}_\theta$. C'est la section de Kostant des éléments réguliers de $\mathfrak{g}_\theta$ ([7]).

LEMME 3.5. $\qquad \nu_\theta \subset \mathcal{R}_\theta$.

Démonstration :(*) Puisque $\nu_\theta \subset \mathfrak{g}_\theta$, tout élément de ν_θ est conjugué à un élément de la sous-algèbre de Borel de $\mathfrak{g}_\theta$ engendré par $\mathfrak{h}_\theta$ et les $X_{\bar{\alpha}}$ $(\alpha\in\Psi-\theta)$.

Donc tout élément de ν_θ est conjugué à un élément de $\mathfrak{h}_\theta+n_\theta^+$, ainsi $\nu_\theta\subset X_\theta$. Pour démontrer que $\nu_\theta\subset\mathcal{R}_\theta$ il suffit donc de démontrer que $\dim \mathfrak{g}^x \le \dim \ell_\theta$ pour tout $x\in\nu_\theta$.

Soit $\mathfrak{g}^{2j}$ $(j\in\mathbb{Z})$ la graduation de $\mathfrak{g}$ définie par H.

Soit $\mathfrak{p} = \sum_{j\geq 0}\mathfrak{g}^{2j}$. Les propriétés classiques des $s\ell_2$-triplets impliquent que $\mathfrak{g}_\theta^X\subset\mathfrak{p}$. Nous allons montrer, ce qui est plus général que le lemme, que si $z\in\mathfrak{p}$, alors $\dim\mathfrak{g}^{Y+z}\le\dim\ell_\theta$.

Posons $\mathfrak{a}^{2j}=\mathfrak{g}^{2j}\cap\mathfrak{g}^Y$. Soit $x\in\mathfrak{g}^Y$ et écrivons sa décomposition dans la graduation : $\qquad x=\sum x_{2j}\quad (x_{2j}\in\mathfrak{g}^{2j})$. On a

$$0=[Y,x]=\sum\,[Y,x_{2j}]$$

et puisque $Y\in\mathfrak{g}^{-2}$, ceci implique que $[Y,x_{2j}]=0\ \ \forall j$.

Ainsi $\mathfrak{g}^Y=\sum_{j\in\mathbb{Z}}\mathfrak{a}^{2j}$ et on en déduit que :

$$\dim\mathfrak{g}^Y=\dim\mathfrak{g}^H=\dim\ell_\theta=\sum\dim\mathfrak{a}^{2j}$$

Filtrons à présent $\mathfrak{g}$ en posant

$$\mathfrak{g}_j=\sum_{i\geq j}\mathfrak{g}^{2i}$$

Donc $\mathfrak{g}_j\supset\mathfrak{g}_{j+1}$, $\mathfrak{g}=\mathfrak{g}_j$ pour j suffisamment petit et $\mathfrak{g}_j=\{0\}$ pour j suffisamment grand.

Soit $z\in\mathfrak{g}_o=\mathfrak{p}$. On a $\mathrm{ad}z(\mathfrak{g}_j)\subset\mathfrak{g}_j\ \ \forall j$. Les $\mathfrak{g}_j$ induisent une filtration sur $\mathfrak{g}^{Y+z}$ en posant

---

(*) Cette démonstration est inspirée de celle du lemme 10 de [7].

$$\mathfrak{g}_j^{Y+z} = \mathfrak{g}^{Y+z} \cap \mathfrak{g}_j \ .$$

Donc
$$\dim \mathfrak{g}^{Y+z} = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \dim \mathfrak{g}_j^{Y+z} / \mathfrak{g}_{j+1}^{Y+z} \ .$$

On a une injection

$$\mathfrak{g}_j^{Y+z} / \mathfrak{g}_{j+1}^{Y+z} \to \mathfrak{g}^{2j}$$

définie de la manière suivante : si $x = x_{2j} + x_{2(j+1)} + \dots$ est un élément de $\mathfrak{g}_j^{Y+z}$, alors on associe à sa classe $\bar{x}$ dans $\mathfrak{g}_j^{Y+z} / \mathfrak{g}_{j+1}^{Y+z}$ l'élément x_{2j} de $\mathfrak{g}^{2j}$.

Mais x, par définition, commute à $Y+z$ donc $0 = [Y,x] + [z,x]$, d'autre part $[z,x] \in \mathfrak{g}_j$ et $[Y,x] = [Y,x_{2j}]$ mod. $\mathfrak{g}_j$. Cela implique que $[Y,x_{2j}] = 0$, donc que l'injection ci-dessus est à valeurs dans $\mathfrak{a}^{2j}$.

Donc $\dim \mathfrak{g}^{Y+z} = \Sigma \dim \mathfrak{g}_j^{Y+z} / \mathfrak{g}_{j+1}^{Y+z} \leq \Sigma \dim \mathfrak{a}^{2j} = \dim \mathfrak{l}_\theta$.

□

THÉORÈME 3.6. :

<u>Supposons que</u> θ <u>soit admissible. Alors</u> ν_θ <u>est inclus dans</u> $\mathcal{R}_\theta$, <u>tout élément de</u> $\mathcal{R}_\theta$ <u>possède un unique conjugué dans</u> ν_θ <u>et l'application de restriction de</u> $\tilde{\mathcal{C}}_\theta$ <u>à</u> ν_θ <u>est un isomorphisme de</u> $\tilde{\mathcal{C}}_\theta$ <u>sur</u> $\mathbb{C}[\nu_\theta]$.

<u>Démonstration</u> : La première assertion du théorème constitue le lemme précédent. Considérons le diagramme commutatif suivant

$$\begin{tikzcd} \tilde{\mathcal{C}}_\theta \arrow[r, "\gamma"] \arrow[dr, "\alpha"'] & \mathbb{C}[\mathfrak{g}_\theta]^{G_\theta} \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "\beta"] & \mathbb{C}[\nu_\theta] \\ & \mathbb{C}[\mathfrak{h}_\theta]^{W_\theta} & \end{tikzcd}$$

où toutes les flèches sont des homomorphismes de restriction. La flèche α est un isomorphisme (théorème 3.4.) ainsi que la flèche β (c'est l'isomorphisme de Chevalley), on en déduit que γ est un isomorphisme. La flèche δ est également un isomorphisme car ν_θ est la section de Kostant des éléments réguliers de $\mathfrak{g}_\theta$ ([7] théorème 7, [5] théorème 3). On en déduit que $\delta \circ \gamma$ est un isomorphisme de $\tilde{\mathcal{C}}_\theta$ sur $\mathbb{C}[\nu_\theta]$, ce qui démontre la dernière assertion du théorème.

Considérons l'application $u : X_\theta \to \mathbb{C}^\ell$ définie par $u(x) = (u_1(x), u_2(x), \dots, u_\ell(x))$. D'après [1], théorème 6.5., deux éléments x et y de $\mathcal{R}_\theta$ sont conjugués si et seulement si $u(x) = u(y)$.

Soit $\mathcal{O} \subset \mathcal{R}_\theta$ une orbite, et soit $u_i(\mathcal{O})$ la valeur de u_i sur $\mathcal{O}$ $(i = 1, \dots, \ell)$. D'après Kostant ([7] théorème 7) la restriction de u à ν_θ induit une bijection de ν_θ sur $\mathbb{C}^\ell$. Il existe donc $x \in \nu_\theta$ tel que $u_i(x) = u_i(\mathcal{O})$ pour tout i. Puisque $\nu_\theta \subset \mathcal{R}_\theta$, on en déduit que $x \in \mathcal{O}$. Ainsi ν_θ rencontre toutes les orbites régulières. Si x et y sont deux éléments G-conjugués de ν_θ, alors $u_i(x) = u_i(y)$ $\forall i = 1, \dots, \ell$ et puisque u est une bijection de ν_θ sur $\mathbb{C}^\ell$, on en déduit que $x = y$.

□

Remarque 3.7. : Soit $\mathcal{R}_{\theta/G}$ l'ensemble des orbites de la nappe. Une conséquence de ce qui vient d'être dit au cours de la démonstration précédente est que l'application u définit par passage au quotient une bijection $\bar{u} : \mathcal{R}_{\theta/G} \to \mathbb{C}^\ell$. On peut d'ailleurs montrer de manière élémentaire que u définit également une bijection $\bar{u} : \mathcal{S}_{\theta/G} \to \mathbb{C}^\ell$, où $\mathcal{S}_{\theta/G}$ désigne l'ensemble des orbites semi-simples de X_θ. En effet u est surjective lorsqu'on la restreint à $\mathfrak{h}_\theta$ (c'est le théorème correspondant de Kostant pour $\mathcal{S}_\emptyset$ dans $\mathfrak{g}_\theta$), donc $\bar{u}$ est surjective. Soient x et y deux éléments de $\mathcal{S}_\theta$ tels que $u(x) = u(y)$. Quitte à les conjuguer on peut supposer qu'ils appartiennent à $\mathfrak{h}_\theta$ (voir par exemple [8]), mais alors la condition $u(x) = u(y)$ implique qu'il existe $w \in W_\theta$ tel que $y = wx$. Comme les éléments de W_θ agissant sur $\mathfrak{h}_\theta$ sont des restrictions d'automorphismes de G, on a le résultat voulu.

En fait, pour bon nombre de cas, la situation en ce qui concerne les fonctions invariantes sur X_θ, est meilleure que celle du théorème 3.4. ainsi que le prouvent la proposition ci-dessous et son corollaire.

PROPOSITION 3.8. :

1) Supposons que θ soit admissible dans une algèbre simple $\mathfrak{g}$ et que l'une des conditions suivantes soit satisfaite :

i) $\mathfrak{g}$ est de type classique,

ou ii) Card $\phi - \theta = 1$.

Alors l'homomorphisme de restriction $\mathbb{C}[\mathfrak{h}]^W \to \mathbb{C}[\mathfrak{h}_\theta]^{W_\theta}$ est surjectif.

2) La conclusion du 1) est fausse en général pour les parties admissibles dans les algèbres de type exceptionnel.

Démonstration : Pour 1) i) nous utiliserons les descriptions explicites des polynômes invariants que l'on trouve dans [3] chap. VI § 4 n° 5-9 p. 202-211, et le fait bien connu que les polynômes symétriques en n variables sont engendrés par les polynômes $u_r(x_1,\dots,x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i^r \quad 1 \le r \le n$.

Les parties θ admissibles et les sous-algèbres $\mathfrak{g}_\theta$ associées sont celles de la table. Les racines de Φ sont notées $\alpha_1,\dots,\alpha_n$.

type A_n, $n = (k+1)p-1$

$$\mathfrak{h} = \{(\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_{n+1}) \ , \ \Sigma\lambda_i = 0\}$$

$$\alpha_i = \lambda_i - \lambda_{i+1} \qquad i = 1,\dots,n \ .$$

$$\theta = \{\alpha_{\ell p} \ , \ 1 \le \ell \le k\}$$

$$\mathfrak{h}_\theta = \{(\mu_1,\dots,\mu_1 \, , \mu_2,\dots,\mu_2 \, , \dots,\mu_{k+1},\dots,\mu_{k+1}), \ \Sigma\,\mu_i = 0\}$$

où chaque "paquet" de μ_i contient p termes.

Une base de $\mathbb{C}[\mathfrak{h}_\theta]^{W_\theta}$ (de type A_k) est donnée par les polynômes $\bar{u}_r(\mu_1,\dots,\mu_{k+1}) = \sum_{i=1}^{k+1} \mu_i^r$ qui sont respectivement les restrictions des polynômes $u_r(\lambda_1,\dots,\lambda_n) = \frac{1}{p}\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i^r$ qui appartiennent à $\mathbb{C}[\mathfrak{h}]^W$.

type B_n

$$\mathfrak{h} = \{(\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n)\}$$

$$\alpha_1 = \lambda_1 - \lambda_2,\dots,\alpha_{n-1} = \lambda_{n-1} - \lambda_n \ , \ \alpha_n = \lambda_n$$

$$\theta = \{\alpha_{\ell p} \ , \ 1 \le \ell \le k \ , \ (2k+1)p \le 2n+1 \ , \ p \ge 1\} \ .$$

$$\mathfrak{h}_\theta = \{(\mu_1,\dots,\mu_1 \, , \mu_2,\dots,\mu_2 \, , \dots, \ \mu_k,\dots,\mu_k \, , 0,\dots,0)\}$$

où chaque "paquet" de μ_i contient p termes, la fin étant constituée de $n-kp$ zéros. Une base des éléments de $\mathbb{C}[\mathfrak{h}_\theta]^{W_\theta}$ (la situation est de type B_k) est constituée des éléments $\bar{u}_r(\mu_1,\dots,\mu_k) = \sum_{i=1}^{k} (\mu_i^2)^r \quad (1 \le r \le k)$ qui sont les restrictions des éléments $u_r(\lambda_1,\dots,\lambda_n) = \frac{1}{p}\sum_{i=1}^{n} (\lambda_i^2)^r$ qui appartiennent à $\mathbb{C}[\mathfrak{h}]^W$.

Type C_n 1)

$$\mathfrak{h} = \{(\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n)\}$$

$$\alpha_1 = \lambda_1 - \lambda_2,\dots,\alpha_{n-1} = \lambda_{n-1} - \lambda_n \ , \ \alpha_n = 2\lambda_n$$

$$\theta = \{\alpha_{\ell p} \quad 1 \le \ell \le k \ , \ p \text{ pair} \ , \ 2k+1 \le 2n\}$$

$$\mathfrak{h}_\theta = \{(\mu_1,\dots,\mu_1,\dots,\mu_k,\dots,\mu_k, \ 0,\dots,0)\}$$

où chaque "paquet" de μ_i contient p termes, la fin étant constituée de $n-kp$ zéros. L'anneau $\mathbb{C}[\mathfrak{h}_\theta]^{W_\theta}$ (la situation est de type B_k) admet une base constituée par les polynomes $\bar{u}_r(\mu_1,\dots,\mu_k) = \sum_{i=1}^{k} (\mu_i^2)^r$ $1 \le r \le k$ qui sont les restrictions respectives de polynômes $u_r(\lambda_1,\dots,\lambda_n) = \frac{1}{p}\sum_{i=1}^{n}(\lambda_i^2)^r$ qui appartiennent à $\mathbb{C}[\mathfrak{h}]^W$.

Type C_n 2)

$n = (k+1)p \quad p \ge 0$

$\theta = \{\alpha_{\ell p}\ ,\ 1 \le \ell \le k+1\}$

$\mathfrak{h}_\theta = \{(\mu_1,\dots,\mu_1\ ,\ \mu_2,\dots,\mu_2\ ,\ \dots,\mu_{k+1},\dots,\mu_{k+1})\}$

où chaque "paquet" de μ_i contient p termes.

Une base des invariants de $\mathbb{C}[\mathfrak{h}_\theta]^{W_\theta}$ (la situation est de type C_{k+1}) est donnée par les polynômes

$$\bar{u}_r(\mu_1,\dots,\mu_{k+1}) = \sum_{i=1}^{k+1} (\mu_i^2)^r \quad 1 \le r \le k+1$$

qui sont les restrictions respectives des polynômes

$$u_r(\lambda_1,\dots,\lambda_n) = \frac{1}{p}\sum_{i=1}^{k+1} (\lambda_i^2)^r$$

qui appartiennent à $\mathbb{C}[\mathfrak{h}]^W$.

Type D_n 1)

$\mathfrak{h} = \{(\lambda_1,\dots,\lambda_n)\}$

$\alpha_1 = \lambda_1 - \lambda_2\ ,\ \alpha_2 = \lambda_2 - \lambda_3,\dots,\alpha_{n-1} = \lambda_{n-1} - \lambda_n\ ,\ \alpha_n = \lambda_{n-1} + \lambda_n$.

$\theta = \{\alpha_{\ell p}\ ,\ 1 \le \ell \le k\ ,\ (2k+1)p \le 2n\ ,\ kp+2 \le n\}$

$\mathfrak{h}_\theta = \{\mu_1,\dots,\mu_1\ ,\ \dots\ ,\ \mu_k,\dots,\mu_k\ ,\ 0,\dots,0)\}$

où chaque "paquet" de μ_i contient p termes, la fin étant constituée de $n-kp$ zéros. L'anneau $\mathbb{C}[\mathfrak{h}_\theta]^{W_\theta}$ (la situation est de type B_k) admet une base constituée des polynômes

$$\bar{u}_r(\mu_1,\dots,\mu_k) = \sum_{i=1}^{k} (\mu_i^2)^r \quad 1 \le r \le k$$

qui sont les restrictions respectives des polynômes

$$u_r(\lambda_1,\dots,\lambda_n) = \frac{1}{p}\sum_{i=1}^{n} (\lambda_i^2)^r$$

qui appartiennent à $\mathbb{C}[\mathfrak{h}]^W$.

<u>Type D_n 2)</u>

n pair , $n = (k+1)p$, $p > 1$

$\theta = \{\alpha_{\ell p} \ , \ 1 \le \ell \le k+1\}$

$\mathfrak{h}_\theta = \{(\mu_1,\dots,\mu_1 , \mu_k,\dots,\mu_k , \mu_{k+1},\dots,\mu_{k+1})\}$

où chaque "paquet" de μ_i contient p termes.

Les polynômes $\bar{u}_r(\mu_1,\dots,\mu_{k+1}) = \sum_{i=1}^{k+1} (\mu_i^2)^r$ forment une base de $\mathbb{C}[\mathfrak{h}_\theta]^{W_\theta}$ (la situation est de type C_{k+1}) et sont les restrictions respectives des polynômes $u_r(\lambda_1,\dots,\lambda_n) = \frac{1}{p}\sum_{i=1}^{n} (\lambda_i^2)^r$ appartenant à $\mathbb{C}[\mathfrak{h}]^W$.

<u>Pour le type D_n 3)</u> on a $\mathfrak{h}_\theta = \mathfrak{h}$ et il n'y a rien à démontrer.

Nous avons ainsi démontré l'assertion 1) dans le cas i).

Dans le cas ii), Card $\psi-\theta = 1$, donc $\mathfrak{g}_\theta$ est de type A_1 et $\mathbb{C}[\mathfrak{h}_\theta]^{W_\theta}$ est engendré par l'unique polynôme de degré 2 obtenu à partir de la forme de Killing de $\mathfrak{g}_\theta$. Mais on sait que la restriction de la forme de Killing B de $\mathfrak{g}$ à $\mathfrak{h}_\theta$ est non dégénérée, la restriction du polynôme $B(x,x)$ à $\mathfrak{h}_\theta$ engendre donc $\mathbb{C}[\mathfrak{h}_\theta]^{W_\theta}$. Ainsi 1) est démontré.

Pour démontrer 2) considérons le type E_6 3) . Les degrés des invariants fondamentaux de $\mathbb{C}[\mathfrak{h}]^W$ sont 2, 5, 6, 8, 9, 12 ([3] planche V) et puisque $\mathfrak{g}_\theta$ est de type A_2 , les invariants fondamentaux de $\mathbb{C}[\mathfrak{h}_\theta]^{W_\theta}$ ont pour degrés 2 et 3. Aucun polynôme homogène de degré 3 ne peut être obtenu "polynomialement" à partir des degrés précédents.

□

COROLLAIRE 3.9. :

<u>Si</u> θ <u>est admissible et si l'une des conditions</u> i) <u>ou</u> ii) <u>de la proposition précédente est remplie, alors l'homomorphisme de restriction</u> : $\mathbb{C}[X_\theta]^G \to \mathbb{C}[\mathfrak{h}_\theta]^{W_\theta}$ <u>est un isomorphisme</u>.

<u>Démonstration</u> : L'injectivité résulte du fait que $X_\theta = \overline{G.\mathfrak{h}_\theta}$, la surjectivité de la considération du diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}[\mathfrak{g}]^G & \xrightarrow{\beta} & \mathbb{C}[\mathfrak{h}]^W \\ \downarrow \alpha & & \downarrow \gamma \\ \mathbb{C}[X_\theta]^G & \xrightarrow{\delta} & \mathbb{C}[\mathfrak{h}_\theta]^{W_\theta} \end{array}$$

où toutes les flèches sont des homomorphismes de restriction. Puisque β est surjective (c'est l'isomorphisme de Chevalley) ainsi que γ (par hypothèse), δ est surjective.

□

<u>Remarque 3.10.</u>(*)

a) Revenons à la notion générale de nappe dont nous avons parlé dans la remarque 3.2. d). Dans une algèbre de Lie réductive $\mathfrak{a}$ on appelle orbite originelle une orbite incluse dans $[\mathfrak{a},\mathfrak{a}]$ et qui est elle-même une nappe au sens de la remarque citée. Soit $\mathfrak{p}$ une sous-algèbre parabolique de $\mathfrak{g}$, soit $\mathfrak{n}_\mathfrak{p}$ son radical nilpotent, soit $\mathfrak{m}_\mathfrak{p}$ une sous-algèbre de Lévi de $\mathfrak{p}$ et soit $\mathfrak{h}_\mathfrak{p}$ le centre de $\mathfrak{m}_\mathfrak{p}$. Soit $\mathcal{O}$ une orbite originelle de $\mathfrak{m}_\mathfrak{p}$. Alors $S_{\mathfrak{m}_\mathfrak{p},\mathcal{O}} = (\overline{G(\mathcal{O}+\mathfrak{h}_\mathfrak{p})})^{reg}$ est une nappe et toute nappe s'obtient par ce procédé (voir [1]). On a également $\overline{S_{\mathfrak{m}_\mathfrak{p},\mathcal{O}}} = G.(\mathfrak{h}_\mathfrak{p} + \overline{\mathcal{O}} + \mathfrak{n}_\mathfrak{p})$.

Désignons par $\widetilde{\mathbb{C}[\overline{S_{\mathfrak{m}_\mathfrak{p},\mathcal{O}}}]^G}$ la clôture intégrale de $\mathbb{C}[\overline{S_{\mathfrak{m}_\mathfrak{p},\mathcal{O}}}]^G$.

D'après Borho les morphismes de restriction suivants

$$\widetilde{\mathbb{C}[\overline{S_{\mathfrak{m}_\mathfrak{p},\mathcal{O}}}]^G} \longrightarrow \mathbb{C}[\mathfrak{h}_\theta]^{W_\theta}$$

$$\mathbb{C}[\overline{S_{\mathfrak{m}_\mathfrak{p},\mathcal{O}}}]^G \longrightarrow \mathbb{C}[W\,\mathfrak{h}_\theta]^W$$

sont des isomorphismes ([1], Satz 6.3. ; Korollar 6.4.).

La clôture intégrale de $\mathbb{C}[W\,\mathfrak{h}_\theta]^W$ s'identifie donc à $\mathbb{C}[\mathfrak{h}_\theta]^{W_\theta}$.

D'autre part, si $\mathcal{O} = \{0\}$ on a $\overline{S_{\mathfrak{m}_\mathfrak{p},\{0\}}} = X_\mathfrak{p}$. Soit alors θ une partie admissible qui vérifie l'une des conditions de la proposition 3.8. 1) et soit $\mathcal{O}$ une orbite originelle de $\mathfrak{l}_\theta$.

(*) Je remercie W. Borho de m'avoir rendu attentif au contenu de cette remarque.

Le corollaire 3.9. implique en conséquence que $\mathbb{C}[W\,\mathfrak{h}_\theta]^W$ est intégralement clos, il en est donc de même pour $\mathbb{C}[\overline{S_{\ell_\theta,\Theta}}]^G$.

Le morphisme de restriction

$$\mathbb{C}[\overline{S_{\ell_\theta,\Theta}}]^G \longrightarrow \mathbb{C}[\mathfrak{h}_\theta]^{W_\theta}$$ est alors un isomorphisme.

b) W. Borho a conjecturé que les restrictions des éléments de $\widetilde{\mathbb{C}[\overline{S_{\ell_\theta,\Theta}}]}^G$ à $S_{\ell_\theta,\Theta}$ sont des fonctions régulières sur $S_{\ell_\theta,\Theta}$, au sens de la géométrie algébrique ([1] Vermutung 6.4.). Une conséquence immédiate du corollaire 3.9. et de la remarque a) ci-dessus est que cette conjecture est vraie pour les nappes considérées.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BORHO W. : Über Schichten halbeinfacher Lie-Algebren, Inv. Math. 65, 1981, 238-317.

[2] BORHO W., KRAFT H. : Über Bahnen und deren Deformationen bei linearen Aktionen reduktiver Gruppen. Comment. Math. Helv. 54, 1979, 61-104.

[3] BOURBAKI N. : Groupes et Algèbres de Lie, chap. 4, 5, 6, Hermann, Paris, 1968.

[4] DIXMIER J. : Polarisations dans les algèbres de Lie semi-simples complexes, Bull. Sci. Math. 99, 1975, 45-63 .

[5] GODEMENT R. : Quelques résultats nouveaux de Kostant sur les groupes semi-simples. Séminaire Bourbaki n° 260 Décembre 1963.

[6] JOHNSTON D.S. RICHARDSON R.W. : Conjugacy classes in parabolic subgroups II, Bull. London Math. Soc. 9, 1977, 245-250.

[7] KOSTANT B. : Lie group representations on polynomial rings, Amer. J. Math. vol. 85, 1963,327-404.

[8] KRAFT H. : Parametrisierung von Konjugations klassen in $s\ell_n$. Math. Ann. 234, 1978, 209-220.

[9] RUBENTHALER H. : Espaces préhomogènes de type parabolique, thèse, Préprint IRMA, Strasbourg, 1982.

[10] RUBENTHALER H. : Espaces préhomogènes de type parabolique, Lect. in Math. Kyoto University n° 14, 1982, Kinokuniya Company, Japon , 189-221.

[11] RUBENTHALER H. : Construction de certaines sous-algèbres remarquables dans les algèbres de Lie semi-simples. J. of. Alg. vol. 81, n° 1, 1983,268-278.