A. ROSENBLATT

Solutions exactes des équations du mouvement des liquides visqueux

Mémorial des sciences mathématiques, fascicule 72 (1935)

<http://www.numdam.org/item?id=MSM_1935__72__1_0>

MÉMORIAL

DES

SCIENCES MATHÉMATIQUES

PUBLIÉ SOUS LE PATRONAGE DE

L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE PARIS,

DES ACADÉMIES DE BELGRADE, BRUXELLES, BUCAREST, COÏMBRE, CRACOVIE, KIEW, MADRID, PRAGUE, ROME, STOCKHOLM (FONDATION MITTAG-LEFFLER), DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE, AVEC LA COLLABORATION DE NOMBREUX SAVANTS.

DIRECTEUR :

Henri VILLAT

Membre de l'Institut,
Professeur à la Sorbonne,
Directeur du « Journal de Mathématiques pures et appliquées »

FASCICULE LXXII

Solutions exactes des équations du mouvement des liquides visqueux

Par M. A. ROSENBLATT

PARIS
GAUTHIER-VILLARS, ÉDITEUR
LIBRAIRE DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE
Quai des Grands-Augustins, 55.

1935

SOLUTIONS EXACTES DES ÉQUATIONS

DU

MOUVEMENT DES LIQUIDES VISQUEUX.

Par M. A. ROSENBLATT.

PRÉFACE.

J'ai pensé de faire œuvre utile en exposant ici l'état actuel de nos connaissances sur l'intégration des équations exactes du mouvement des liquides visqueux homogènes et incompressibles. Nous connaissons aujourd'hui un certain nombre de solutions *explicites*, c'est-à-dire satisfaisant à des équations différentielles *ordinaires*. Ces solutions sont, d'après les mots de M. Terradas de Rios, paraphrase des mots célèbres de Poincaré : « la seule brèche par où nous puissions essayer de pénétrer dans une place jusqu'ici réputée inabordable ». En effet, leur importance surpasse bien celle des purs théorèmes d'existence dont il est presque impossible de constater l'applicabilité dans un cas donné.

Après avoir rappelé, dans le premier Chapitre, les résultats classiques des fondateurs de l'hydrodynamique des fluides visqueux, je les complète par quelques formules nécessaires dans la suite et qui sont relatives aux tensions. J'expose ensuite les solutions connues du mouvement plan et de celui dans trois dimensions. On sait que l'on doit dans ce domaine des découvertes récentes importantes à MM. Hamel, Oseen, Cisotti, Crudeli, Caldonazzo, etc. qui ont élargi beaucoup le champ primitif des solutions exactes limité aux mouvements de Poiseuille, aux mouvements circulaires (de Couette), et aux mouvements laminaires. Je donne aussi des mouvements nouveaux que j'ai d'ailleurs étudié dans des travaux récents.

Je considère ensuite au Chapitre IV les mouvements voisins des mouvements précédents et leur stabilité. A ce que je sache, excepté M. F. Nœther nul essai n'a été fait jusqu'ici d'étudier cette question *exactement*, c'est-à-dire *sans négliger les membres d'ordre supérieur*. Les auteurs se bornent à l'approximation du premier ordre et appliquent les théories des équations linéaires sans se demander quel est le rapport de ces solutions aux solutions exactes. Bien que l'on puisse parvenir ainsi à des résultats intéressants et même étant dans une certaine mesure en accord avec l'expérience, il est clair qu'ils ne donnent aucun renseignement sur la nature des solutions exactes, ni sur la question de l'origine de l'accord que l'on a trouvé ou que l'on veut avoir trouvé.

J'ai obtenu moi-même certains résultats *exacts* concernant les mouvements voisins des mouvements radiaux, des mouvements de Poiseuille et des mouvements voisins des mouvements laminaires dont j'expose une partie.

Je n'ai pas exposé l'état actuel de la théorie *générale* de l'*existence des solutions* remplissant des conditions génerales au contour. On sait que ce sont les *géomètres italiens* d'une part, M. Oseen et son école brillante de l'autre part qui ont obtenu dans ce champ des résultats brillants au sujet desquels je ne puis que renvoyer aux deux livres excellents de M. Oseen : *Hydrodynamik*, et de M. Villat : *Leçons sur l'hydrodynamique*.

Je n'ai traité non plus la théorie exacte du mouvement des corps dans un liquide visqueux qui a donné lieu à des nombreux travaux, ce sujet formant l'objet d'un fascicule de M. Villat. Faute de place je n'ai cité dans la bibliographie que les travaux se rapportant directement au sujet de l'article.

Qu'il me soit permis de remercier ici bien chaleureusement M. Villat de m'avoir proposé la rédaction de ce travail. Je remercie aussi la maison Gauthier-Villars d'avoir publié le fascicule avec tous les soins traditionnels.

CHAPITRE I.

RAPPEL DES LOIS FONDAMENTALES DU MOUVEMENT DES LIQUIDES VISQUEUX.

1. Déformations au sein d'un liquide visqueux en mouvement. — Envisageons un fluide visqueux en mouvement et désignons par

$x_i (i = 1, 2, 3)$ les coordonnées cartésiennes rectangulaires du point P, et par t le temps. Désignons par $\vec{v}$ le vecteur de vitesse de composantes v_i et par e_{ij} les *composantes de déformation*, c'est-à-dire les expressions

$$(1) \qquad e_{ii} = \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = v_{ii}, \qquad e_{ij} = \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} = v_{ij} + v_{ji} \qquad (i \neq j).$$

Rot $\vec{v}$ est le vecteur de composantes ξ_i

$$\xi_1 = v_{32} - v_{23}, \qquad \xi_2 = v_{13} - v_{31}, \qquad \xi_3 = v_{21} - v_{12}.$$

Le mouvement *relatif* au point $P(x)$ est donné par le vecteur infinitésimal $\overrightarrow{dv}$ de composantes

$$dv_1 = e_{11}\, dx_1 + \frac{1}{2} e_{12}\, dx_2 + \frac{1}{2} e_{13}\, dx_3 + \frac{1}{2}(\xi_2\, dx_3 - \xi_3\, dx_2),$$

$$dv_2 = \frac{1}{2} e_{21}\, dx_1 + e_{22}\, dx_2 + \frac{1}{2} e_{23}\, dx_3 + \frac{1}{2}(\xi_3\, dx_1 - \xi_1\, dx_3),$$

$$dv_3 = \frac{1}{2} e_{31}\, dx_1 + \frac{1}{2} e_{32}\, dx_2 + e_{33}\, dx_3 + \frac{1}{2}(\xi_1\, dx_2 - \xi_2\, dx_1).$$

A ce mouvement est liée la *quadrique de déformation* Q d'équation

$$(2) \qquad \varphi \equiv \sum_{i \leq j} e_{ij} x_i x_j = C.$$

Les *directions principales* de cette quadrique correspondent aux racines e'_i de l'équation

$$(3) \qquad \Delta(e) \equiv \begin{vmatrix} e_{11} - e & \frac{1}{2} e_{12} & \frac{1}{2} e_{13} \\ \cdots\cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{1}{2} e_{31} & \frac{1}{2} e_{32} & e_{33} - e \end{vmatrix} = 0.$$

Soient $x'_j (j = 1, 2, 3)$ les axes principaux à cosinus directeurs $\lambda_i^j (i = 1, 2, 3)$. Ces cosinus sont donnés par les équations

$$(4) \qquad \begin{cases} (e_{11} - e'_j)\lambda_1^j + \frac{1}{2} e_{12}\lambda_2^j + \frac{1}{2} e_{13}\lambda_3^j = 0, \\ \frac{1}{2} e_{21}\lambda_1^j + (e_{22} - e'_j)\lambda_2^j + \frac{1}{2} e_{23}\lambda_3^j = 0, \\ \frac{1}{2} e_{31}\lambda_1^j + \frac{1}{2} e_{32}\lambda_2^j + (e_{33} - \lambda_3^j) = 0. \end{cases}$$

On a entre les coordonnées x_i et les coordonnées x'_j les relations

$$x'_j = \Sigma \lambda^j_i x_i, \qquad x_i = \Sigma \lambda^j_i x'_j.$$

La forme φ est transformée en forme canonique

$$e'_1 x'^2_1 + e'_2 x'^2_2 + e'_3 x'^2_3. \tag{5}$$

Les e'_i sont les *composantes principales de déformation.*

En remplaçant dans (5) les x' par leurs expressions dans les x, on obtient les relations

$$\left\{ \begin{aligned} e_{ii} &= \Sigma e'_j (\lambda^j_i)^2 \qquad (i = 1, 2, 3), \\ e_{ik} &= 2 \Sigma e'_j \lambda^j_i \lambda^j_k \qquad (i \neq k;\ i, k = 1, 2, 3). \end{aligned} \right. \tag{6}$$

En remplaçant inversement les x dans (2) par les x' on a

$$\left\{ \begin{aligned} e'_i &= \sum_{j \leqq k} \lambda^i_j \lambda^i_k e_{jk} \qquad (i = 1, 2, 3), \\ 0 &= \sum_{k \leqq l} \lambda^i_k \lambda^j_l e_{kl} \qquad (i \neq j;\ i, j = 1, 2, 3). \end{aligned} \right. \tag{7}$$

Les accroissements infiniment petits de la vitesse suivant les axes principaux dv'_j sont donc donnés par les formules

$$dv'_j = e'_j \, dx'_j. \tag{8}$$

2. Tensions au sein d'un liquide en mouvement. — Envisageons trois plans $\Pi_i (i = 1, 2, 3)$ rectangulaires passant par le point P et parallèles aux plans des coordonnées. Envisageons au point P les normales n_i *positives* des plans Π_i dirigées parallèlement et de même sens aux axes x_i. Appelons T_i les tensions qu'exercent au point P les parties du fluide situées du côté *positif* des plans Π_i sur ces plans. Soient de même $T'_i (i = 1, 2, 3)$ les tensions *principales*, c'est-à-dire les tensions qu'exercent au point P les parties du fluide situées du côté positif des *plans principaux* Π'_i sur ces plans. Les plans Π'_i sont perpendiculaires aux axes principaux x'_i et les normales n'_i positives à ces plans sont parallèles aux axes x'_i et de sens égal.

En raison de symétrie les tensions T'_i sont parallèles aux axes x'_i. Appelons T_{ij} les composantes suivant les axes x_j des tensions T_i et envisageons un trièdre T rectangulaire dont les faces latérales sont parallèles aux plans de coordonnées x' et dont l' « hypoténuse » est normale à la direction de l'axe x_i. Les conditions de l'équilibre de ce trièdre donnent les trois relations

$$(9) \qquad T_{ii} = \sum_{j=1}^{3} T'_j(\lambda_i^j)^2 \qquad (i = 1, 2, 3),$$

ainsi que les trois relations

$$(10) \qquad T_{ik} = T_{ki} = \sum_{j=1}^{3} T'_j \lambda_i^j \lambda_k^j.$$

Envisageons maintenant un plan général Π dont la normale n a les cosinus directeurs λ_1, λ_2, λ_3. Envisageons la tension T_n qu'exerce la partie du fluide située du côté positif de ce plan sur ce plan. Soient $T_{ni}(i = 1, 2, 3)$ les composantes suivant les axes x_i de T_n. On a

$$(11) \qquad T_{ni} = \sum_{j=1}^{3} T_{ij}\lambda_j \qquad (i = 1, 2, 3).$$

Envisageons la formule (9). En sommant par rapport à i, on obtient la relation

$$(12) \qquad \sum_{i=1}^{3} T_{ii} = \sum_{j=1}^{3} T'_j.$$

La somme des composantes normales des tensions qui agissent sur trois plans perpendiculaires passant par le point P est donc *constante* et égale à la somme des trois *tensions principales* en ce point.

Dénotons par p l'expression

$$-\frac{1}{3}\sum_{i=1}^{3} T_{ii} = -\frac{1}{3}\sum_{i=1}^{3} T'_i;$$

c'est la *pression moyenne* au point P qui est égale à la pression s'il s'agit d'un liquide parfait.

On suppose que les tensions principales T'_j diffèrent de la tension moyenne $-p$ par des *fonctions linéaires homogènes* des déformations principales. Les T'_j ont alors nécessairement la forme

$$(13) \qquad T'_j = -p + \lambda\sum_{i=1}^{3} e'_i + 2\mu\, e'_j \qquad (j = 1, 2, 3),$$

λ, μ, étant deux constantes qui, d'après la signification de p, sont liées par la relation

$$3\lambda + 2\mu = 0. \tag{14}$$

Les composantes des tensions T_i s'expriment donc en fonction des composantes de déformation par les formules suivantes :

$$\begin{aligned} T_{jj} &= -p + \lambda \sum_{i=1}^{3} e_{ii} + 2\mu e_{jj} \\ &= -p - \frac{2}{3}\mu \sum_{i=1}^{3} e_{ii} + 2\mu e_{jj} \qquad (j = 1, 2, 3), \end{aligned} \tag{15}$$

$$T_{ij} = \mu e_{ij} \qquad (i \neq j;\ i, j = 1, 2, 3). \tag{16}$$

La constante μ s'appelle *coefficient de viscosité* et sa dimension est $\left[\frac{m}{lt}\right]$. Le coefficient *cinématique* de viscosité est le quotient $\frac{\mu}{\rho}$, ρ étant la *densité*. On le désigne par ν, sa dimension est $\left[\frac{l^2}{t}\right]$.

Remplaçons dans les formules (11) les composantes des tensions par leurs expressions (15), (16) en composantes de déformation. On obtient pour le vecteur T_n l'expression vectorielle suivante :

$$T_n = -p\vec{n} - \frac{2}{3}\mu\theta\vec{n} + 2\mu\vec{en}. \tag{17}$$

Dans cette expression $\vec{n}$ désigne le vecteur unité de la normale n. e est l'*homographie vectorielle* donnée par la forme $\varphi(2)$, c'est-à-dire que si $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ sont les cosinus directeurs de n, $\vec{en}$ est le vecteur de composantes

$$\frac{1}{2}\varphi_i = \frac{1}{2}\frac{\partial\varphi(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)}{\partial\lambda_i} \qquad (i = 1, 2, 3).$$

On a

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\varphi_1 &= e_{11}\lambda_1 + \frac{1}{2}e_{12}\lambda_2 + \frac{1}{2}e_{13}\lambda_3, \\ \frac{1}{2}\varphi_2 &= \frac{1}{2}e_{21}\lambda_1 + e_{22}\lambda_2 + \frac{1}{2}e_{23}\lambda_3, \\ \frac{1}{2}\varphi_3 &= \frac{1}{2}e_{31}\lambda_1 + \frac{1}{2}e_{32}\lambda_2 + e_{33}\lambda_3. \end{aligned}$$

Or on a

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\varphi_1 &= v_{11}\lambda_1 + v_{12}\lambda_2 + v_{13}\lambda_3\\ &= v_{11}\lambda_1 + v_{12}\lambda_2 + v_{13}\lambda_3 - \frac{1}{2}[(v_{13} - v_{31})\lambda_3 - (v_{21} - v_{12})\lambda_2],\end{aligned}$$

. . . .

Introduisons l'*homographie vectorielle* $\frac{d\vec{v}}{dP}$ donnée par la *forme bilinéaire*

$$\varphi(x, y) = \Sigma v_{ij} x_i y_j.$$

On a

$$\begin{aligned}\frac{d\vec{v}}{dP}\vec{n} &= \vec{i}_1 \Sigma v_{1i}\lambda_i + \vec{i}_2 \Sigma v_{2i}\lambda_i + \vec{i}_3 \Sigma v_{3i}\lambda_i\\ &= \vec{i}_1 \frac{dv_1}{dn} + \vec{i}_2 \frac{dv_2}{dn} + \vec{i}_3 \frac{dv_3}{dn}.\end{aligned}$$

Le vecteur $\vec{en}$ peut être exprimé par l'homographie $\frac{d\vec{v}}{dP}$ de la manière suivante :

$$\vec{en} = \frac{d\vec{v}}{dP}\vec{n} - \frac{1}{2}\operatorname{rot}\vec{v} \wedge \vec{n}.$$

Nous avons donc la formule vectorielle suivante :

$$\text{(18)} \qquad T_n = -p\vec{n} - \frac{2}{3}\mu\Theta\vec{n} + 2\mu\frac{d\vec{v}}{dP}\vec{n} - \mu\operatorname{rot}\vec{v} \wedge \vec{n}.$$

Θ est d'ailleurs la *dilatation*

$$\Theta = \Sigma e_{ii} = \Sigma e'_i.$$

3. Équations du mouvement des liquides visqueux. — En dénotant par $\frac{dv_i}{dt}$ les composantes matérielles de l'accélération et par X_i les composantes des forces extérieures agissant sur le fluide, on a les équations suivantes du mouvement du fluide :

$$\text{(19)} \qquad \rho\frac{dv_i}{dt} = \rho X_i + \sum_{j=1}^{3}\frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} \qquad (i = 1, 2, 3).$$

En remplaçant dans ces formules les T_{ij} par leurs expressions (16) et en remarquant que l'on a

$$\frac{\partial e_{11}}{\partial x_1}+\frac{1}{2}\frac{\partial e_{12}}{\partial x_2}+\frac{1}{2}\frac{\partial e_{13}}{\partial x_3}=\frac{1}{2}\Delta v_1+\frac{1}{2}\frac{\partial \theta}{\partial x_1}\cdots,$$

on obtient les *équations différentielles*

$$\frac{dv_i}{dt}=X_i-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_i}+\frac{\nu}{3}\frac{\partial \theta}{\partial x_i}+\nu\Delta v_i \qquad (i=1, 2, 3). \tag{20}$$

La dérivée matérielle $\frac{d\vec{v}}{dt}$ du vecteur v est égale à

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}+\frac{d\vec{v}}{dP}\vec{v}.$$

La densité ρ satisfait à l'*équation de conservation des masses*

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\operatorname{div}(\rho\vec{v})=0 \tag{21}$$

ou bien

$$\frac{d\rho}{dt}+\rho\operatorname{div}\vec{v}=0. \tag{22}$$

Si le fluide est *incompressible*, on a

$$\frac{d\rho}{dt}=0, \qquad \theta=0.$$

S'il est, en outre, *homogène*, et si les forces dérivent d'un *potentiel* U, on pose

$$\Omega=U-\frac{p}{\rho}$$

et l'on a l'équation vectorielle

$$\frac{d\vec{v}}{dt}=\overrightarrow{\operatorname{grad}}\,\Omega+\nu\,\Delta\vec{v}. \tag{23}$$

Si ρ est plus généralement *fonction de p seulement*, on pose

$$\Omega=U-\int\frac{dp}{\rho}.$$

Supposons encore le fluide *incompressible* et *homogène*, et prenons le *roteur* de l'équation (23). On a

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \frac{1}{2}\overrightarrow{\text{grad}}\, v^2 + \text{rot}\,\vec{v} \wedge \vec{v},$$

$$\frac{d\,\text{rot}\,\vec{v}}{dt} = \frac{\partial\,\text{rot}\,\vec{v}}{\partial t} + \frac{d\,\text{rot}\,\vec{v}}{dP}\vec{v},$$

$$\text{rot}(\vec{u} \wedge \vec{v}) = \left(\text{div}\,\vec{v} - \frac{d\vec{v}}{dP}\right)\vec{u} - \left(\text{div}\,\vec{u} - \frac{d\vec{u}}{dP}\right)\vec{v},$$

ou $\vec{u}$, $\vec{v}$ sont deux vecteurs arbitraires. On a donc

$$\text{rot}\,\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\partial\,\text{rot}\,\vec{v}}{\partial t} + \left(\text{div}\,\vec{v} - \frac{'d\vec{v}}{dP}\right)\text{rot}\,\vec{v} + \frac{d\,\text{rot}\,\vec{v}}{dP}\vec{v}$$

$$= \frac{d\,\text{rot}\,\vec{v}}{dt} - \frac{d\vec{v}}{dP}\,\text{rot}\,\vec{v},$$

donc, l'équation (23) devient

$$(24) \qquad \frac{d\,\text{rot}\,\vec{v}}{dt} = \frac{|d\vec{v}}{dP}\,\text{rot}\,\vec{v} + \nu\Delta\,\text{rot}\,\vec{v},$$

'ou bien, puisque l'on a

$$\overrightarrow{\text{grad}}\,\text{div}\,\vec{v} = \Delta\vec{v} + \text{rot}^2\,\vec{v},$$

$$(25) \qquad \frac{d\,\text{rot}\,\vec{v}}{dt} = \frac{d\vec{v}}{dP}\,\text{rot}\,\vec{v} - \nu\,\text{rot}^3\,\vec{v},$$

$\text{rot}^2\,\vec{v}$ et $\text{rot}^3\,\vec{v}$ désignant la répétition double et triple de l'opération rot.

Dans le cas général, lorsque $\text{div}\,\vec{v}$ n'est pas nul, on a

$$\frac{d\,\text{rot}\,\vec{v}}{dt} + \text{div}\,\vec{v}\,\text{rot}\,\vec{v} = \rho\,\frac{d}{dt}\left(\frac{\text{rot}\,\vec{v}}{\rho}\right),$$

donc, en prenant le roteur de l'équation (20) que nous écrirons

$$(20') \qquad \frac{d\vec{v}}{dt} = \overrightarrow{\text{grad}}\,U - \frac{1}{\rho}\overrightarrow{\text{grad}}\,p + \frac{\nu}{3}\overrightarrow{\text{grad}}\,\text{div}\,\vec{v} + \nu\,\Delta\vec{v},$$

on aura

$$\rho\,\frac{d}{dt}\left(\frac{\text{rot}\,\vec{v}}{\rho}\right) = \frac{|d\vec{v}}{dP}\,\text{rot}\,\vec{v} + \nu\Delta\,\text{rot}\,\vec{v} - \text{rot}\left(\frac{\overrightarrow{\text{grad}}\,p}{\rho}\right)$$
$$+ \frac{1}{3}\,\text{rot}\left(\nu\,\overrightarrow{\text{grad}}\,\text{div}\,\vec{v}\right).$$

Le troisième terme à droite ne s'annule que lorsqu'on a

$$\overrightarrow{\operatorname{grad}} p \wedge \overrightarrow{\operatorname{grad}} \rho = 0,$$

de même, le quatrième membre ne s'annule que lorsqu'on a

$$\overrightarrow{\operatorname{grad}} \operatorname{div} \vec{v} \wedge \overrightarrow{\operatorname{grad}} \rho = 0 \quad (^1).$$

4. Mouvement plan. — Dans le cas du *mouvement plan*, le vecteur

$$\operatorname{rot} \vec{v} = (v_{21} - v_{12}) \vec{i}_3$$

est *normal* à ce plan. On a

$$\operatorname{rot} \vec{v} \wedge \vec{n} = \xi_3 \vec{i}_3 \wedge (\vec{i}_1 n_1 + \vec{i}_2 n_2) = \xi_3 (\vec{i}_2 n_1 - \vec{i}_1 n_2),$$

n_1, n_2 étant les cosinus directeurs d'une direction n du plan.

Soit s une direction orientée par rapport à la direction n comme l'axe des x par rapport à l'axe des y, et soient s_1, s_2 ses cosinus directeurs. On a

$$\frac{d\vec{v}}{dP} \vec{n} = \frac{d\vec{v}}{dn} = \frac{dv_1}{dn} \vec{i}_1 + \frac{dv_2}{dn} \vec{i}_2,$$

$$\frac{d\vec{v}}{dn} \vec{n} = \frac{dv_1}{dn} n_1 + \frac{dv_2}{dn} n_2,$$

$$\frac{d\vec{v}}{dn} \vec{s} = \frac{dv_1}{dn} s_1 + \frac{dv_2}{dn} s_2;$$

donc, la tension T_n est donnée par la formule

$$(26) \qquad \begin{aligned} T_n = {} & \left[-p - \frac{2}{3} \mu \Theta + 2\mu \left(\frac{dv_1}{dn} n_1 + \frac{dv_2}{dn} n_2 \right) \right] \vec{n} \\ & + \mu \left[2 \left(\frac{dv_1}{dn} n_2 - \frac{dv_2}{dn} n_1 \right) + \xi_3 \right] \vec{s}. \end{aligned}$$

Les composantes T_{nn} et T_{ns} normale et tangentielle de l'effort T_n

---

(1) La formule (4), page 62, de l'*Analyse vectorielle générale*, de MM. Burali-Forti et Marcolongo, Pavie, 1913, est *inexacte*.

s'expriment donc par les formules suivantes :

$$(27)\quad \begin{cases} T_{nn} = -p - \frac{2}{3}\mu\theta + 2\mu[v_{11}n_1^2 + v_{22}n_2^2 + (v_{12}+v_{21})n_1 n_2], \\ T_{ns} = \mu[2 n_1 n_2(v_{11} - v_{22}) + (n_2^2 - n_1^2)(v_{12} + v_{21})]. \end{cases}$$

Si le fluide est *incompressible*, et si Ψ est la fonction de Stokes, on a

$$v_1 = -\Psi_2, \qquad v_2 = \Psi_1,$$

on peut donc exprimer les vitesses et les cosinus directeurs par Ψ. On a

$$s_1 = \frac{v_1}{q}, \qquad s_2 = \frac{v_2}{q},$$

q étant la valeur absolue de la vitesse. On trouve ainsi

$$(28)\quad \begin{cases} T_{nn} = -p + \frac{2\mu}{q^2}[-\Psi_{12}(\Psi_1^2 - \Psi_2^2) + (\Psi_{11} - \Psi_{22})\Psi_1\Psi_2], \\ T_{ns} = \frac{\mu}{q^2}[-4\Psi_{12}\Psi_1\Psi_2 + (\Psi_{11} - \Psi_{22})(\Psi_2^2 - \Psi_1^2)]. \end{cases}$$

Introduisons l'angle α de la tangente positive. On a

$$\frac{\partial\alpha}{\partial n} = \cos^2\alpha\,\frac{\partial \operatorname{tang}\alpha}{\partial n} = -\frac{1}{q^3}[\Psi_1\Psi_2(\Psi_{22} - \Psi_{11}) + (\Psi_1^2 - \Psi_2^2)\Psi_{12}],$$

$$\frac{\partial\alpha}{\partial s} = \cos^2\alpha\,\frac{\partial \operatorname{tang}\alpha}{\partial s} = \frac{1}{q^3}[\Psi_1^2\Psi_{22} + \Psi_2^2\Psi_{11} - 2\Psi_1\Psi_2\Psi_{12}],$$

donc, on obtient les formules

$$(29)\quad \begin{cases} T_{nn} = -p + 2\mu q\,\frac{\partial\alpha}{\partial n}, \\ T_{ns} = \mu\left(2q\,\frac{\partial\alpha}{\partial s} - \Delta\Psi\right). \end{cases}$$

Les équations différentielles du mouvement plan sont

$$(30)\quad \begin{cases} v_1 v_{11} + v_2 v_{12} + v_{1t} = \frac{\partial}{\partial x_1}\left(U - \int\frac{dp}{\rho}\right) + \nu\,\Delta v_1 + \frac{1}{3}\nu\,\frac{\partial\theta}{\partial x_1}, \\ v_1 v_{21} + v_2 v_{22} + v_{2t} = \frac{\partial}{\partial x_2}\left(U - \int\frac{dp}{\rho}\right) + \nu\,\Delta v_2 + \frac{1}{3}\nu\,\frac{\partial\theta}{\partial x_2}; \end{cases}$$

donc, dans le cas du fluide *incompressible et homogène*, on a les équations

$$(31)\quad \begin{cases} -\Delta\Psi.\Psi_1 - \Psi_{2t} = \frac{\partial}{\partial x_1}\left(U - \frac{p}{\rho} - \frac{1}{2}q^2\right) - \nu\,\Delta\Psi_2, \\ -\Delta\Psi.\Psi_2 + \Psi_{1t} = \frac{\partial}{\partial x_2}\left(U - \frac{p}{\rho} - \frac{1}{2}q^2\right) + \nu\,\Delta\Psi_1. \end{cases}$$

L'élimination de p donne l'équation

$$\nu\,\Delta\Delta\Psi - \frac{D(\Psi, \Delta\Psi)}{D(x_1, x_2)} - \frac{\partial\,\Delta\Psi}{\partial t} = 0 \tag{32'}$$

du quatrième ordre en Ψ.

La pression moyenne p est ensuite donnée par la formule

$$\begin{aligned} p = {} & -\frac{\rho}{2}\,q^2 + \rho\,U \\ & - \rho \int [\nu(\Delta\Psi_2\,dx_1 - \Delta\Psi_1\,dx_2) - \Delta\Psi\,d\Psi + \Psi_{1t}\,dx_2 - \Psi_{2t}\,dx_1]. \end{aligned} \tag{33}$$

5. **Introduction des coordonnées isométriques.** — Nous introduirons, au lieu des coordonnées cartésiennes x_i, les coordonnées *isométriques* φ, χ de M. Hamel. La fonction ω de x_1, x_2,

$$\omega = \varphi + i\chi,$$

est *fonction analytique* de $z = x_1 + i x_2$.

On a donc

$$\Psi_1 = \Psi_\varphi . \varphi_1 + \Psi_\chi . \chi_1, \qquad \Psi_2 = \Psi_\varphi . \varphi_2 + \Psi_\chi . \chi_2,$$
$$q^2 = \Psi_1^2 + \Psi_2^2 = (\Psi_\varphi^2 + \Psi_\chi^2)(\varphi_1^2 + \varphi_2^2).$$

Désignons par Q l'expression

$$\left|\frac{d\omega}{dz}\right|^2 = \varphi_1^2 + \varphi_2^2 = \chi_1^2 + \chi_2^2.$$

Le laplacien $\Delta'\Psi$ en coordonnées isométriques est donné par la relation

$$\Delta\Psi = Q\,\Delta'\Psi.$$

On a

$$(\Delta\Psi)_\varphi = \Delta'\Psi_\varphi\,Q + \Delta'\Psi\,Q_\varphi,$$
$$(\Delta\Psi)_\chi = \Delta'\Psi_\chi\,Q + \Delta'\Psi\,Q_\chi,$$
$$\Delta'\,\Delta\Psi = Q\,\Delta'\Delta'\Psi + 2(\Delta'\Psi_\varphi Q_\varphi + \Delta'\Psi_\chi Q_\chi) + \Delta'\Psi\,\Delta'Q.$$

On a

$$\frac{d}{d\omega}\log\left(\frac{d\omega}{dz}\right)^2 = \frac{\partial \log Q}{\partial\varphi} - i\,\frac{\partial \log Q}{\partial\chi}.$$

Posons

$$\frac{d}{d\omega}\log\left(\frac{d\omega}{dz}\right)^2 = 2\,\frac{\dfrac{d^2\omega}{dz^2}}{\left(\dfrac{d\omega}{dz}\right)^2} = a + ib, \tag{34}$$

$a + ib$ est fonction analytique de z.

Multiplions les équations (31) par $x_{1\varphi}$, $x_{2\varphi}$ en les sommant, de même par $x_{1\chi}$, $x_{2\chi}$. On obtient les équations

$$(35)\qquad \left\{\begin{aligned} -\Delta\Psi\,\Psi_\varphi - \Psi_{\chi t} &= \frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\Omega - \frac{1}{2}q^2\right) - \nu(\Delta\Psi)_\chi, \\ -\Delta\Psi\,\Psi_\chi + \Psi_{\varphi t} &= \frac{\partial}{\partial\chi}\left(\Omega - \frac{1}{2}q^2\right) + \nu(\Delta\Psi)_\varphi, \end{aligned}\right.$$

et, en éliminant Ω,

$$-\frac{D(\Delta\Psi, \Psi)}{D(\varphi, \chi)} + \Delta'\Psi_t = \nu\Delta'\Delta\Psi.$$

On a

$$\Delta' Q = Q(a^2 + b^2),$$

$$\frac{D(\Delta\Psi, \Psi)}{D(\varphi, \chi)} = Q\frac{D(\Delta'\Psi, \Psi)}{D(\varphi, \chi)} + \Delta'\Psi(Q_\varphi\Psi_\chi - Q_\chi\Psi_\varphi);$$

On obtient donc l'*équation* de M. Hamel donnant Ψ en coordonnées φ, χ

$$(36)\qquad \begin{aligned} &\nu[\Delta'\Delta'\Psi + 2(a\Delta'\Psi_\varphi - b\Delta'\Psi_\chi) + (a^2 + b^2)\Delta'\Psi] \\ &\quad = -\frac{D(\Delta'\Psi, \Psi)}{D(\varphi, \chi)} - \Delta'\Psi(a\Psi_\chi + b\Psi_\varphi) + \frac{1}{Q}\frac{\partial\Delta'\Psi}{\partial t}. \end{aligned}$$

Exprimons maintenant les tensions par les coordonnées isométriques. On a

$$T_{ns} = \mu\,\Delta\Psi - \frac{\mu}{q^2}\left(\Psi_1\frac{\partial q^2}{\partial x_1} + \Psi_2\frac{\partial q^2}{\partial x_2}\right),$$

mais on a

$$\Psi_1\frac{\partial q^2}{\partial x_1} + \Psi_2\frac{\partial q^2}{\partial x_2} = Q\left(\Psi_\varphi\frac{\partial q^2}{\partial\varphi} + \Psi_\chi\frac{\partial q^2}{\partial\chi}\right).$$

On obtient la formule

$$(37)\qquad \begin{aligned} T_{ns} = \mu Q\Big[\Delta'\Psi - a\Psi_\varphi + b\Psi_\chi - \Psi_\varphi\frac{\partial\log(\Psi_\varphi^2 + \Psi_\chi^2)}{\partial\varphi} \\ - \Psi_\chi\frac{\partial\log(\Psi_\varphi^2 + \Psi_\chi^2)}{\partial\chi}\Big]. \end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned} D = \begin{vmatrix} \Psi_1 & \Psi_2 \\ (q^2)_1 & (q^2)_2 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} \Psi_\varphi & \Psi_\chi \\ (q^2)_\varphi & (q^2)_\chi \end{vmatrix}\begin{vmatrix} \varphi_1 & \chi_1 \\ \varphi_2 & \chi_2 \end{vmatrix} \\ &= Q\left\{\Psi_\varphi[Q(\Psi_\varphi^2 + \Psi_\chi^2)]_\chi - \Psi_\chi[Q(\Psi_\varphi^2 + \Psi_\chi^2)]_\varphi\right\} \end{aligned}$$

et

$$D = 2[\Psi_{12}(\Psi_1^2 - \Psi_2^2) + \Psi_1\Psi_2(\Psi_{22} - \Psi_{11})].$$

Nous obtenons ainsi la formule

$$(38)\qquad \begin{aligned} T_{nn} &= -p - \frac{\mu}{\Psi_\varphi^2+\Psi_\chi^2}\left[\Psi_\varphi q_\chi^2 - \Psi_\chi q_\varphi^2\right] \\ &= -p + \mu Q\left[a\Psi_\chi + b\Psi_\varphi + \Psi_\chi \frac{\partial \log(\Psi_\varphi^2+\Psi_\chi^2)}{\partial\varphi}\right. \\ &\qquad \left. - \Psi_\varphi \frac{\partial \log(\Psi_\varphi^2+\Psi_\chi^2)}{\partial\chi}\right]. \end{aligned}$$

Les équations (35) donnent la pression moyenne. On a

$$(39)\qquad \begin{aligned} \frac{dp}{\rho} = dU - \frac{1}{2}dq^2 + Q\Big[\Delta'\Psi\, d\Psi - \nu\frac{\partial\Delta'\Psi}{\partial\chi}d\varphi \\ + \nu\frac{\partial\Delta'\Psi}{\partial\varphi}d\chi + \nu\Delta'\Psi(a\,d\chi + b\,d\varphi)\Big] \\ - \Psi_{\varphi t}\,d\chi + \Psi_{\chi t}\,d\varphi. \end{aligned}$$

CHAPITRE II.

MOUVEMENTS PLANS.

1. Mouvements en spirales logarithmiques. — Les mouvements plans stationnaires en spirales logarithmiques ont été découverts par M. G. Hamel. M. Hamel s'est demandé, s'il y avait des mouvements plans *non potentiels*, mais dont les lignes de flux fussent des *courbes harmoniques*. La fonction Ψ de Stokes doit donc être fonction d'une fonction φ harmonique, sans que Ψ soit harmonique.

Posant

$$(1)\qquad \Psi = f(\varphi),$$

on a

$$\Delta\Psi = \frac{f''}{f'}(\Psi_x^2+\Psi_y^2) + f'\Delta\varphi \qquad (f' \neq 0).$$

La fonction Ψ doit donc satisfaire à l'équation

$$(2)\qquad \Delta\Psi = F(\Psi)(\Psi_x^2+\Psi_y^2).$$

Inversement, si Ψ satisfait à l'équation (2) la fonction

$$(3)\qquad \varphi = \int e^{-\int F(\Psi)d\Psi}\,d\Psi$$

est harmonique.

Envisageons l'équation (36), Chapitre I, de M. Hamel en supposant le mouvement stationnaire. Pour que l'on puisse avoir (1), où φ est harmonique, *il faut et il suffit* que la fonction analytique de z, $a + ib$, soit *une constante* (Hamel, une autre démonstration de Millikan). On a en ce cas

$$w = -2\frac{a - ib}{a^2 + b^2}\log z; \tag{4}$$

donc les coordonnées isométriques φ, χ s'expriment par les coordonnées polaires par les expressions

$$\left\{\begin{aligned} \varphi &= -\frac{2}{a^2 + b^2}(a\log r + b\Theta), \\ \chi &= \frac{2}{a^2 + b^2}(b\log r - a\Theta). \end{aligned}\right. \tag{5}$$

Les lignes de courant sont donc des *spirales logarithmiques* ou bien leurs *dégénérescences*

$$a\log r + b\Theta = \text{const.} \tag{6}$$

$f(\varphi)$ satisfait à l'*équation différentielle du quatrième ordre de M. Hamel*

$$v[f^{\text{IV}} + 2af''' + (a^2 + b^2)f''] = -bf'f''. \tag{7}$$

Les composantes de la vitesse v suivant les directions des φ et des χ croissants sont

$$v_\varphi = -\Psi_\chi\sqrt{Q}, \qquad v_\chi = \Psi_\varphi\sqrt{Q}.$$

Donc les composantes de v suivant les directions du rayon vecteur et de l'amplitude Θ sont

$$v_\rho = -\frac{\Psi_\theta}{r}, \qquad v_\theta = \frac{\Psi_\rho}{r},$$

où ρ est $\log r$. On obtient donc les expressions suivantes de ces composantes :

$$v_\rho = \frac{2b}{a^2 + b^2}\frac{f'}{r}, \qquad v_\theta = -\frac{2a}{a^2 + b^2}\frac{f'}{r}. \tag{8}$$

Les formules (37) et (38) du Chapitre I donnent les composantes de la tension T_n agissant sur les lignes de flux. On a

$$T_{ns} = -\mu Q(f'' + af'). \tag{9}$$

Quant à T_{nn} on a

$$T_{nn} = -p + \mu b Q f',$$

et la pression moyenne p est donnée par la formule

$$(10) \qquad \frac{dp}{\rho} = -\frac{1}{2} dq^2 + Q[f'f''\,d\varphi + \nu f'''\,d\chi + \nu f''(a\,d\chi + b\,d\varphi)],$$

où l'on a

$$Q = \frac{4}{(a^2+b^2)r^2} = \frac{4}{a^2+b^2} e^{a\varphi - b\chi}.$$

Or l'équation différentielle (7) peut être immédiatement intégrée une fois et donne

$$(11) \qquad \nu[f''' + 2af'' + (a^2+b^2)f'] + \frac{b}{2} f'^2 = C\nu.$$

L'expression (10) peut être intégrée complètement et l'on obtient

$$(12) \qquad p = \frac{4}{(a^2+b^2)br^2}[\mu f'(a^2+b^2) + \mu a f'' - C\mu].$$

Donc la composante normale de la tension T_n est donnée par la formule

$$(13) \qquad T_{nn} = \frac{4\mu}{(a^2+b^2)br^2}[C - a(f'' + af')].$$

2. Cas particuliers. Mouvements circulaires et radiaux. — Supposons avec M. Hamel que l'on ait

$$a \geqq 0, \qquad b \leqq 0,$$
$$-\frac{2b}{a^2+b^2} = 1 \qquad (\text{en cas de } b \neq 0),$$

ce que l'on peut réaliser par une simple transformation de coordonnées. On a les deux cas particuliers fondamentaux :

a. $b = 0$. Ce sont *les mouvements circulaires de Couette*. Envisageons l'équation du troisième ordre (11). En posant $f' = u$ M. Hamel la ramène immédiatement à l'équation du deuxième ordre

$$(14) \qquad \nu[u'' + 2au' + (a^2+b^2)u] + \frac{b}{2}u^2 - C\nu = 0.$$

Dans le cas particulier $b = 0$, elle s'intègre par des fonctions élémentaires

$$(15) \qquad u = \frac{C\nu}{a^2} + e^{-a\varphi}(A + B\varphi).$$

La condition de l'univocité de la pression est, d'après la formule (10) (χ étant proportionnel à Θ),

$$f''' + af'' = 0,$$

ce qui donne $B = 0$.

Désignons par v_1, v_2 les vitesses du fluide le long de deux cercles C_1, C_2 de rayons r_1, r_2, $r_1 < r_2$. On trouve

$$v_\theta = \frac{(r^2 - r_1^2)v_2 r_2 - (r^2 - r_2^2)v_1 r_1}{r(r_2^2 - r_1^2)} = \frac{\alpha}{r} + \beta r. \tag{16}$$

La pression p est donnée par la formule

$$p = \rho\left(\frac{\beta^2 r^2}{2} - \frac{\alpha^2}{2r^2} + 2\alpha\beta \log r\right). \tag{17}$$

b. $a = 0$. On a les *mouvements radiaux de M. Hamel*. L'équation (14) devient, en posant $a = 0$, $b = -2$,

$$u'' = -4u + \frac{u^2}{\nu} + C \tag{18}$$

qui s'intègre immédiatement par des fonctions elliptiques.

On a

$$\varphi = \Theta, \qquad \chi = -\log r,$$

et la vitesse radiale est donnée par la formule

$$v_\rho = -\frac{u}{r}. \tag{19}$$

En intégrant une fois l'équation M. Hamel obtient l'équation

$$u' = \sqrt{\frac{2}{3\nu}}\sqrt{(u - e_1)(u - e_2)(u - e_3)},$$

où l'on a

$$e_1 + e_2 + e_3 = 6\nu,$$

$$e_1 e_2 + e_2 e_3 + e_3 e_1 = \frac{3C\nu}{2}.$$

Posant

$$u = v + 2\nu,$$

on obtient v comme fonction elliptique de Θ,

$$v = p\left(\frac{\theta - \theta_0}{\sqrt{6\nu}}, g_2, g_3\right). \tag{20}$$

On peut ranger les e_i d'après l'ordre de grandeurs de leurs parties réelles

$$R(e_1) \geqq R(e_2) \geqq R(e_3), \qquad R(e_1) \geqq 2\nu.$$

On a les deux cas possibles :

1° Tous les e_i sont réels et u est entre e_1 et $+\infty$; ou entre e_2 et e_3.

2° Un e est réel et u est entre cet e et $+\infty$.

3. **Étude détaillée du mouvement radial.** — Il y a *trois sortes* de mouvements radiaux possibles :

I. *Le fluide est illimité.*

II. *Il est limité par deux parois.*

III. *Il est limité par deux rayons libres de flux ou bien par une paroi et un rayon libre de flux.*

I. *Fluide illimité.* — Tous les e_i sont nécessairement réels. Pour qu'il y ait périodicité *il faut et il suffit* que l'on ait

$$\frac{\pi}{n} = \sqrt{\frac{3\nu}{2}} \int_{e_3}^{e_2} \frac{du}{\sqrt{(u - e_1)(u - e_2)(u - e_3)}},$$

où n est entier. Posant

$$u = e_2 - (e_2 - e_3)\sin^2\Psi,$$

$$k^2 = \frac{e_2 - e_3}{e_1 - e_2},$$

on obtient la relation

$$\frac{\pi}{n} = \sqrt{\frac{6\nu}{e_1 - e_2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\Psi}{\sqrt{1 + k^2 \sin^2\Psi}}. \tag{21}$$

II. *Courant entre deux parois.* — u est nul le long des deux parois.

1° Tous les e réels. On a *efflux*

$$e_3 \leqq u \leqq 0$$

ou *influx*

$$0 \leqq u \leqq e_2.$$

2° Un e réel. On a *efflux*

$$e \leqq u \leqq 0.$$

Efflux : On a dans les deux cas la relation

$$\Theta = \sqrt{\frac{3\nu}{2}} \int_{e_3}^{u} \frac{du}{\sqrt{(u-e_3)(u^2+2\alpha u+\beta)}}. \tag{22}$$

L'ouverture Θ_1 est donc donnée par la formule

$$\Theta_1 = \sqrt{6\nu} \int_{e_3}^{0} \frac{du}{\sqrt{(u-e_3)(u^2+2\alpha u+\beta)}}. \tag{23}$$

La *vitesse maximum* de l'efflux est égale à $-\frac{e_3}{r}$.

L'ouverture maximum est donnée par l'expression

$$\Theta_{1\,\max} = \sqrt{6\nu} \int_{e_3}^{0} \frac{du}{\sqrt{(u-e_3)u(u+e_3-6\nu)}} = 2\pi \sqrt{\frac{3\nu}{12\nu - 2e_3(1+\varepsilon)}}$$
$$(0 < \varepsilon < 1);$$

elle est donc *limitée* par la valeur maximum de la vitesse et elle *tend vers zéro* lorsque cette vitesse maximum croît infiniment.

Influx : Maintenant on a

$$\Theta_1 = \sqrt{6\nu} \int_{0}^{e_2} \frac{du}{\sqrt{(u-e_2)(u^2+2\alpha u+\beta)}}, \tag{24}$$

la vitesse maximum est $-\frac{e_2}{r}$. Lorsque e_2 est $\geqq 3\nu$, l'angle Θ_1 peut être *arbitraire*. Si l'on a $e_2 < 3\nu$, l'angle Θ_1 est plus grand que π et arbitraire et sa valeur maximum correspond à $e_3 = 0$.

III. *Courant entre lignes libres.* — Le mouvement a lieu entre *deux rayons* le long desquels le fluide est en contact avec un fluide parfait (air) ou entre *un tel rayon* et *une paroi*.

Le long des rayons libres, la pression du fluide parfait est *normale* au rayon, on a donc la condition

$$T_{n\varphi} = 0,$$

donc on a, d'après (9), la *condition*

$$u' = 0. \tag{25}$$

La pression du fluide parfait étant supposée *constante*, on a

$$T_{nn} = 0;$$

donc on a la *seconde condition*

(26) $$C = 0.$$

1° *Mouvement entre deux rayons libres.* — Tous les e sont *réels*. On a

$$e_3 \leqq u \leqq e_2 \qquad (e_2 \geqq 0,\ e_3 \leqq 0).$$

e_1, e_2 peuvent être exprimés comme fonctions de e_3

$$e_1 = 3\nu - \frac{e_3}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3(6\nu - e_3)(e_3 + 2\nu)},$$
$$e_2 = 3\nu - \frac{e_3}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{3(6\nu - e_3)(e_3 + 2\nu)}.$$

On a les inégalités

$$4\nu < e_1 < 6\nu, \qquad 0 < e_2 < 4\nu, \qquad -2\nu < e_3 < 0.$$

On a encore la formule (22) exprimant Θ en fonction de u. L'aperture Θ_1 est donnée par la formule

$$\Theta_1 = \sqrt{6\nu}\int_{e_3}^{e_2} \frac{du}{\sqrt{(u - e_1)(u - e_2)(u - e_3)}}.$$

On donc *efflux* pour $e_3 \leqq u < 0$, *influx* pour $0 < u \leqq e_2$.

Posant

$$u = e_3 + (e_2 - e_3)\sin^2\Psi,$$

on trouve

(28) $$\theta = \frac{2\sqrt{3\nu}}{\sqrt{6\nu - 3e_3 + \sqrt{3(6\nu - e_3)(e_3 + 2\nu)}}}\int_0^{\Psi'} \frac{d\Psi'}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\Psi'}},$$

(29) $$\theta_1 = \frac{2\sqrt{3\nu}}{\sqrt{6\nu - 3e_3 + \sqrt{3(6\nu - e_3)(e_3 + 2\nu)}}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\Psi}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\Psi}};$$

(30) $$k^2 = \frac{6\nu - 3e_3 - \sqrt{3(6\nu - e_3)(e_3 + 2\nu)}}{6\nu - 3e_3 + \sqrt{3(6\nu - e_3)(e_3 + 2\nu)}}.$$

Posant

$$e_3 = -2\nu\alpha \qquad (0 < \alpha < 1),$$

on a

$$
(31) \quad \left\{
\begin{aligned}
\theta_1 &= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1+\alpha+\sqrt{\left(1+\frac{\alpha}{3}\right)(1-\alpha)}}}\,K,\\
k^2 &= \frac{1+\alpha-\sqrt{\left(1+\frac{\alpha}{3}\right)(1-\alpha)}}{1+\alpha+\sqrt{\left(1+\frac{\alpha}{3}\right)(1-\alpha)}};
\end{aligned}
\right.
$$

K étant l'intégrale complète.

θ_1 tend vers $\frac{\pi}{2}$ si $\alpha \to 0$ et vers l'infini, si $\alpha \to 1$.

2° *Mouvement entre un rayon libre et une paroi.* — Tous les e sont réels, ou un seul qui est négatif. Dans le premier cas u varie entre e_3 et o (efflux), ou entre o et e_2 (influx). L'aperture Θ_1 est limitée supérieurement dans le premier cas

$$\Theta_1 \leqq \sqrt{\frac{3\nu}{2(6\nu - e_3)}}\,\frac{\pi}{2},$$

et inférieurement dans le second

$$\theta_1 \geqq \sqrt{\frac{3\nu}{2(6\nu - e_2)}}\,\frac{\pi}{2}.$$

Dans le cas d'un seul e réel, on a

$$\theta_1 \leqq \sqrt{\frac{3}{16}}\,\frac{\pi}{2}.$$

4. Étude des mouvements en spirales logarithmiques. — Posons avec M. Hamel

$$-\frac{2b}{a^2+b^2} = 1, \qquad \beta^2 = a^2 + b^2 = 2 \pm 2\sqrt{1-a^2};$$

l'équation à intégrer est

$$(32) \qquad u'' + 2au' + \beta^2 u - \frac{\beta^2}{4\nu}u^2 - C = 0.$$

C'est l'équation d'un mouvement amorti sous l'influence du potentiel

$$\frac{\beta^2 u^2}{2} - \frac{\beta^2}{12\nu}u^3 - C\nu.$$

Il n'y a donc pas de mouvements en spirales dans le plan indéfini.

MM. Olsson et Faxén [2] ont remarqué que l'équation de M. Hamel appartient à une classe étudiée par M. Picard dans un travail célèbre (¹), et intégrée par M. Mittag-Leffler (²) dans le cas où l'intégrale est *uniforme*.

Pour que l'intégrale générale de l'équation

$$u'' = A u' + B u + D + F u'$$

soit *uniforme*, il faut et il suffit que la condition soit remplie

$$\frac{AD}{6} - \frac{B^2}{24} = -\frac{3}{2}\left(\frac{F}{5}\right)^4.$$

Dans notre cas, la condition de l'univocité est

$$\frac{C}{\nu} = \frac{\beta^2}{625}(1 + 6\beta^2)(49 - 6\beta^2). \tag{33}$$

L'intégrale générale de l'équation (32) est

$$u = \frac{24\nu}{\beta^2}\left\{\left(\frac{2a}{5}\right)^2 e^{-\frac{4}{5}a\varphi}\, p\left(e^{-\frac{2}{5}a\varphi} + z_0, 0, g_3\right) + 2\nu\right\}, \tag{34}$$

où z_0, g_3 sont les constantes d'intégration, et φ est donné par

$$\varphi = \theta - \frac{2a}{\beta^2}\log r.$$

M. Olsson [1] réduit l'équation (32) par une transformation linéaire à la forme

$$u'' = -2au' + 6u^2 + D,$$

qu'il intègre par la série

$$u = \sum_0^\infty c_m\, e^{m\lambda(\varphi - \varphi_0)}, \tag{35}$$

(¹) *Mémoire sur la théorie des fonctions algébriques de deux variables* (*Journal de Mathématiques*, 4ᵉ série, t. 5, 1889).

Remarques sur les équations différentielles. Extrait d'une lettre adressée à M. Mittag-Leffler (*Acta mathematica*, t. 17, 1893).

(²) *Sur l'intégration de l'équation différentielle*

$$y'' = Ay^3 + By^2 + Cy + D + (Ey + F)y'.$$

Extrait d'une lettre à M. E. Picard (*Acta mathematica*, t. 18, 1894).

où λ est donné par

$$\lambda = \mp a\left[\sqrt{\frac{12 c_0}{a^2}+1}\pm 1\right],$$

le signe $-$ correspondant à $\varphi-\varphi_0>0$ et le signe $+$ à $\varphi-\varphi_0<0$, $c_0=\sqrt{\frac{D}{6}}$, c_1 est la seconde constante arbitraire.

Désignons par $\Phi(u)$ le trinome

$$\Phi(u)=\frac{\beta^2}{4\nu}u^2-\beta^2 u+C=\frac{\beta^2}{4\nu}(u-\rho_1)(u-\rho_2),$$

$\rho_1<\rho_2$ si les racines sont réelles. u ne peut avoir de maximum que s'il est situé entre ρ_1 et ρ_2 et de minimum qu'en dehors de l'intervalle ρ_1, ρ_2 si les racines sont réelles.

u ne peut tendre vers $-\infty$, ni lorsque l'argument φ tend vers $-\infty$, ni lorsqu'il tend vers $+\infty$. Lorsque u a un maximum entre ρ_1 et ρ_2 pour $\varphi=\varphi_0$, on a pour $\varphi>\varphi_0$ ou une infinité d'oscillations toujours plus petites ou bien u tend en diminuant vers ρ_1. Ce dernier cas est exclu, si l'on a

$$\frac{\beta^2}{4\nu}(\rho_2-\rho_1)<4a^2.$$

Envisageons maintenant les deux cas possibles du mouvement en spirales logarithmiques.

1° *Mouvement entre parois. Cas de l'efflux.* — L'ouverture, c'est-à-dire la différence des deux valeurs de l'argument φ correspondantes aux parois, est d'après M. Hamel, *limitée supérieurement* par la valeur maximum de la vitesse et elle tend vers zéro lorsque ce maximum augmente indéfiniment.

On peut étudier les mouvements qui correspondent aux *petites valeurs* de a par les méthodes de Poincaré-Picard (¹). Développons u suivant les puissances de a,

$$\alpha=u(0),\qquad \alpha'=u'(0),$$

$$u(\varphi)=u_0(\varphi)+A_1(\varphi)\alpha+A_2(\varphi)\alpha'+A_3(\varphi)a+\ldots, \tag{36}$$

où $u_0(\varphi)$ correspond au mouvement radial, $a=0$,

$$\varphi=\theta=\sqrt{\frac{3\nu}{2}}\int_{u_0}^{0}\frac{du}{\sqrt{(u-e_1)(u^2+2\alpha u+\beta)}}.$$

(¹) POINCARÉ, *Méthodes nouvelles de Mécanique celeste*, t. I. — PICARD, *Cours d'Analyse*, t. III; *Leçons sur quelques problèmes aux limites de la théorie des équations différentielles*, 1930.

Les conditions aux parois sont

$$u(0) = 0, \qquad u(\Theta_1 + \Omega) = 0,$$

où Θ_1 est donné par la formule (23), et où Ω est à déterminer. On montre l'existence des mouvements en question pour chaque système de valeurs de a, α' données suffisamment petites.

2° *Mouvement entre spirales libres de flux.* — Les formules (9) et (13) du n° 1 donnent comme condition aux limites

$$u' + au = 0$$

et l'on a

$$C = 0.$$

Maintenant $u_0(\Theta)$ est donné par la relation

$$\Theta = \sqrt{\frac{3\nu}{2}} \int_{e_3}^{u_0} \frac{du}{\sqrt{(u-e_1)(u-e_2)(u-e_3)}},$$

et les conditions aux limites sont

$$u'(0) + a\,u(0) = 0, \qquad u'(\Theta_1 + \Omega) + a\,u(\Theta_1 + \Omega) = 0,$$

Θ_1 étant donné par la formule (29) ou (31), et Ω étant à déterminer.

5. Mouvements de M. Hamel en spirales dans le plan illimité. — Ces mouvements *non potentiels* sont donnés en coordonnées polaires

$$\varphi = \log r = \rho, \qquad \chi = \Theta$$

par la formule

$$\Psi = f(\rho) + K\Theta, \tag{37}$$

où K est une constante. L'équation en Ψ en coordonnées polaires est

$$\nu\Delta\Delta\Psi = \frac{1}{r}\frac{\partial(\Delta\Psi, \Psi)}{\partial(\Theta, r)} + \frac{\partial\Delta\Psi}{\partial t}, \tag{38}$$

où l'on a

$$\Delta\Psi = \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\Psi}{\partial\Theta^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\Psi}{\partial r}\right).$$

Les composantes de la vitesse sont

$$v_\rho = -\frac{K}{r}, \qquad v_\theta = \frac{f'}{r} = \frac{df}{dr},$$

et l'équation déterminant f est

$$\nu \Delta \Delta f = -\frac{K}{r}\frac{\partial \Delta f}{\partial r} + \frac{\partial \Delta f}{\partial t}, \tag{39}$$

$$\Delta f = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial f}{\partial r}\right).$$

La condition de l'*univocité de la pression* dans le plan indéfini est

$$\frac{\partial p}{\partial \theta} = 0$$

et, d'après la formule (39) du Chapitre I,

$$\nu r\frac{\partial \Delta f}{\partial r} + K\Delta f - r\frac{\partial^2 f}{\partial r\, \partial t} = 0. \tag{40}$$

En intégrant l'équation (39) une fois et en posant la constante d'intégration égale à zéro on obtient précisément (40).

M. Hamel pose

$$v = r\frac{\partial f}{\partial r}$$

et il obtient l'équation

$$\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial r}\left(\frac{K}{\nu} - 1\right) - \frac{1}{\nu}\frac{\partial v}{\partial t} = 0. \tag{41}$$

Les *solutions stationnaires* s'obtiennent par voie élémentaire. Dans le cas de

$$\frac{K}{\nu} - 2 \neq 0,$$

on obtient la fonction f suivante

$$f = C_1 r^{2-\frac{K}{\nu}} + C_2 \log r + C_3, \tag{42}$$

tandis que dans le cas de

$$\frac{K}{\nu} - 2 = 0,$$

on a

$$f = C_1 \log^2 r + C_2 \log r + C_3. \tag{43}$$

Pour $C \neq 0$ on a donc des mouvements *non potentiels* dont la vitesse à l'infini est nulle dans le cas de l'inégalité

$$1 - \frac{K}{\nu} < 0$$

(influx).

Les *solutions non stationnaires* s'obtiennent en posant

$$v = e^{-nt}\chi_n(r). \tag{44}$$

$\chi_n(r)$ s'exprime par les fonctions de Bessel :

$$\chi_n = r^\lambda I_{\pm\lambda}\left(\sqrt{\frac{n}{\nu}}\,r\right), \qquad \lambda = 1 - \frac{K}{2\nu}, \tag{45}$$

$$I_\lambda(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^\lambda \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{k!\,2^{2k}\,\Gamma(\lambda+k+1)}, \tag{46}$$

qui sont linéairement indépendantes lorsque λ n'est pas entier.

M. Hamel pose aussi

$$v = r^\alpha t^\beta\,\omega(z),$$

$$z = \frac{r^2}{4\nu t}.$$

$w(z)$ satisfait à l'équation différentielle

$$w'' + w'\frac{\alpha+1+z-\lambda}{z} + w\left(\frac{\alpha^2-2\lambda\alpha}{4z^2} - \frac{\beta}{z}\right) = 0, \tag{47}$$

et l'on a les intégrales

$$v = t^{\lambda-1}\,e^{-\frac{r^2}{4\nu t}} \qquad \text{et} \qquad v = r^{2\lambda}\,t^{-\lambda-1}\,e^{-\frac{r^2}{4\nu t}}.$$

6. Mouvements dans le plan illimité de M. Oseen. — M. Oseen [1] envisage la fonction

$$\Psi = f(\varphi) + C\chi, \tag{48}$$

C constante arbitraire, dont le cas particulier $C = 0$ est la fonction de M. Hamel [1], et dont le cas particulier $b = 0$ donne les solutions du numéro precédent. Le mouvement est supposé *stationnaire*. On a l'équation du quatrième ordre

$$f^{\text{IV}} + \left(2a + \frac{C}{\nu}\right)f''' + \left(a^2 + b^2 + \frac{Ca}{\nu}\right)f'' + \frac{1}{\nu}bf'f'' = 0, \tag{49}$$

dont l'équation (7) de M. Hamel est un cas particulier. Pour qu'il y

---

[1] *Cf.* la figure 1 de la conférence *Das Turbulenzproblem*, [3]

ait des mouvements *uniformes* dans le plan illimité, il faut et il suffit que l'on ait la condition

$$2a + \frac{C}{\nu} = 0. \tag{50}$$

En posant $u = f'(\varphi)$ on intègre l'équation (49) par la formule

$$\sqrt{-\frac{b}{3\nu}}\,\varphi = \pm\int_0^u \frac{du}{\sqrt{(u-e_1)(u-e_2)(u-e_3)}}, \tag{51}$$

les e_i sont tous *réels* et rangés dans l'ordre de grandeur comme auparavant. En posant

$$u = e_3 + (e_2 - e_3)\sin^2\sigma,$$

M. Oseen obtient les deux équations.

$$\sqrt{-\frac{b}{3\nu}(e_1-e_3)}\,\varphi = \int_0^\sigma \frac{d\sigma}{\sqrt{1-k^2\sin^2\sigma}}, \tag{52}$$

$$\begin{aligned}\sqrt{-\frac{2b}{12\nu}(e_1-e_3)}\left\{-Cy+\left[\frac{E}{K}(e_1-e_3)-e_1\right]\varphi\right\}&\\ +\int_0^\sigma \sqrt{1-k^2\sin^2\sigma}\,d\sigma - \frac{E}{K}\int_0^\sigma \frac{d\sigma}{\sqrt{1-k^2\sin^2\sigma}} &= \text{const.}\end{aligned} \tag{53}$$

On a ici

$$k^2 = \frac{e_2-e_3}{e_1-e_3},$$

E, K sont les intégrales connues de Legendre.

Le premier cas particulier considéré par M. Oseen est celui où l'on a

$$\left[\frac{E}{K}(e_1-e_3)-e_1\right]a + Cb = 0. \tag{54}$$

Les équations (52), (53) prennent la forme

$$\theta + \frac{a}{b}\log r = \frac{\pi}{nK}\int_0^\sigma \frac{d\sigma}{\sqrt{1-k^2\sin^2\sigma}}, \tag{55}$$

$$\begin{aligned}\theta = {}& \frac{3\pi}{2n[K(2-k^2)-3E]}\\ &\times\left\{\int_0^\sigma \sqrt{1-k^2\sin^2\sigma}\,d\sigma - \frac{E}{K}\int_0^\sigma \frac{d\sigma}{\sqrt{1-k^2\sin^2\sigma}}\right\} + \theta_0,\end{aligned} \tag{56}$$

et la condition de l'*univocité de la vitesse dans le plan indéfini* est

$$(57)\qquad -\frac{2\pi b}{a^2+b^2} = \sqrt{-\frac{12\nu}{b}}\,\frac{nK}{\sqrt{e_1-e_3}}.$$

k^2 doit satisfaire à l'inégalité

$$k^2 \geqq 0{,}962$$

et l'on a

$$1 \leqq n \leqq 16.$$

Le mouvement est tortueux; d'après M. Oseen : *il n'est pas exagéré de l'appeler turbulent* (1).

Dans le *second cas particulier*, les lignes de flux sont *fermées*. C'est le cas où l'on a

$$(58)\qquad \left[\frac{E}{K}(e_1-e_3)-e_1\right]b - Ca = 0.$$

On a, outre l'équation (55), la relation

$$(59)\qquad \log r = -\frac{3\pi b}{2na[3E-K(2-k^2)]} \times\left\{\int_0^\sigma \sqrt{1-k^2\sin^2\sigma}\,d\sigma - \frac{E}{K}\int_0^\sigma \frac{d\sigma}{\sqrt{1-k^2\sin^2\sigma}}\right\} + \log r_0.$$

On a $k^2 \leqq 0{,}961$.

Dans le *cas général*, k est seulement assujetti à la condition $0 \leqq k \leqq 1$, n est un entier arbitraire. Les trajectoires sont données par les équations

$$(60)\qquad \begin{aligned}\log r = &-\frac{3(a^2+b^2)}{2\pi ab}nK\int_0^\sigma \sqrt{1-k^2\sin^2\sigma}\,d\sigma \\ &+\frac{\pi b}{2a}\left[1+\frac{a^2+b^2}{\pi^2 b^2}n^2K^2(2-k^2)\right] \\ &\times\frac{1}{nK}\int_0^\sigma \frac{d\sigma}{\sqrt{1-k^2\sin^2\sigma}} + \log r_0,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\theta = &\frac{3(a^2+b^2)}{2\pi b^2}nK\int_0^\sigma \sqrt{1-k^2\sin^2\sigma}\,d\sigma \\ &+\frac{\pi}{2}\left[1-\frac{a^2+b^2}{\pi^2 b^2}n^2K^2(2-k^2)\right]\frac{1}{nK}\int_0^\sigma \frac{d\sigma}{\sqrt{1-k^2\sin^2\sigma}}.\end{aligned}$$

La pression moyenne p est *uniforme* dans le plan indéfini.

(1) *Cf.* la figure 1, de la conférence *Das Turbulenz problem.* [3].

7. Mouvement dont la fonction de Stokes est de la forme ([1]) :

$$\Psi = f(\varphi) + \chi^m f_1(\varphi) \qquad (m > 0). \tag{61}$$

On voit facilement que les seuls mouvements *nouveaux* sont ceux qui correspondent au cas $b = 0$, $m = 1$. On a alors le système de *deux équations différentielles*

$$\left\{ \begin{array}{l} \nu[f_1^{\text{IV}} + 2af_1''' + a^2 f_1''] = f_1' f_1'' - f_1 f_1''' - a f_1 f_1'', \\ \nu[f^{\text{IV}} + 2af''' + a^2 f''] = f_1'' f' - f_1 f''' - a f_1 f''. \end{array} \right. \tag{62}$$

Ces mouvements *ne sont pas univalents dans le plan illimité.* Les trajectoires ont l'équation

$$-\frac{2}{a}(\theta - \theta_0) f_1\left(-\frac{2}{a}\log\frac{r}{r_0}\right) + f\left(-\frac{2}{a}\log\frac{r}{r_0}\right) = \text{const.} \tag{63}$$

On constate facilement que posant $f = \text{const.}$, on a les trajectoires

$$(\theta - \theta_0)\sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_n k_1^n}{(\nu a)^{n-1} n} r^{2n} = \text{const.},$$

où k_1 est arbitraire et les C_n sont donnés par des formules de récurrence. On a $|C_n| \leqq 1$ et les séries convergent pour

$$r^2 \leqq \left|\frac{\nu a}{k_1}\right|$$

et donnent une intégrale particulière de la première équation (62).

8. Mouvements laminaires. — Ce sont les mouvements simples *parallèles à l'axe des x_1* identiques dans les plans $x_3 = \text{const.}$ entre deux plans d'équations $x_2 = 0$, $x_2 = H$, dont le second est animé d'un mouvement parallèle à l'axe des x_1 avec la vitesse U. La fonction Ψ de Stokes étant *fonction de x_2 seul*, on a

$$\Delta\Delta\Psi = 0,$$
$$u_1 = -\Psi_{x_2}, \qquad v_1 = \Psi_{x_1} = 0.$$

Ψ est un polynome du troisième degré en x_2. On a

$$u_1 = \frac{U}{H} x_2 - 3A_0 x_2 (x_2 - H). \tag{64}$$

([1]) ROSENBLATT, [1], [4].

On exprime A_0 par le *gradient de la pression moyenne*

$$A_0 = -\frac{1}{6\mu}\frac{\partial p}{\partial x_1}.$$

Le *débit* par unité de temps et de largeur est

$$\frac{UH}{2} - \frac{H^3}{12\mu}\frac{\partial p}{\partial x}.$$

9. **Mouvements non stationnaires de Boussinesq et de M. H. Villat.** — Boussinesq, *cf.* Villat, envisage le mouvement d'un fluide qui occupe la partie de l'espace située au-dessus du plan $x_1 O x_2$ sur lequel agit une force constante k par unité de masse dans la direction de l'axe des x_1 et qui est *identique* dans les plans parallèles au plan $x_1 O x_3$. On a donc

$$u_1 = u_1(x_3, t), \qquad u_2 = u_3 = 0,$$

et l'équation différentielle est

$$\nu\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_3^2} + k = \frac{\partial u_1}{\partial t}. \tag{65}$$

Les conditions aux limites sont

(*a*) $u_1 = 0$ pour $x_3 = 0$, $t \geqq 0$;

(*b*) $u_1 = 0$ pour $x_3 \geqq 0$, $t = 0$.

Posant

$$u_1 - kt = U,$$

on a l'*équation de la chaleur*

$$\nu\frac{\partial^2 U}{\partial x_3^2} = \frac{\partial U}{\partial t}. \tag{66}$$

La solution satisfaisant aux conditions aux limites est obtenue sous la forme

$$\left\{\begin{aligned} u_1 &= kt\left[1 - \frac{1}{2\alpha}(\zeta^2 + 2)\int_\zeta^\infty \frac{e^{-\frac{s^2}{4}}}{(s^2+2)^2}\,ds\right], \\ \zeta &= x_3\sqrt{\frac{\nu}{t}}, \qquad \alpha = \int_0^\infty \frac{e^{-\frac{s^2}{4}}}{(s^2+2)^2}\,ds. \end{aligned}\right. \tag{67}$$

M. Villat ([1]) envisage la couche du fluide visqueux entre les plans $x_3 = 0$, $x_3 = H$ animés d'un mouvement parallèle à l'axe des x_1 avec les vitesses $\varphi(t)$, $\varphi_1(t)$. On a de plus

$$\Psi(z) = u_1(z, 0)$$

donné, et les conditions sont satisfaites

$$\varphi(0) = \Psi(0), \qquad \varphi_1(0) = \Psi_1(H).$$

On suppose qu'il n'y a pas de forces extérieures.

La fonction $u_1(x_3, t)$ est donnée par la formule

$$(68) \quad 2\sqrt{\pi}\, u_1(x_3, t') = \int_0^{t'} \Phi(\tau') \left.\frac{\partial U_2}{\partial \zeta}\right|_{\zeta=0} d\tau' - \int_0^{t'} \Phi_1(\tau') \left.\frac{\partial U_2}{\partial \zeta}\right|_{\zeta=H} d\tau' + \int_0^H \Psi(\zeta) U_2 |_{\tau'=0}\, d\zeta.$$

Dans cette formule U_2 désigne la fonction

$$U_2(\zeta, \tau', x_3, t') = \frac{1}{\sqrt{t'-\tau'}} \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \left[e^{-\frac{(\zeta - x_3 - 2nH)^2}{4(t'-\tau')}} - e^{-\frac{(\zeta + x_3 + 2nH)^2}{4(t'-\tau')}} \right],$$

$$\Phi(\tau') = \varphi(\nu\tau'), \qquad \Phi_1(\tau') = \varphi_1(\nu\tau')$$

et l'on a

$$t' = \nu t, \qquad \tau' = \nu\tau.$$

U_2 tend vers zéro lorsque τ' tend vers t', ζ étant $\neq x_3$, et U_2 est égal à zéro pour $\zeta = 0$ et pour $\zeta = H$ et $0 < \tau' < t'$.

Pour démontrer que la fonction u_1 satisfait à l'équation

$$\nu \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_3^2} - \frac{\partial u_1}{\partial t} = 0$$

et aux conditions aux limites, on utilisera, d'après M. Villat, les deux théorèmes que l'on trouve démontrés dans le *Cours d'Analyse*, t. III, de M. Goursat :

1° L'intégrale

$$(69) \qquad u(x, y) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_a^b \frac{\varphi(\xi)}{\sqrt{y - H}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4(y-H)}} d\xi,$$

([1]) *Leçons sur l'Hydrodynamique.*

$\varphi(\xi)$ étant continu dans le segment (a, b) tend vers $\varphi(x_0)$ lorsque le point $P(x, y)$ s'approche d'une façon quelconque du point (x_0, H) intérieur à (a, b) en restant *au-dessus* de ce segment $(y > H)$;

2° L'intégrale

$$u(x, y) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_a^y \varphi(\eta) \frac{x - x_0}{(y - \eta)^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{(x-x_0)^2}{4(y-\eta)}} d\eta \tag{70}$$

est égale à $\pm\varphi(Y)$ lorsque le point $P(x, y)$ tend vers un point $P_0(x_0, Y)$ de la droite $x = x_0$, le signe étant $+$ ou $-$ selon que l'on a $x > x_0$ ou $x < x_0$.

10. Tourbillons de M. G. I. Taylor. — M. Taylor [1] remarque que l'équation (32) de la fonction Ψ de Stokes peut évidemment être remplie en posant

$$\Delta\Psi = K\Psi,$$

$$\nu K\Psi = \frac{\partial \Psi}{\partial t},$$

où K est une constante, ce qui donne la solution

$$\Psi = \Psi_1 e^{\nu K t}, \tag{71}$$

où Ψ_1 est solution de l'équation de la *membrane vibrante*

$$\Delta\Psi_1 - K\Psi_1 = 0.$$

M. Taylor envisage en particulier les tourbillons correspondant à la solution

$$\Psi = A \cos\frac{\pi x}{d} \cos\frac{\pi y}{d} e^{-\frac{2\pi^2 \nu t}{d^2}}, \tag{72}$$

dans lequel cas il y a un tourbillon dans chaque carré de côté d.

11. Mouvements dépendant du temps de M. Oseen. — Considérons maintenant les mouvements trouvés dernièrement par M. Oseen [2]. On peut essayer de satisfaire à l'équation (36) du Chapitre I par des fonctions des *trois* arguments

$$y_1 = \varphi, \qquad y_2 = \chi, \qquad y_3 = \log(Qt).$$

En supposant que $a + ib$, qui est en général fonction de $y_1 + iy_2$, est une *constante*, M. Oseen pose

$$(73) \qquad \Psi = f_1(y_3) + y_1 f_2(y_3) + D y_2,$$

et il obtient pour déterminer f_1, f_2 les *deux équations différentielles ordinaires*

$$(74) \qquad f_2^{\text{IV}} + 2f_2''' + f_2'' = \frac{1}{\nu(a^2+b^2)}[e^{-y_3}f_2''' - (Da + bf_2)(f_2''' + f_2'') + bf_2' f_2''],$$

$$(75) \qquad f_1^{\text{IV}} + 2f_1''' + f_1'' + \frac{2a}{a^2+b^2}(2f_2''' + 3f_2'' + f_2')$$
$$= \frac{1}{\nu(a^2+b^2)}\Big\{ e^{-y_3}[(a^2+b^2)f_1''' + 2af_2''] - D(3a^2+b^2)f_2''$$
$$- (a^2+b^2)(Da + bf_2)(f_1''' + f_1'')$$
$$- 2abf_2(f_2'' + f_2') - 2Da^2 f_2' + b(a^2+b^2)f_2' f_2''.$$

L'équation (74) peut être satisfaite en posant $f_2 = A = \text{const.}$ et alors la seconde équation (75) peut être intégrée *complètement* et donne

$$(76) \qquad f_1 = C\int_{c_0}^{z}\frac{d\gamma}{\gamma}\int_{c_1}^{\gamma}\beta^{\lambda-1}e^{-\beta}\,d\beta\int_{c_2}^{\beta}\alpha^{1-\lambda}e^{\alpha}\,d\alpha,$$

C, c_0, c_1, c_2 constantes d'intégration,

$$z = k\,e^{-y_3} = \frac{r^2}{4\nu t^2},$$

$$\lambda = 1 + \frac{Da + Ab}{\nu(a^2+b^2)}, \qquad k = \frac{1}{\nu(a^2+b^2)}.$$

L'équation (74) possède aussi les solutions

$$f_2 = A + By_3, \qquad f_2 = A + \frac{1}{b}e^{-y_3}.$$

On peut aussi satisfaire à l'équation aux dérivées partielles (36) (Chap. I) de M. Hamel par des solutions de la forme

$$(77) \qquad \Psi = e^{k(ay_1 - by_2)}f_1(y_3) + y_1(A + By_3) + Dy_2.$$

On obtient pour f_1 une équation différentielle *linéaire* qui peut être intégrée *complètement* dans le cas $k = -1$.

Malheureusement les solutions obtenues ne donnent pas en général des vitesses *uniformes* dans le plan indéfini. Cependant dans le cas de $b = 0$, $a = -2$, $y_1 = \varphi = \log r$, $y_2 = \chi = \Theta$ les vitesses sont uniformes et les équations (74), (75), et l'équation différentielle linéaire satisfaite par la fonction $f_1(y_3)$ de la formule (77) peuvent être intégrées complètement.

CHAPITRE III.

MOUVEMENTS DANS L'ESPACE.

1. Mouvements symétriques par rapport à un axe et qui ont lieu dans les plans passant par cet axe. — Il s'agit des mouvements étudiés par MM. Caldonazzo [1], [2], Crudeli [1], [2], [3] et Cisotti [1], [2]. Ici encore, comme dans le plan, on peut introduire une *fonction de courant* Ψ. Soient r, z, φ les coordonnées cylindriques, z l'axe de symétrie, r le rayon, alors la condition de l'*incompressibilité* est

$$\frac{\partial}{\partial r}(r v_r) + \frac{\partial}{\partial z}(r v_z) = 0, \tag{1}$$

v_r et v_z étant les composantes de la vitesse v suivant l'axe des z et suivant le rayon. On peut donc poser

$$v_z = \frac{1}{r}\frac{\partial \Psi}{\partial r}, \qquad v_r = -\frac{1}{r}\frac{\partial \Psi}{\partial z}. \tag{2}$$

L'équation vectorielle du mouvement du fluide est

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \nu \Delta \vec{v} + \overrightarrow{\text{grad}}\left(\Phi - \frac{p}{\rho} - \frac{v^2}{2}\right) - \text{rot}\,\vec{v} \wedge \vec{v}. \tag{3}$$

En prenant le *roteur* de cette équation et en posant

$$\text{rot}\,\vec{v} = 2\Omega\vec{N} = \frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial r},$$

où l'on a posé

$$\Omega = -\frac{1}{2r}\left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial r^2} - \frac{1}{r}\frac{\partial \Psi}{\partial r}\right). \tag{4}$$

et où $\vec{z}$, $\vec{r}$, $\vec{N}$ sont trois verseurs dirigés suivant l'axe des z, suivant le rayon r et suivant la normale N qui forme avec z et r un terme de directions orthogonales orientées comme celle des axes de coordonnées, on obtient l'*équation vectorielle*

$$\frac{\partial\, \text{rot}\,\vec{v}}{\partial t} = \nu \Delta\, \text{rot}\,\vec{v} - \text{rot}\left(\text{rot}\,\vec{v} \wedge \vec{v}\right). \tag{5}$$

Or on a

$$\operatorname{rot}\left[\operatorname{rot}\vec{v} \wedge \vec{v}\right] = \left[2rv_z \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\Omega}{r}\right) + 2rv_r \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\Omega}{r}\right)\right]\vec{N},$$

$$\Delta \operatorname{rot}\vec{v} = \left[\Delta''(2\Omega) - \frac{2\Omega}{r^2}\right]\vec{N},$$

où l'on a

$$\Delta'(\Omega) = \frac{\partial^2\Omega}{\partial z^2} + \frac{\partial^2\Omega}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\Omega}{\partial r}. \tag{6}$$

On obtient ainsi l'*équation différentielle* donnant la *fonction de courant* Ψ

$$\frac{\partial\Omega}{\partial t} = \nu\left(\Delta'\Omega - \frac{\Omega}{r^2}\right) + D, \tag{7}$$

où D est le déterminant

$$D = \begin{vmatrix} \Psi_z & \dfrac{\partial\left(\dfrac{\Omega}{r}\right)}{\partial z} \\ \Psi_r & \dfrac{\partial\left(\dfrac{\Omega}{r}\right)}{\partial r} \end{vmatrix}. \tag{8}$$

Les composantes v_r et v_z de la vitesse v sont données par les équations

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial v_r}{\partial t} &= \nu\left(\Delta' v_r - \frac{v_r}{r^2}\right) - 2\Omega v_z + \frac{\partial}{\partial r}\left(\Phi - \frac{p}{\rho} - \frac{v^2}{2}\right), \\ \frac{\partial v_z}{\partial t} &= \nu\,\Delta' v_z + 2\Omega v_r + \frac{\partial}{\partial z}\left(\Phi - \frac{p}{\rho} - \frac{v^2}{2}\right). \end{aligned}\right. \tag{9}$$

L'équation (6) dans le cas du mouvement *lent*, où l'on néglige D $\left(\text{où bien dans le cas où } D = 0, \text{ donc où } \Psi \text{ est fonction de } \frac{\Omega}{r}\right)$, a été donnée par M. Zondadari.

M. Crudeli exprime Ψ par la fonction F définie par la relation

$$\Psi = r\frac{\partial F}{\partial r} \tag{10}$$

en obtenant l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial \Delta' F}{\partial t} = \nu \Delta'' F \tag{11}$$

[Δ'' double opérateur Δ' donné par la formule (6)] dans le cas du *mouvement lent*, et l'équation

$$\frac{1}{r}\frac{\partial^2 F}{\partial r\,\partial z}\frac{\partial \Delta' F}{\partial r}+\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \Delta' F}{\partial r}\right)=\nu\frac{\partial \Delta'' F}{\partial r} \tag{12}$$

dans le cas du *mouvement général*.

Les vitesses suivant les axes x, y, z s'expriment au moyen de la fonction de M. Crudeli par les formules suivantes :

$$\left\{\begin{aligned} v_x &= -\frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial z},\\ v_y &= -\frac{\partial^2 F}{\partial y\,\partial z},\\ v_z &= \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}. \end{aligned}\right. \tag{13}$$

2. Cas particuliers remarquables des mouvements précédents. — Il y a lieu de noter particulièrement deux catégories particulières de mouvements envisagés dans le numéro précédent :

1° *Mouvements radiaux.* — Dans le cas de mouvements *radiaux* passant par l'origine O on pose

$$\Psi = f\left(\frac{z}{r}\right). \tag{14}$$

On voit que l'on doit avoir *séparément*

$$D = 0, \qquad \Delta'\Omega - \frac{\Omega}{r^2} = 0,$$

donc on a $\frac{\Omega}{r} = f(\Psi)$, ce qui entraîne $\Omega = 0$. On trouve

$$f = C\frac{z}{\sqrt{r^2+z^2}}. \tag{15}$$

On a donc le résultat :

Les uniques mouvements radiaux possibles sont les mouvements potentiels à symétrie radiale de potentiel $\varphi = \frac{c}{\sqrt{r^2+z^2}}$.

2° *Mouvements rectilignes de Poiseuille.* — Ce cas classique correspond au cas où l'on a $\frac{\partial^2 F}{\partial r\,\partial z} = 0$ et où le mouvement est stationnaire. Il résulte en effet des formules (13) que l'on a dans ce cas

$$\frac{dr}{dt} = 0, \qquad v_z = f(r), \qquad \Delta'' F = 2\alpha,$$

où α est une constante. Or on a $\Delta' F = v_z$, donc on obtient l'*expression connue* de la vitesse

$$v_z = \alpha r^2 + A \log r + B, \tag{16}$$

$A = 0$ si le mouvement est régulier pour $r = 0$.

On a les *formules classiques* dans le cas d'un *tube circulaire* de diamètre $2r_2$, de longueur l, si p_1, p_2 sont les pressions moyennes aux extrémités du tube

$$v_z = \frac{p_1 - p_2}{4\mu l}(r_2^2 - r^2) \tag{17}$$

et pour le *débit*

$$P = \frac{\pi r_2^4}{8\mu} \frac{p_1 - p_2}{l}. \tag{18}$$

Pour une section *annulaire* de rayons r_1, r_2, $r_1 < r_2$ on trouve (Lamb, *Hydrodynamics*)

$$v_z = \frac{p_1 - p_2}{4\mu l}\left[r_1^2 - r^2 + \frac{r_2^2 - r_1^2}{\log \frac{r_2}{r_1}} \log \frac{r}{r_1}\right], \tag{19}$$

$$P = \frac{\pi}{8\mu} \frac{p_1 - p_2}{l}\left[r_2^4 - r_1^4 - \frac{(r_2^2 - r_1^2)^2}{\log \frac{r_2}{r_1}}\right]. \tag{20}$$

Mouvements de M. Crudeli. — M. Crudeli envisage les mouvements pour lesquels Ω est égal à $-\alpha r$, comme pour les mouvements de Poiseuille *sans que la composante radiale v_r soit nulle.* On a donc l'équation

$$\Delta' F = \alpha r^2 + B. \tag{21}$$

L'équation indéfinie (12) est satisfaite et l'on trouve comme composantes de la vitesse les expressions

$$\left\{\begin{aligned} v_z &= \alpha r^2 + B - \Sigma c_n^2 I_0(c_n r) H_n(z), \\ v_r &= \Sigma c_n I_1(c_n r) \frac{d H_n(z)}{dz}. \end{aligned}\right. \tag{22}$$

Ici I_0 est la fonction de Bessel d'indice 0, I_1 celle d'indice 1 et les c_n sont racines **de l'*équation transcendante***

$$I_1(cr_2) = o.$$

En posant $B = -\alpha r_2^2$, on obtient comme débit

$$\frac{\pi}{2}\alpha r_2^4$$

comme pour les mouvements de Poiseuille, mais la formule (18) n'est qu'*approximative*.

Malheureusement la vitesse v_z ***n'est pas nulle*** à la paroi $r = r_2$.

3. **Mouvements généraux symétriques par rapport à un axe. Rotations visqueuses de M. Cisotti.** — En décomposant la vitesse $\vec{v}$ en deux composantes : $\vec{v}_1$ *dans le plan méridien* et $\vec{v}_2$ *normalement* à ce plan

$$\vec{v}_2 = H\vec{N},$$

où l'on a $H = H(r, z, t)$, on trouve les deux divergences nulles

$$\operatorname{div} \vec{v}_1 = o, \qquad \operatorname{div} \vec{v}_2 = o.$$

On a maintenant les trois équations de mouvement

$$(23)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial v_r}{\partial t} = \nu\left(\Delta' v_r - \dfrac{v_r}{r^2}\right) - 2\Omega v_z + \dfrac{H}{r}\dfrac{\partial(rH)}{\partial r} + \dfrac{\partial}{\partial r}\left(\Phi - \dfrac{p}{\rho} - \dfrac{v^2}{2}\right), \\ \dfrac{\partial v_z}{\partial t} = \nu\,\Delta' v_z + 2\Omega v_r + HH_z + \dfrac{\partial}{\partial z}\left(\Phi - \dfrac{p}{\rho} - \dfrac{v^2}{2}\right), \\ \dfrac{\partial H}{\partial t} = \nu\left(\Delta' H - \dfrac{H}{r^2}\right) + \dfrac{\Delta}{r^2}, \end{cases}$$

où l'on a posé

$$(24)\qquad \Delta = -r\left[v_r\frac{\partial(rH)}{\partial r} + v_z\frac{\partial(rH)}{\partial z}\right] = \begin{vmatrix} \Psi_z & \dfrac{\partial(rH)}{\partial z} \\ \Psi_r & \dfrac{\partial(rH)}{\partial r} \end{vmatrix}.$$

M. Caldonazzo a encore à droite de la troisième équation (23) le terme $\dfrac{c'(t)}{r}$, où $c'(t)$ est une fonction arbitraire de t, ce qui provient de ce qu'il intègre les équations obtenues en prenant le *roteur* de l'équation (3). Toutefois il est facile de voir que cette fonction $c'(t)$ doit être ***identiquement nulle***, à cause du terme HH_z dans la seconde équation (23) et elle ne peut être arbitraire que *dans le cas de* $H_z = 0$.

Le roteur Ω satisfait à l'équation

$$\frac{\partial \Omega}{\partial t} = \nu\left(\Delta'\Omega - \frac{\Omega}{r^2}\right) + D + \frac{H}{r} H_z. \tag{25}$$

Le cas particulier $H = 0$ correspond aux mouvements du n° 1. Le cas où l'on a $\vec{v}_1 = 0$ est celui des *rotations visqueuses* étudiées par M. Cisotti qui dépendent de l'équation

$$\frac{\partial H}{\partial t} = \nu\left[\frac{\partial^2 H}{\partial r^2} + \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{H}{\nu}\right)\right] + \frac{c'(t)}{r}. \tag{26}$$

Plus généralement on a les mouvements étudiés par M. Caldonazzo pour lesquels $\operatorname{rot} v_1 = 0$, donc $\Omega = 0$. H est encore indépendant de z, donc aussi Δ est indépendant de z.

Il y a deux sortes de tels mouvements :

1° Les mouvements *irrotationnaux* pour lesquels H est égal à $\frac{c'(t)}{r}$, le mouvement dans les plans méridionaux étant un mouvement général irrotationnel.

2° Les mouvements pour lesquels Ψ a la forme

$$\Psi = z(ar^2 + b) + a_1 r^2 + b_1,$$

tandis que H est déterminé par l'équation *plus générale* que l'équation (26)

$$\frac{\partial H}{\partial t} = \nu\left[\frac{\partial^2 H}{\partial r^2} + \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{H}{r}\right)\right] + \left(a + \frac{b}{r^2}\right)\frac{\partial (rH)}{\partial r} + \frac{c'(t)}{r}. \tag{27}$$

4. Tensions au sein d'un fluide dont le mouvement est symétrique autour d'un axe. — Envisageons d'abord le mouvement du n° 1. Désignons par s, n les directions de la tangente positive en un point P d'une ligne de flux C et de la normale extérieure en supposant ces directions orientées comme les axes des z et des r. L'application de la formule (18) du Chapitre I donne les composantes T_{nn} *normale* et T_{ns} *tangentielle*

$$\left\{\begin{aligned} T_{nn} &= -p - 2\frac{\mu}{r}\frac{\partial^2 \Psi}{\partial n\, \partial s}, \\ T_{ns} &= 2\mu\Omega + 2\mu\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial \Psi}{\partial n}\right). \end{aligned}\right. \tag{28}$$

Donc, dans *le cas particulier* des mouvements *irrotationnels*, on a

$$T_{ns} = \frac{2\mu}{r}\frac{\partial^2 \Psi}{\partial s^2}, \tag{29}$$

$\frac{\partial \Psi}{\partial s}$ est nul, mais $\frac{2\Psi}{\partial s^2}$ *n'est pas nul en général*, les directions s et n étant *fixes*.

Ces tensions s'expriment élégamment au moyen de l'angle α de la tangente avec l'axe des r :

$$\left\{\begin{aligned} T_{nn} &= -p - 2\mu v \frac{\partial \alpha}{\partial n}, \\ T_{ns} &= -2\Omega\mu - 2\mu v \frac{\partial \alpha}{\partial s}. \end{aligned}\right. \tag{30}$$

La pression moyenne p est donnée par la formule

$$\begin{aligned} \Phi - \frac{p}{\rho} - \frac{v^2}{2} - f(t) \doteq & \int_{z_0}^{z} \left\{ \frac{1}{r}\frac{\partial^2 \Psi}{\partial t\,\partial r} - \nu \Delta'\left(\frac{1}{r}\frac{\partial \Psi}{\partial z}\right) + 2\Omega \frac{1}{r}\frac{\partial \Psi}{\partial z} \right\} dz \\ & + \int_{r_0}^{r} \left\{ -\frac{1}{r}\frac{\partial^2 \Psi}{\partial t\,\partial z} + \nu \Delta'\left(\frac{1}{r}\frac{\partial \Psi}{\partial z}\right) - \frac{1}{r^3}\frac{\partial \Psi}{\partial z} + 2\Omega \frac{1}{r}\frac{\partial \Psi}{\partial r} \right\} dr. \end{aligned} \tag{31}$$

Il s'ensuit, en particulier, que pour les mouvements *irrotationnels*, *la composante tangentielle est proportionnelle au produit de la vitesse et de la courbure de la ligne de flux.* Elle est donc nulle dans le cas et seulement dans le cas où ces lignes de flux sont des *droites*.

Une étude détaillée [Rosenblatt, 3] montre que ces droites forment un des deux *faisceaux* :

1° Droites parallèles à l'axe des z, $\Psi = C_2^r$, *mouvement en bloc ;*

2° Faisceau de sommet O. Mouvement 1° du n° 2, de potentiel

$$\varphi = \frac{C}{\sqrt{r^2 + z^2}}.$$

Passons aux mouvements *généraux* du n° 3. Outre les composantes T_{nn}, T_{ns}, il y a encore la composante T_{nN} dirigée suivant la direction N de la tension T_n agissant sur un élément d'une *surface tubulaire* formée par les lignes de flux passant par un même cercle normal à l'axe de z et de centre sur cet axe. On a, d'après

M. Caldonazzo,

$$T_{nN} = \mu r \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{H}{r}\right). \tag{31}$$

La tension T_N qui agit sur les *plans méridiens* est donnée par la formule

$$T_N = \left(-p + \frac{2\mu}{r^2}\frac{\partial \Psi}{\partial z}\right)\vec{N} + \mu r\, \overrightarrow{\mathrm{grad}}\left(\frac{H}{r}\right). \tag{32}$$

Pour que les tensions T_n soient *normales* aux surfaces tubulaires, il faut et il suffit que l'on ait

$$\Omega + \frac{1}{r}\frac{\partial^2 \Psi}{\partial s^2} = 0, \qquad \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{H}{r}\right) = 0. \tag{33}$$

Ω n'étant pas nul en général, H *n'est pas nécessairement indépendant de z.*

5. **Mouvements hélicoïdaux de M. Caldonazzo.** — Une catégorie intéressante de mouvements sont les mouvements *hélicoïdaux* de M. Caldonazzo pour lesquels on a

$$\mathrm{rot}\, \vec{v} \wedge \vec{v} = 0. \tag{34}$$

On trouve

$$\mathrm{rot}\, \vec{v} = \frac{2\Omega}{H}\vec{v}. \tag{35}$$

rH et $r\Omega$ sont des fonctions de Ψ et de t,

$$rH = G(\Psi, t), \qquad r\Omega = F(\Psi, t) = \frac{1}{2} G \frac{\partial G}{\partial \Psi}.$$

On a maintenant

$$D = -\frac{H}{r} H_z.$$

Les fonctions F et G satisfont aux équations suivantes :

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{\partial F}{\partial t} - \nu[F_{\Psi\Psi}(\Psi_z^2 + \Psi_r^2) - 2FF_{\Psi}] = 0, \\ &\frac{\partial G}{\partial t} - \nu[G_{\Psi\Psi}(\Psi_z^2 + \Psi_r^2) - 2FG_{\Psi}] = 0. \end{aligned}\right. \tag{36}$$

En supposant les fonctions F, G dépendant *seulement de* Ψ, M. Caldonazzo obtient

$$F = \frac{1}{2} a(G + b),$$

a, b constantes, et en supposant $b = 0$, on a

$$\Psi = \Psi_0\, e^{-a^2\nu t}. \tag{37}$$

$$F = \frac{1}{2} a^2 \Psi_0\, e^{-a^2\nu t}, \qquad G = a\Psi_0\, e^{-a^2\nu t}. \tag{38}$$

Ψ_0 satisfait à l'équation aux dérivées partielles du second ordre

$$\frac{\partial^2 \Psi_0}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \Psi_0}{\partial r^2} - \frac{1}{r}\frac{\partial \Psi_0}{\partial r} + a^2\Psi_0 = 0, \tag{39}$$

Dans le cas *particulier* où Ψ_0 est *fonction de r seul*, on trouve les mouvements dont les lignes de flux sont des ***hélices cylindriques***. Ψ_0 est donné par la formule

$$\Psi_0 = r[A\, I_1(ar) + B\, Y_1(ar)], \tag{40}$$

I_1, Y_1 étant les fonctions connues de Bessel. Posant $B = 0$, on a les composantes de vitesse

$$v_1 = Aa\, e^{-a^2\nu t}\, I_0(ar),$$
$$v_2 = Aa\, e^{-a^2\nu t}\, I_1(ar)$$

et le pas des hélices est

$$2\pi r \frac{v_1}{v_2} = 2\pi r \left| \frac{I_0(ar)}{I_1(ar)} \right|. \tag{41}$$

Chaque cylindre coaxial se meut d'un mouvement hélicoïdal comme une surface rigide.

6. Mouvements dans l'espace de M. Oseen. — M. Oseen a réussi de trouver des mouvements stationnaires dans l'espace, qui n'ont pas, en général, de symétrie axiale.

Ce sont les mouvements pour lesquels les composantes v_1, v_2 de la vitesse sont ndépendantes de x_3, tandis que la composante v_3 est *fonction linéaire* de x_3. Les équations différentielles du mouvement ont maintenant la forme où $q^2 = v_1^2 + v_2^2$:

$$\left\{ \begin{aligned} v_2(v_{12} - v_{21}) &= \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\Phi - \frac{p}{\rho} - \frac{1}{2} q^2\right) + \nu\, \Delta v_1, \\ v_1(v_{21} - v_{12}) &= \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\Phi - \frac{p}{\rho} - \frac{1}{2} q^2\right) + \nu\, \Delta v_2, \\ v_1 v_{13} + v_2 v_{32} + v_3 v_{33} &= \frac{\partial}{\partial x_3}\left(\Phi - \frac{p}{\rho}\right) \qquad + \nu\, \Delta v_3. \end{aligned} \right. \tag{42}$$

v_3 est supposé de la forme

$$(43) \qquad v_3 = v_0^3 + x_3 v_3^1,$$

v_3^0, v_3^1 étant fonctions de x_1, x_2, donc la troisième équation (42) devient

$$(44) \qquad \begin{aligned} & v_1(v_{31}^0 + x_3 v_{31}^1) + v_2(v_{32}^0 + x_3 v_{32}^1) + (v_3^0 + x_3 v_3^1) v_3^1 \\ & = \frac{\partial}{\partial x_3}\left(\Phi - \frac{p}{\rho}\right) + \nu(\Delta_1 v_0^3 + x_3 \Delta_1 v_3^1), \end{aligned}$$

$$\Delta_1 = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}.$$

La condition de l'incompressibilité est

$$(45) \qquad \frac{\partial v_1}{\partial x_2} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + v_3^1 = 0.$$

D'après les deux premières équations (42),

$$\frac{\partial}{\partial x_3}\left(\Phi - \frac{p}{\rho}\right)$$

est fonction de $\Phi - \frac{p}{\rho}$ *seul*. On a donc

$$\frac{\partial}{\partial x_3}\left(\Phi - \frac{p}{\rho}\right) = C_0 + C_1 x_3.$$

L'équation (44) se décompose ainsi en deux équations :

$$(46) \qquad \begin{cases} v_1 v_{31}^0 + v_2 v_{32}^0 + v_3^0 v_3^1 = \nu \Delta_1 v_3^0 + C_0, \\ v_1 v_{31}^1 + v_2 v_{32}^1 + v_3^{1\,2} = \nu \Delta_1 v_3^1 + C_1. \end{cases}$$

M. Oseen pose

$$(47) \qquad v_1 = -\Psi_{x_2} + \sigma_{x_1}, \qquad v_3 = \Psi_{x_1} + \sigma_{x_2};$$

on a donc

$$v_3^1 = -\Delta_1 \sigma.$$

L'élimination de la pression des deux premières équations (42) donne l'équation suivante entre les fonctions Ψ et σ :

$$(48) \quad \nu \Delta_1 \Delta_1 \Psi - \frac{D(\Psi, \Delta_1 \Psi)}{D(x_1, x_2)} - \Delta_1 \Psi \Delta_1 \sigma - \sigma_1 (\Delta_1 \Psi)_1 - \sigma_2 (\Delta_1 \Psi)_2 = 0,$$

tandis que les équations (46) donnent les deux équations suivantes :

$$(49)\quad \nu\Delta_1\Delta_1\sigma - \frac{D(\Psi, \Delta_1\sigma)}{D(x_1, x_2)} - \sigma_1(\Delta_1\sigma)_1 - \sigma_2(\Delta_1\sigma)_2 + (\Delta_1\sigma)^2 - C_1 = 0,$$

$$(50)\quad \nu\Delta_1 v_3^0 + \Delta_1\sigma v_3^0 - (-\Psi_2 + \sigma_1)v_{3,1}^0 - (\Psi_1 + \sigma_2)v_{3,2}^0 + C_0 = 0.$$

La pression moyenne p est donnée par les formules

$$(51)\quad \begin{aligned} & d\left(\Phi - \frac{p}{\rho} - \frac{1}{2}q^2\right) \\ & = -\Delta_1\Psi\, d\Psi - \Delta_1\Psi(\sigma_1\, dx_2 - \sigma_2\, dx_1) \\ & \quad + \nu\left(\frac{\partial\Delta_1\Psi}{\partial x_2}dx_1 - \frac{\partial\Delta_1\Psi}{\partial x_1}dx_2\right) - \nu\, d\Delta_1\sigma + (C_0 + C_1 z)\, dz. \end{aligned}$$

M. Oseen introduit les *coordonnées isométriques* φ, χ, en supposant *constante* la fonction

$$a + ib = \frac{\partial \log Q}{\partial\varphi} - i\frac{\partial \log Q}{\partial\chi} \qquad (Q = \sigma_1^2 + \sigma_2^2).$$

En supposant σ et Ψ *fonctions de* φ *seul*

$$(52)\qquad \sigma = f_1(\varphi), \qquad \Psi = f_2(\varphi)$$

et posant $C_0 = C_1 = 0$, il obtient les *deux équations différentielles ordinaires suivantes :*

$$(53)\quad \nu[f_2^{\text{IV}} + 2af_2''' + (a^2 + b^2)f_2''] = f_1'f_2'' + f_1f_2''' + af_1'f_2'' - bf_1'f_2',$$

$$(54)\quad \nu[f_1^{\text{IV}} + 2af_1''' + (a^2 + b^2)f_1''] = -f_2'' + f_1'f_1'' + af_1'f_1'' - bf_1''f_2';$$

ainsi que l'équation aux dérivées partielles donnant v_3^0 :

$$(55)\quad \nu\Delta' v_3^0 + v_3^0\Delta_1'\sigma - v_{3,\varphi}^0(\sigma_\varphi - \Psi_\chi) - v_{3,\chi}^0(\sigma_\chi + \Psi_\varphi) = 0.$$

Il y a lieu de distinguer *deux cas*, selon que v_3^1 est égal à zéro ou non.

Dans le premier cas, on a $f_1 = C\varphi$. En posant

$$(56)\qquad v_3^0 = f_3(\varphi) + K\chi,$$

on obtient pour les f_3 l'équation du second ordre suivante :

$$(57)\qquad \nu\left(f_3'' - \frac{C}{\nu}f_3'\right) = Kf_2'.$$

Le mouvement dans le plan x_1x_2 est celui étudié par M. Oseen

(Chap. II, 6), dont la fonction de Stokes est

$$f_2(\varphi) - K\chi.$$

Dans le second cas, M. Oseen pose

$$v_3^0 = f_3(\varphi),$$

$f_3(\varphi)$ est déterminé par l'équation différentielle du second ordre

$$\nu f_3'' = f_1' f_3' - f_1'' f_3. \tag{58}$$

A signaler le cas particulier

$$f_3 = C\varphi$$

dans lequel l'équation (53) est identiquement satisfaite, et l'équation (54) du quatrième ordre détermine f_1. A une solution de cette équation régulière entre deux valeurs $\varphi^{(1)}$, $\varphi^{(2)}$ de φ, et dont les deux dérivées $f_1'(\varphi)$, $f_1''(\varphi)$ s'annulent pour ces valeurs, correspond un mouvement possible, la vitesse s'annulant *aux parois* $\varphi = \varphi^{(1)}$, $\varphi = \varphi^{(2)}$, en posant $C = 0$, $v_3^0 = 0$.

CHAPITRE IV.

MOUVEMENTS VOISINS DES MOUVEMENTS ENVISAGÉS PRÉCÉDEMMENT. STABILITÉ DES MOUVEMENTS ÉTUDIÉS.

La question de la stabilité des mouvements simples des fluides visqueux, en particulier, des mouvements *laminaires*, *circulaires*, et de Poiseuille a fait l'objet d'un grand nombre de recherches, qui, comme nous l'avons remarqué, envisagent presque toutes des perturbations *infiniment petites*. Il paraît, en effet, que l'étude des perturbations *finies* ait été seulement ébauchée par M. F. Nœther.

I. — MOUVEMENTS VOISINS DES MOUVEMENTS RADIAUX.

1. **Équations du problème.** — Retournons à l'équation (38) du Chapitre II donnant la fonction de Stokes en coordonnées polaires r, φ.

On peut se proposer d'intégrer cette équation par une *série* de la forme

$$(1)\qquad \Psi = f(\theta) + \sum_{k=1} \varepsilon^k \rho_k(r, \theta, t).$$

En annulant les coefficients des puissances de ε, on obtient la suite infinie d'équations aux dérivées partielles

$$(2)\qquad \begin{cases} \nu(f^{\text{IV}} + 4f'') - 2f'f'' = 0, \\ \nu\,\Delta\,\Delta\rho_k - \dfrac{f'''}{r^3}\dfrac{\partial\rho_k}{\partial r} - \dfrac{2f''}{r^4}\dfrac{\partial\rho_k}{\partial r} + \dfrac{f'}{r}\dfrac{\partial\,\Delta\rho_k}{\partial r}. \\ \quad = \dfrac{1}{r}\displaystyle\sum_{l=1}^{k-1}\dfrac{\partial\rho_l}{\partial r}\dfrac{\partial\,\Delta\rho_{k-l}}{\partial\theta} - \dfrac{1}{r}\sum_{l=1}^{k-1}\dfrac{\partial\rho_l}{\partial\theta}\dfrac{\partial\,\Delta\rho_{k-l}}{\partial r} + \dfrac{\partial\,\Delta\rho_k}{\partial t} \qquad (k = 1, 2, \ldots). \end{cases}$$

La pression moyenne est donnée par la relation

$$(3)\qquad \begin{aligned} dp = &-\frac{\rho}{2}\,dv^2 + \rho\,d\Phi + \rho\,\Delta\Psi\,d\Psi \\ &- \mu\left(\Delta\Psi_\theta\frac{dr}{r} - r\,\Delta\Psi_r\,d\theta\right) + \rho\,\Psi_{\theta,t}\frac{dr}{r} - \rho\,\Psi_{r,t}\,r\,d\theta \end{aligned}$$

et la condition de l'*univocité de la pression* est

$$(4)\qquad \int_0^{2\pi}\frac{\partial p}{\partial\theta}\,d\theta = 0.$$

Cette condition se décompose donc en la suite infinie de conditions

$$(5)\qquad \int_0^{2\pi}\left\{\frac{f''}{r^2}\frac{\partial\rho_k}{\partial\theta} + f'\,\Delta\rho_k + \nu\,r\frac{\partial\,\Delta\rho_k}{\partial r} + \sum_{l=1}^{k-1}\Delta\rho_l\frac{\partial\rho_{k-l}}{\partial\theta} - \frac{\partial^2\rho_k}{\partial r\,\partial t}\right\}d\theta = 0$$
$$(k = 1, 2, \ldots).$$

Le problème des mouvements voisins des mouvements radiaux a été étudié par M. Hamel dans le cas des mouvements *infiniment petits*.

Rappelons encore que la fonction $u = f'$ est donnée (Chap. II, n° 3, II) par la formule

$$(6)\qquad \theta = \sqrt{\frac{3\nu}{2}}\int_{e_3}\frac{du}{\sqrt{(u-e_1)(u-e_2)(u-e_3)}}$$

que les e_i sont *toutes réelles* et que la condition de l'univocité du mouvement est

$$(7)\qquad \frac{\pi}{n}\sqrt{\frac{2}{3\nu}} = \int_{e_3}^{e_2} \frac{du}{\sqrt{(u-e_1)(u-e_2)(u-e_3)}} = \frac{\theta_1}{\sqrt{6\nu}},$$

où u est entier > 0.

On peut développer u suivant les cosinus des multiples de $n\Theta$:

$$(8)\qquad u = b_0 + 2\sum_{s=1}^{\infty} b_{ns}\cos\Theta ns.$$

On sait (*cf.* Halphen, *Fonctions elliptiques*) qu'on a les formules

$$(9)\qquad b_0 = 2\nu - \frac{n\eta_1\sqrt{6\nu}}{\pi}, \qquad b_{ns} = -(n\pi\sqrt{6\nu})^2\frac{sq^s}{1-q^{2s}} \qquad (s = 1, 2, \ldots),$$

où η_1, q sont donnés par les formules

$$\eta_1 = (2\nu - e_2)\frac{\pi}{n\sqrt{6\nu}} + 2\pi^2\sum_{1}^{\infty}\frac{q^{2p-1}}{(1+q^{2p-1})^2},$$

$$q = e^{i\pi\frac{\theta_2}{\theta_1}} = \frac{1}{16}k^2 + \frac{1}{32}k^4 + \frac{21}{1024}k^6 + \frac{31}{2048}k^8 + \ldots,$$

$$k^2 = \frac{e_2 - e_3}{e_1 - e_3},$$

$$\theta_2 = \sqrt{6\nu}\int_{e_2}^{e_1}\frac{du}{\sqrt{(u-e_1)(u-e_2)(u-e_3)}}.$$

2. Réduction du problème à des systèmes infinis d'équations différentielles ordinaires. — En nous bornant au mouvement *stationnaire*, posons

$$(10)\qquad \rho_k = \sum_{h=0}^{k} r^{h\bar\lambda + (k-h)\lambda}\,\omega_{k-h,h}(\varphi),$$

λ, $\bar\lambda$ sont des nombres *conjugués complexes* à déterminer. En cas de $\lambda = \bar\lambda$ *réel*, nous pourrons poser

$$(11)\qquad \rho_k = r^{k\lambda}\,\omega_k(\varphi).$$

Les fonctions $\omega_{k-h,h}(\varphi)$, $\omega_{h,k-h}(\varphi)$ doivent être *conjuguées complexes*. On obtient, en remplaçant dans les équations (2), les ρ_k par les expressions (10) le système suivant d'*équations différentielles* *ordinaires :*

$$(11)\quad \begin{aligned} &\nu\left\{\omega^{\mathrm{IV}}_{k-h,h}+\omega''_{k-h,h}\left[p^2_{k-h,h}+(p_{k-h,h}-2)^2\right]+\omega_{k-h,h}p^2_{k-h,h}(p_{k-h,h}-2)^2\right\}\\ &\quad -u''p_{k-h,h}\omega_{k-h,h}-2u'\omega'_{k-h,h}\\ &\quad +u(p_{k-h,h}-2)\left[\omega''_{k-h,h}+p^2_{k-h,h}\omega_{k-h,h}\right]\\ &=\sum_{\substack{l+m=k\\ l,m=1\ldots k-1}}\left\{\sum_{\substack{h'+h''=h\\ h'=0\ldots l\\ h''=0\ldots m}} p_{l-h',h'}\omega_{l-h',h'}\left[p^2_{m-h'',h''}\omega'_{m-h'',h''}+\omega'''_{m-h'',h''}\right]\right.\\ &\qquad\left.-\sum_{\substack{h'+h''=h\\ h'=0\ldots l\\ h''=0\ldots m}}\omega'_{l-h',h'}(p_{m-h'',h''}-2)\left[p^2_{m-h'',h''}\omega_{m-h'',h''}+\omega''_{m-h'',h''}\right]\right\}\\ &\left[k=1,2,\ldots;\ h=0,1,\ldots,k;\ p_{k-h,h}=h\bar\lambda+(k-h)\lambda,\ \ldots\right]. \end{aligned}$$

On prouve facilement que les conditions (5) qui assurent l'*univocité de la pression* sont satisfaites pourvu qu'aucune des relations suivantes

$$(12)\qquad h\lambda+(k-h)\lambda-2=0\qquad (k=1,2,\ldots)$$

n'ait lieu.

Nous poserons maintenant

$$(13)\qquad \omega_{k-h,h}=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}a_n^{k-h,h}e^{in\varphi}.$$

Les coefficients $a_n^{k-h,h}$ sont obtenus au moyen des *systèmes linéaires d'équations linéaires en nombre infini*. Les $a_n^{1,0}$, $a_n^{0,1}$ sont donnés par les deux systèmes d'équations

$$(14)\quad \begin{aligned} &a_n^{1,0}\left\{n^4-\left[\lambda^2+(\lambda-2)^2\right]n^2+\lambda^2(\lambda-2)^2\right\}\\ &\quad+\sum_{s=-\infty}^{+\infty}a_s^{1,0}b_{n-s}\left[(n-s)^2\frac{\lambda}{\nu}+\frac{2}{\nu}(n-s)s+\frac{2-\lambda}{\nu}(s^2-\lambda^2)\right]=0\\ &\qquad\qquad (n=-\infty\ldots+\infty), \end{aligned}$$

et par le système qu'on obtient en remplaçant λ par $\bar\lambda$ dans le système (14).

Les $a_n^{k-h,h}$ pour $k>1$ sont obtenus par des systèmes analogues qui ne diffèrent du système (14) que parce que λ y est remplacé par $p_{k-h,h}$ et où figurent à droite des équations des nombres $c_n^{k-h,h}$ connus.

Nous avons donc à résoudre des *systèmes d'équations linéaires en nombre infini*. Divisons ces équations par n^4 pour $n \neq 0$. On obtient alors des systèmes *normaux* au sens de Poincaré. Les déterminants

$$\mathrm{D}\left(h\bar{\lambda}+(k-h)\lambda\right) \tag{15}$$

de ces systèmes sont des *fonctions entières* de l'argument à coefficients *réels*, car les séries

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |b_n| n^l \qquad (l=1, 2, \ldots)$$

convergent.

On obtient ainsi pour $\rho_1, \rho_2, \ldots$ des solutions qu'on peut supposer *réelles* et *toutes de même parité* si ρ_1 est impair ou *alternativement paires et impaires* si ρ_1 est pair.

3. Convergence des séries obtenues. — On démontre aisément la convergence des séries obtenues dans le *cas particulier*

$$u = u_0 = b_0 = \text{const.}, \tag{16}$$

c'est-à-dire dans le cas d'une radiation symétrique *autour de l'origine*. Dans ce cas, les racines λ_0 de l'équation caractéristique

$$\mathrm{D}(\lambda) = 0 \tag{17}$$

sont *réelles* et égales à

$$\lambda_0 = \pm n_0, \tag{18}$$

n_0 entier ou

$$\lambda_0 = 2 - \frac{b_0}{2\nu} \pm \sqrt{n_0^2 + \frac{b_0^2}{4\nu}}. \tag{19}$$

Aux racines (18) correspond des *solutions harmoniques*. Toutes les racines sont doubles excepté $\lambda_0 = 2$ et $\lambda_0 = 2 - \frac{b_0}{\nu}$.

Il faut maintenant qu'aucune des équations

$$\mathrm{D}\left(h\bar{\lambda}_0 + (k-h)\lambda_0\right) = 0 \tag{20}$$

ne soit satisfaite. Dans le cas actuel, il faut qu'aucune des équations

$$(21)\quad n^2 - k^2\left[2 - \frac{b_0}{2\nu} \pm \sqrt{n_0^2 + \frac{b_0^2}{4\nu^2}}\right]^2 = 0,$$

$$(22)\quad n^2 - \left\{k\left[2 - \frac{b_0}{2\nu} \pm \sqrt{n_0^2 + \frac{b_0^2}{4\nu^2}}\right] - 2\right\}^2 - \frac{b_0}{\nu}\left\{k\left[2 - \frac{b_0}{2\nu} \pm \sqrt{n_0^2 + \frac{b_0^2}{4\nu^2}}\right] - 2\right\} = 0$$

ne soit satisfaite, n étant $-n_0 k, \ldots, +n_0 k$.

Ces équations ne sont satisfaites que par des *valeurs particulières* de b_0.

Dans le cas du signe $+$ dans (19),

$$(23)\quad \lambda_0 = 2 - \frac{b_0}{2\nu} + \sqrt{n_0^2 + \frac{b_0^2}{4\nu}} \qquad (\lambda_0 > 0),$$

la série donnant Ψ *converge absolument* pour

$$(24)\quad b_0 < 4\nu,$$

donc dans le cas de l'*efflux* ou de l'*influx* avec

$$|\rho| < \frac{4\nu}{r}.$$

La convergence a lieu *à l'intérieur* d'un cercle K de rayon *arbitrairement grand* pour $\varepsilon > 0$ suffisamment petit, à l'*exception de l'origine*.

Dans le cas du signe $-$

$$(25)\quad \lambda_0 = 2 - \frac{b_0}{2\nu} - \sqrt{n_0^2 + \frac{b_0^2}{4\nu}} \qquad (\lambda_0 < 0)$$

et de l'inégalité

$$(26)\quad b_0 > 4\nu,$$

c'est-à-dire dans le cas de l'*influx* avec

$$|\rho| > \frac{4\nu}{r},$$

la convergence absolue à lieu *en dehors* d'un cercle k de rayon *arbitrairement petit* pour $\varepsilon > 0$ suffisamment petit.

4. Introduction de *u* comme variable indépendante. — M. Hamel introduit u comme variable indépendante dans l'équation donnant la perturbation ω_1 supposée infiniment petite. En général, l'équation donnant ω_k en variable indépendante u est

$$R_6\omega_k^{\mathrm{IV}} + R_5\omega_k''' + R_4\omega_k'' + R_3\omega_k' + R_2\omega_k = F_k, \tag{27}$$

et les coefficients ont les valeurs

$$\left\{\begin{aligned}
R_6 &= \frac{4}{9\nu^2}(u-e_1)^2(u-e_2)^2(u-e_3)^2,\\
R_5 &= \frac{4}{\nu}\left(\frac{u^2}{\nu}-4u+C\right)(u-e_1)(u-e_2)(u-e_3),\\
R_4 &= \frac{2}{3\nu}(u-e_1)(u-e_2)(u-e_3)\left[\frac{u}{\nu}(6+k\lambda)+2k^2\lambda^2-4k\lambda-12\right]\\
&\quad+3\left(\frac{u^2}{\nu}-4u+C\right)^2,\\
R_3 &= \left(\frac{u^2}{\nu}-4u+C\right)\left(u\frac{k\lambda}{\nu}+2k^2\lambda^2-4k\lambda\right),\\
R_2 &= k\lambda\left[-\frac{u^2}{\nu}+\frac{u}{\nu}k\lambda(k\lambda-2)+\frac{4u}{\nu}+k\lambda(k\lambda-2)^2+\frac{C}{\nu}\right].
\end{aligned}\right. \tag{28}$$

Cette équation appartient donc à la *classe de Fuchs*. L'équation déterminante a les racines

$$\rho_1 = 0, \qquad \rho_2 = 1, \qquad \rho_3 = \frac{1}{2}, \qquad \rho_4 = \frac{3}{2}$$

et l'équation homogène admet les développements

$$\omega_k = P_1(u-e_i) + \sqrt{u-e_i}\,P_2(u-e_i). \tag{29}$$

M. Hamel trouve les *solutions particulières* suivantes de l'équation (27) pour $m = 1$:

1° $$\omega = u, \qquad \lambda = 2,$$

solution qui ne satisfait pas à la condition de l'univocité de la pression;

2° $$\omega = \sqrt{u}, \qquad \lambda = -1, \qquad e_3 = 0$$

et

$$\omega = \sqrt{-u}, \qquad \lambda = -1, \qquad e_2 = 0;$$

3° $$\omega = u - 3\nu, \qquad \lambda = 1;$$

4° $$\omega = \sqrt{(u-e_3)(e_1-u)}, \qquad \lambda = 1, \qquad e_2 = 0,$$

et

$$\omega = \sqrt{(u-e_1)(u-e_2)}, \qquad \lambda = 1, \qquad e_3 = 0.$$

5. Solutions dépendant du temps. — En envisageant les perturbations infiniment petites du mouvement symétrique $u = b_0$, M. Hamel pose

$$\Delta\rho_1 = e^{\lambda t + in\Theta}\,\omega_1(r). \tag{30}$$

La fonction $\omega_1(r)$ de r satisfait à l'équation différentielle

$$\omega_1'' + \frac{\omega_1'}{r}\left(\frac{b_0}{\nu}+1\right) + \omega_1\left(-\frac{n^2}{r^2} - \frac{\lambda}{\nu}\right) = 0 \tag{31}$$

qui s'intègre par les fonctions

$$\omega_1 = r^{-\frac{b_0}{2\nu}}\, \mathrm{I}_{\pm\sqrt{n^2+\frac{b_0^2}{4\nu^2}}}\left(r\sqrt{-\frac{\lambda}{\nu}}\right). \tag{32}$$

étant les fonctions de Bessel d'ordre $\pm\sqrt{n^2+\frac{b_0^2}{4\nu^2}}$.

II. — MOUVEMENTS VOISINS DES MOUVEMENTS LAMINAIRES.

1. Équations différentielles du problème. — Nous envisagerons, comme au n° 8 du Chapitre II, un mouvement plan du fluide parallèle à l'axe des x en supposant que les parois aient les équations $y = \mp H$, et soient animés des vitesses $\mp U$ parallèlement à l'axe des x. La fonction Ψ_0 de Stokes est maintenant

$$\Psi_0 = -\frac{U}{H}\frac{y^2}{2} + K\left(H^2 y - \frac{y^3}{3}\right), \tag{33}$$

où K est donné en fonction du gradient de la pression moyenne

$$K = \frac{1}{2\mu}\frac{\partial p_0}{\partial x}. \tag{34}$$

Posons

$$\Psi = \Psi_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k \Psi_k(x, y, t), \tag{35}$$

on a, pour déterminer les Ψ_k, la suite infinie d'équations différentielles

$$(36)\qquad \begin{aligned} &\nu\,\Delta\Delta\Psi_k + 2\mathrm{K}\Psi_{kx} - \left[\frac{\mathrm{U}}{\mathrm{H}}y + \mathrm{K}(y^2 - \mathrm{H}^2)\right]\Delta\Psi_{kx} - \frac{\partial\,\Delta\Psi_k}{\partial t} \\ &\quad = \sum_{\substack{l+m=k\\ l,m=1,\ldots,k-1}} \Psi_{lx}\,\Delta\Psi_{my} - \Psi_{ly}\,\Delta\Psi_{mx}. \end{aligned}$$

Pour obtenir des solutions *réelles*, il faut poser en général

$$(37)\qquad \Psi_k = \sum_{h=0}^{k} e^{-\left\{[h\bar{\lambda}+(k-h)\lambda]^2 x + [h\bar{\mu}+(k-h)\mu]t\right\}} f_{k-h,h}(y) \qquad (k = 1, 2, \ldots),$$

les λ, $\bar{\lambda}$; μ, $\bar{\mu}$; $f_{k-h,h}$, $f_{h,k-h}$ étant *conjugués complexes*.

Posant

$$(38)\qquad \begin{cases} \varphi_{k-h,h} = f''_{k-h,h} + p^2_{k-h,h} f_{k-h,h}, \\ p_{k-h,h} = h\bar{\lambda} + (k-h)\lambda, \\ q_{k-h,h} = h\bar{\mu} + (k-h)\mu, \end{cases}$$

on a la suite infinie d'équations différentielles ordinaires

$$(39)\qquad \begin{aligned} &\nu\left\{\varphi''_{k-h,h} + \varphi_{k-h,h}\left[p^2_{k-h,h} + \frac{1}{\nu}p_{k-h,h}\left(\frac{\mathrm{U}}{\mathrm{H}}y + \mathrm{K}(y^2 - \mathrm{H}^2)\right) + \frac{1}{\nu}q_{k-h,h}\right]\right\} \\ &\quad - 2\mathrm{K}p_{k-h,h}f_{k-h,h} = \nu\,\mathrm{F}_{k-h,h}, \end{aligned}$$

où $\mathrm{F}_{k-h,h}$ dépend des φ et f d'indices, $1, \ldots, k-1$:

$$(40)\qquad \nu\mathrm{F}_{k-h,h} = \sum_{\substack{l+m=k\\ l,m=1,\ldots,k-1}} -p_{l-h',h'}f_{l-h',h'}\varphi'_{m-h'',h''} + p_{m-h'',h''}f'_{l-h',h'}\varphi_{m-h'',h'}.$$

2. Convergence des développements obtenus dans un cas particulier. — Nous nous bornerons dans l'étude *exacte* du problème au cas de $\mathrm{K} = 0$, la vitesse fondamentale $u_1 = -\Psi_{0y}$ étant *fonction linéaire de y*

$$u_1 = \frac{\mathrm{U}}{\mathrm{H}}y,$$

et même au cas plus particulier encore, où l'on a

$$\mathrm{U} = 0,$$

donc où le fluide perturbé est initialement *en repos*.

Nous envisagerons des perturbations *qui s'annulent à l'infini* ($x = +\infty$), et qui *s'annulent pour $t \to +\infty$*; donc nous supposerons

λ, μ *réels*. Dans ce cas, on peut remplacer l'expression (37) par l'expression

$$\Psi_k = e^{-k(\lambda x + \mu t)} f_k(y). \tag{41}$$

Les conditions aux limites étant

$$f_k(\mathrm{H}) = f_k(-\mathrm{H}) = f_k'(\mathrm{H}) = f_k'(-\mathrm{H}) = 0,$$

λ, μ doivent satisfaire à une (au moins) des deux équations

$$\frac{\sin\left(\lambda - \sqrt{\lambda^2 + \frac{\mu}{\nu}}\right)\mathrm{H}}{\lambda - \sqrt{\lambda^2 + \frac{\mu}{\nu}}} \mp \frac{\sin\left(\lambda + \sqrt{\lambda^2 + \frac{\mu}{\nu}}\right)\mathrm{H}}{\lambda + \sqrt{\lambda^2 + \frac{\mu}{\nu}}} = 0. \tag{42}$$

On peut montrer [Rosenblatt, 5] qu'à tout nombre $\lambda > 0$, à *l'exception d'un nombre dénombrable de valeurs*, qui n'ont pas de point d'accumulation fini, il correspond *au moins un nombre* $\mu > 0$ tel que les fonctions $\varphi_k(y)$

$$f_k(y) = f_k''(y) + k^2\lambda^2 f_k(y) \tag{43}$$

qui correspondent à ces nombres soient données par les relations récurrentes

$$\varphi_k(y) = \frac{1}{\nu}\left\{ \sum_{\substack{l, m = 1 \ldots k-1 \\ l+m=k}} \int_0^y \int_u^{\mathrm{H}} \mathrm{G}_k(y, u, \zeta)\, \varphi_l(\zeta)\, \varphi_m(u)\, du\, d\zeta \right.$$
$$\left. + \sin r_k y \int_0^{\mathrm{H}} \int_u^{\mathrm{H}} \mathrm{H}_k(u, \zeta) \quad \varphi_l(\zeta)\, \varphi_m(u)\, du\, d\zeta \right\}, \tag{44}$$

où l'on a

$$r_k = \sqrt{k^2\lambda^2 + \frac{k\mu}{\nu}} - k\lambda,$$

et les fonctions G, H sont *continues*.

Si λ, μ satisfont à l'équation (42) avec le signe — les $\varphi_k(y)$ sont tous *impairs*. Ils sont *alternativement pairs et impairs*, φ_1 *pair*, *si* l'on a le signe $+$.

Pour démontrer la convergence de la série

$$s = \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k e^{-k(ax + \mu t)} \varphi_k(y), \tag{45}$$

nous envisageons en suivant un raisonnement de M. Odqvist la série *majorante*

$$S = \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k \Phi_k E^k, \tag{46}$$

où les nombres Φ_k positifs majorent les fonctions $\varphi_k(y)$ et sont donnés par les relations récurrentes

$$\Phi_k = N(\Phi_1 \Phi_{k-1} + \ldots + \Phi_{k-1}\Phi_1), \tag{47}$$

N étant un nombre positif convenablement choisi, $E = e^{-(\lambda x + \mu t)}$. On voit de suite que S satisfait à l'équation du second degré

$$NS^2 - S + \varepsilon E \Phi_1 = 0, \tag{48}$$

dont la racine *holomorphe* pour $\varepsilon = 0$ et s'annulant est donnée par le développement

$$S = \frac{1}{2N} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} (4N\Phi_1 E)^k \binom{\frac{1}{2}}{k} \varepsilon^k. \tag{49}$$

En introduisant *le nombre de Reynolds* qui correspond à la vitesse u_1 de la perturbation

$$u_1 = -\frac{\partial \Psi_1}{\partial y},$$

lorsque φ_1 *impair* a la forme

$$\varphi_1 = A_1 \sin r_1 y \qquad (A_1 > 0),$$
$$|u_1| \leqq A_1 H, \qquad U_1 = A_1 H,$$

que nous désignerons par R_1,

$$R_1 = \frac{4 A_1 H^2}{\nu}, \tag{50}$$

on voit que la série *s converge absolument et uniformément* avec ses dérivées pour $\varepsilon < \rho$,

$$\rho = \frac{1}{L R_1 E}, \tag{51}$$

L étant un nombre *pur* fixe.

Il en est de même pour la série donnant Ψ, $f_k(y)$ s'exprimant par $\varphi_k(y)$ par la formule

$$f_k(y) = -\frac{1}{k\lambda} \int_y^H \sin k\lambda(y-u)\, \varphi_k(u)\, du. \tag{52}$$

L'existence exacte des perturbations qui s'annulent exponentiellement à l'infini et tendent vers zéro lorsque le temps augmente indéfiniment est ainsi démontrée. La recherche des perturbations du mouvement fondamental *non nul* ($u \neq 0$) peut être faite en suivant le même raisonnement.

3. Perturbations périodiques. Recherches de Sommerfeld. — L'étude des perturbations *périodiques*, des petites oscillations, dans lequel cas λ, μ, sont *complexes*, est bien plus difficile, car dans l'étude exacte il faut partir des formules (37) pour les Ψ_k. Aussi les auteurs se bornent-ils aux oscillations *infiniment petites* en négligeant les membres d'ordre supérieur des développements.

Revenons aux suppositions du n° 8 (Chap. II) en écrivant toutefois x, y au lieu de x_1, x_2. Introduisons *les grandeurs sans dimension* de M. Sommerfeld

$$\xi = \frac{x}{H}, \qquad \eta = \frac{y}{H}, \qquad \tau = \frac{U}{H} t$$

et envisageons la perturbation

$$\Psi'_1 = e^{i(\beta\tau - \alpha\xi)} f(\eta), \tag{53}$$

α, β *complexes*. — Introduisons le *nombre de Reynolds* correspondant à la vitesse U,

$$R = \frac{UH}{V}.$$

Nous obtenons, comme au n° 1, les deux équations linéaires du second ordre déterminant les fonctions $f(\eta)$, $\varphi(\eta)$:

$$f''(\eta) - \alpha^2 f(\eta) = \varphi(\eta), \tag{54}$$

$$\varphi''(\eta) - \varphi(\eta)[\alpha^2 + i R(\beta - \alpha\eta)] = 0. \tag{55}$$

M. Sommerfeld remplace la variable η par la variable indépendante *complexe* z

$$z = \frac{\alpha^2 + iR(\beta - \alpha\eta)}{(\alpha R)^{\frac{2}{3}}}, \tag{56}$$

ce qui donne les équations avec z comme variable indépendante

$$f'' + k^2 f = -\frac{k^2}{\alpha^2}\varphi, \tag{57}$$

$$\varphi'' + z\varphi = 0, \tag{58}$$

où k est donné par la relation

$$k^3 = \frac{\alpha^2}{R}.$$

L'intégrale générale de (58) est

$$\varphi = A\sqrt{z}\, I_{-\frac{1}{3}}\left(\frac{2}{3} z^{\frac{3}{2}}\right) + B\sqrt{z}\, I_{\frac{1}{3}}\left(\frac{2}{3} z^{\frac{3}{2}}\right), \tag{59}$$

I étant les fonctions de Bessel d'indices $-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}$;

$$\left\{\begin{aligned} I_{-\frac{1}{3}} &= \left(\frac{1}{3}\right)^{-\frac{1}{3}} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{3k}}{k!\,\Gamma\left(k+\frac{2}{3}\right)} \frac{1}{\sqrt{z}}, \\ I_{\frac{1}{3}} &= \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{3}} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{3k}}{k!\,\Gamma\left(k+\frac{4}{3}\right)} \sqrt{z}. \end{aligned}\right. \tag{60}$$

Désignons par z_0, z_1 les valeurs de z pour $\eta = 0$, $\eta = 1$,

$$z_0 = k^2 + \frac{i\beta}{k}, \qquad z_1 = k^2 + \frac{i(\beta - \alpha)}{k}, \tag{61}$$

l'intégrale de l'équation (57) s'annulant avec sa dérivée pour $\eta = 0$ $(z = z_0)$ est

$$f(z) = -\frac{k}{\alpha^2} \int_{z_0}^{z} \varphi(z) \sin k(z - z')\, dz'. \tag{62}$$

Les conditions

$$f(z_1) = 0, \qquad f'(z_1) = 0$$

donnent, après élimination de A, B, une équation *transcendante entière* en z, dont les racines donnent les valeurs de β qui correspondent aux « oscillations propres » du fluide.

M. Nœther (*cf.* le commencement de ce chapitre) s'est déjà en 1913 aperçu de la nécessité de traiter l'équation non linéaire *exactement*. Il envisage des perturbations périodiques en x et en t en posant

$$\begin{aligned} \Psi(x, y, t) = &\sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k(y) \cos k(\alpha x - \beta t) \\ &+ \sum_{k=0}^{\infty} \Psi_k(y) \sin k(\alpha x - \beta t) \end{aligned} \tag{63}$$

en parvenant à un système d'équations *non linéaires en nombre infini* avec les inconnues $\varphi_k(y)$, $\Psi_k(y)$ dont l'étude semble d'une difficulté considérable.

III. — MOUVEMENTS VOISINS DES MOUVEMENTS CIRCULAIRES DE COUETTE.

1. Recherches de M. G. J. Taylor. — M. Taylor [2] étudie les *perturbations infiniment petites spatiales* des mouvements circulaires de Couette (*cf.* Chap. II, 2, *a*). En désignant par ω_1, ω_2 les *vitesses angulaires* des cylindres de rayons r_1, r_2, $r_1 < r_2$ et en désignant par μ le rapport $\frac{\omega_2}{\omega_1}$, on a

$$(64) \qquad v_\theta = \frac{\alpha}{r} + \beta r, \qquad \alpha = \frac{r_1^2 \omega_1 (1-\mu)}{1 - \frac{r_1^2}{r_2^2}}, \qquad \beta = \frac{\omega_1 \left(1 - \frac{r_2^2 \mu}{r_1^2}\right)}{1 - \frac{r_2^2}{r_1^2}}.$$

Supposant les perturbations *symétriques* par rapport à l'axe des z, on a les équations (23) du Chapitre III, n° **3**. En désignant par u, v, w les perturbations suivant les directions r radiale, N tangentielle et z axiale, u, v, w étant des fonctions de r, z, t, on trouve les équations différentielles

$$(65) \quad \left\{ \begin{aligned} &\nu\left(\Delta' u - \frac{u}{r^2}\right) + \left\{\frac{v + v_\theta}{r} \frac{\partial[r(v+v_\theta)]}{\partial r} - 2\Omega\omega\right\} \\ &\qquad - \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial r}[u^2 + (v+v_\theta)^2 + \omega^2] = \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r}, \\ &\nu\,\Delta'\omega - \frac{\partial \omega}{\partial t} + 2\Omega u + (v+v_\theta)\frac{\partial(v+v_\theta)}{\partial z} \\ &\qquad - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial z}[u^2 + (v+v_\theta)^2 + \omega^2] = \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}, \\ &\nu\left[\Delta'(v+v_\theta) - \frac{v+v_\theta}{r^2}\right] - \omega\frac{\partial(v+v_\theta)}{\partial z} - \frac{u}{r}\frac{\partial}{\partial r}[r(v+v_\theta)] = 0, \end{aligned} \right.$$

où Ω est égal à

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial \omega}{\partial r}\right).$$

En se bornant aux termes *linéaires* M. Taylor parvient aux équations

$$
(66)\qquad \left\{
\begin{aligned}
&-\frac{\partial u}{\partial t}+2\left(\frac{\alpha}{r^2}+\beta\right)v+\nu\left(\Delta' u-\frac{u}{r^2}\right)=\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r}-\frac{v_\theta^2}{r},\\
&-\frac{\partial v}{\partial t}-2\beta u+\nu\left(\Delta' v-\frac{v}{r^2}\right)=0,\\
&-\frac{\partial w}{\partial t}+\nu\,\Delta' w=\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}.
\end{aligned}\right.
$$

Les perturbations u, v, w sont supposées de la forme

$$
(67)\qquad \left\{
\begin{aligned}
u &= u_1 \cos\lambda z\, e^{\sigma t},\\
v &= v_1 \cos\lambda z\, e^{\sigma t},\\
w &= w_1 \sin\lambda z\, e^{\sigma t},
\end{aligned}\right.
$$

donc *périodiques* le long de l'axe des z, u_1, v_1, w_1 sont fonctions de z seul, égales à zéro pour $r=r_1$, $r=r_2$, et la condition de l'*incompressibilité* est

$$
(68)\qquad \frac{u_1}{r}+\frac{\partial u_1}{\partial r}+\lambda w_1=0.
$$

L'élimination de la pression p donne les équations

$$
(69)\qquad \nu\left(\Delta'-\frac{1}{r^2}-\lambda^2-\frac{\sigma}{\nu}\right)v_1=2\beta u_1,
$$

$$
(70)\qquad \frac{\nu}{\lambda}\frac{\partial}{\partial r}\left(\Delta'-\lambda^2-\frac{\sigma}{\nu}\right)w_1=-2\left(\beta+\frac{\alpha}{r^2}\right)v_1-\nu\left(\Delta'-\frac{1}{r^2}-\lambda^2-\frac{\sigma}{\nu}\right)u_1,
$$

$$
\Delta'=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right).
$$

M. Taylor intègre les équations (73), (74) par des *séries de fonctions de Bessel*. En posant

$$
(71)\qquad u_1=\sum_{m=1}^{\infty} a_m\,\mathrm{B}_1(k_m r),
$$

où $\mathrm{B}_1(k_m r)$ est une combinaison linéaire des deux fonctions de Bessel linéairement indépendantes $\mathrm{I}_1(k_m r)$, $\mathrm{Y}_1(k_m r)$,

$$
\mathrm{B}_1(k_m r)=\mathrm{C}_1\,\mathrm{I}_1(k_m r)+\mathrm{C}_2\,\mathrm{Y}_1(k_m r),
$$

et où k_m $(m=1, 2, \ldots)$ sont les racines de l'*équation transcendante en k*

$$
(72)\qquad \frac{\mathrm{I}_1(kr_1)}{\mathrm{Y}_1(kr_1)}=\frac{\mathrm{I}_1(kr_2)}{\mathrm{Y}_1(kr_2)}.
$$

Les B_1 s'annulent pour $r = r_1$ et pour $r = r_2$. On pose ensuite

$$(73)\quad \begin{cases} v_1 = C_3\, I_1(i\lambda' r) + C_4\, Y_1(i\lambda' r) + \sum_1^\infty b_m\, B_1(k_m r), \\ \lambda'^2 = \lambda^2 + \frac{\sigma}{\nu}, \\ b_m = -\dfrac{2\beta a_m}{\nu\left(k_m^2 + \lambda^2 + \frac{\sigma}{\nu}\right)}. \end{cases}$$

Les conditions aux limites donnent $C_3 = C_4 = 0$. On développe ensuite w_1 en fonction de r :

$$(74)\quad w_1 = C_5 + C_6\, I_0(i\lambda' r) + C_7\, Y_0(i\lambda' r) + \sum_{m=1}^\infty c_m\, B_0(k_m r).$$

M. Taylor obtient pour déterminer les inconnues a_m, ainsi que les constantes C'_6, C'_7 liées aux constantes C_6, C_7 par les relations

$$(75)\quad \begin{cases} C'_6 = \quad i\lambda' r_2 \left\{ C_6\, I'_0(i\lambda' r_2) + C_7\, Y'_0(i\lambda' r_2) \right\}, \\ C'_7 = -i\lambda' r_1 \left\{ C_6\, I'_0(i\lambda' r_1) + C_7\, Y'_0(i\lambda' r_1) \right\}, \end{cases}$$

le système suivant d'*équations linéaires homogènes en nombre infini*

$$(76)\quad \begin{cases} \sum_{m=1}^\infty k_m a_m\, B_0(k_m r_1) = 0, \\ \sum_{m=1}^\infty k_m a_m\, B_0(k_m r_2) = 0, \end{cases}$$

$$C'_6 \frac{\nu k_m}{\lambda H_m} B_0(k_m r_2) + C'_7 \frac{\nu k_m}{\lambda H_m} B_0(k_m r_1) + \frac{\nu}{\lambda^2}(k_m^2 + \lambda^2)(k_m^2 + \lambda'^2) a_m$$
$$+ \frac{4A}{\nu}\left[\frac{a_1 \gamma_{1m}}{k_1^2 + \lambda'^2} + \frac{a_2 \gamma_{2m}}{k_2^2 + \lambda'^2} + \ldots\right] = 0,$$

où l'on a

$$\gamma_{lm} = \frac{1}{H_m}\int_{r_1}^{r_2}\left(\frac{\alpha}{r^2} + \beta\right) B_1(k_l r)\, B_0(k_m r)\, r\, dr,$$

$$H_m = \int_{r_1}^{r_2} B_1^2(k_m r)\, r\, dr = \int_{r_1}^{r_2} B_0^2(k_m r)\, r\, dr.$$

2. Résultats approximatifs. — Il résulte des équations (76) que l'exposant σ satisfait à une *équation transcendante entière* que l'on obtient en annulant le *déterminant infini* de ces équations. M. Taylor pose dans cette équation $\sigma = 0$ pour obtenir le *cas limite* entre la stabilité et l'instabilité. Il en résulte une équation entre λ et la vitesse angulaire ω_1 du cylindre intérieur. On suppose $\frac{d}{r_1}$ ($d = r_2 - r_1$) *petit* pour pouvoir négliger les puissances > 1 de ce rapport.

Les résultats obtenus par cette voie sont les suivants :

Lorsque μ est voisin de 1, le mouvement est *stable* si l'on a $\frac{\omega_2}{\omega_1} > \frac{r_1^2}{r_2^2}$, et *instable* seulement si ω_1 est plus grand qu'une certaine valeur et si l'on a $\frac{\omega_2}{\omega_1} < \frac{r_1^2}{r_2^2}$. L'instabilité est alors *périodique* de période $\frac{2\pi}{\lambda} = 2d$ le long de l'axe des cylindres, c'est-à-dire du *double de l'épaisseur du fluide*, résultats confirmés par l'expérience.

BIBLIOGRAPHIE.

LIVRES, MONOGRAPHIES, ETC.

BRILLOUIN (M.). — ***Leçons sur la viscosité des liquides et des gaz*** (Paris, Gauthier-Villars, 1907).

LAMB (H.). — ***Lehrbuch der Hydrodynamik*** (Leipzig, B. G. Teubner, 1931).

LOVE, APPELL, BEGHIN, VILLAT. — ***Encyclopédie des Sciences math.***, t. IV, 5, art. 18, 1914.

OSEEN (C.).— ***Neuere Methoden und Ergebnisse in der Hydrodynamik*** (Leipzig, 1927).

VILLAT (H.). — ***Leçons sur l'Hydrodynamique*** (Paris, Gauthier Villars, 1929).

DRYDEN, MURNAGHAN, BATEMAN — Report of the Committee of hydrodynamics (***Bulletin of the Nat. Research Council*** (Washington, 1931).

LICHTENSTEIN (L.). — ***Grundlagen der Hydrodynamik*** (Berlin, J. Springer, 1930).

MÉMOIRES.

CALDONAZZO (B.). — [1, 2] Sui moti di un liquido viscoso simmetrici ad un asse (***Rend. Ist. Lomb.***, 2e série, t. 57, 1924 [1]): t. 58, 1925[2]).

[3] Moti elicoïdali simmetrici ad un' asse di liquidi viscosi (***Rend. Ist. Lomb.***, 2e série, t. 59, 1926).

[4] Un osservazione a proposito di moti viscosi simmetrici rispetto ad' un' asse (***Rend. Acc. Lincei***, 6e série, t. 5, 1927).

CISOTTI (U.). — [1] Rotazioni viscose (***Rend. Acc. Lincei***, 5e série, t. 33, 1924).

[2] Sull' integrazione dell' equazione delle rotazioni viscose (***Ibid.***, 5e série, t. 33, 1924).

CRUDELI (U.). — [1] Sopra una categoria di moti stazionari dei liquidi pesanti viscosi entro tubi cilindrici (rotondi) verticali (*Rend. Acc. Lincei*, 6^e série, t. 6, 1927).

[2] Una nuova categoria di moti stazionari dei liquidi (pesanti) viscosi entro tubi cilindrici (rotondi) verticali (*Ibid.*, 6e série, t. 5, 1927).

[3] Sui moti di un liquido viscoso (omogeneo) simmetrici rispetto ad un asse (*Ibid.*, 6e série, t. 5, 1927).

FAXÉN (H.). OLSSON (O.). — [1] Laminare Bewegungen zäher Flüssigkeiten in logarithmischen Spiralen (*Zeitschr. fur angew. Math. und Mech.*, t. 7, 1927).

[2] Konvergenzuntersuchungen zu G. I. Taylors Abhandlung ü. die Stabilität der Bewegung einer zahen Flüssigkeit zwischen zwei rotierenden Zylindern (*Arkiv for Mat.*, t. 21, 1929).

FINZI (B.). — Integrazione per successive approssimazioni delle equazioni di un liquido viscoso in moto stazionario (*Rend. Ist. Lomb.*, 2e série, t. 61, 1928).

HAMEL (G.). — [1] Spiralformige Bewegungen zäher Flüssigkeiten (*Jahresb. der Deutschen Math. Ver.*, t. 25, 1916).

[2] Zum Turbulenzproblem (*Gött. Nachr.*, 1911).

KAMPÉ DE FÉRIET. — [1] Sur quelques cas d'intégration des équations du mouvement visqueux incompressible (*IIIe Congrès int. de Méc. appl.* Stockholm, 1930).

[2] Sur quelques cas d'intégration des équations du mouvement plan d'un fluide visqueux incompressible (*Ann. Sc. Soc., Sc.*, Bruxelles, t. 50, 1930).

[3] Sur une classe de mouvements plans d'un fluide visqueux incompressible (*Ibid.*, t. 51, 1931),

MILLIKAN (C.). — Logarithmic spiral flow of an incompressible fluid (*M. Ann.*, t. 101, 1929).

NŒTHER (F.). — [1] Zur Theorie der Turbulenz (*Jabresber. der deutschen Math. Ver.*, t. 23, 1914).

[2] Das Turbulenzproblem, *Zeitschrift f. angew. Math. und Mech.*, t. 1, 1921)

[3] Zur asymptotischen Behandlung der stationären Lösungen im Turbulenzproblem (*Ibid.*, t. 6, 1926).

[4] Integrationsprobleme der Navier Stokes'schen Differentialgleichungen (*Handbuch d. physikalischen und technischen Mechanik*, Auerbach-Hort, t. 5).

OSEEN (C. W.). — [1] Exakte Losungen der hydrodynamischen Differentialgleichungen (*Arkiv for Mat.*, I, t. 20, 1927; II, t. 20, 1928).

[2] Exakte Losungen der hydrodynamischen Gleichungen (*Opuscula A. Wiman-dedicata*, Lund, 1930).

[3] Das Turbulenzproblem (*IIIe Congrès int. de Méc. appl.*, Stockhlom, 1930).

ODQVIST (P.). — Ueber die Randwertaufgabe der Hydrodynamik zaher Flüssigkeiten (*Math. Zft.*, t. 32, 1930).

OLSSON (Ol.). — Om integrationen av Hamel's differentialekvation for sega vätskovs rorelse (*Arkiv for Mat.*, t. 20, 1928).

ROSENBLATT (A.). — [1] Sopra certi moti permanenti dei liquidi viscosi incompressibili (*Atti di Bologna*, 1928).

[2] Sur certains mouvements stationnaires des fluides visqueux incompressibles *IIIe Congrès de Méc. appl.*, Stockholm, 1930).

[3] Sur les mouvements des liquides visqueux symétriques autour d'un axe (*Bull. Soc. math. de Grèce*, 1931).

[4] Sur certains mouvements des liquides visqueux incompressibles (*Conférences à l'Institut de Méc. des Fluides*, Paris, 1931).

[5] Sur la stabilité des mouvements laminaires des liquides visqueux (*Rend Acc. Lincei*, 6e serie, t. 14, 15, 1931-1932).

[6] Sur certains mouvements plans des liquides visqueux (*Bull. Sc. math.*, 2e série, t. 55, 1931).

[7] Sur les mouvements plans des liquides visqueux voisins des mouvements radiaux (*Bull. Ac. Polon. des Sc.*, 1931).

SZYMANSKI (P.). — Sur l'écoulement non permanent des fluides visqueux dans un tuyau (*IIIe Congrès de Méc. appl.*, Stockholm, 1930).

SZYMANSKI (P.).-WITOSZYŃSKI (Cz.). — Sur une intégrale particulière des équations de Stokes (*Ibid.*).

SOMMERFELD (A.). — Ein Beitrag zur hydrodynamischen Erklärung der turbulenten Flüssigkeitsbewegungen (*Congrès int. des Math.*, Rome, t. 3, 1908).

TAYLOR (G. I.). — [1] On the decay of vortices in a viscous fluid (*Phil. Mag.*, 6e série, t. 46, 1923).

[2] Stability of a viscous liquid contained between two rotating cylinders (*Phil. Trans. Roy. Soc.*, London, t. 223, 1923).

TABLE DES MATIÈRES.

CHAPITRE IV.

MOUVEMENTS VOISINS DES MOUVEMENTS ENVISAGÉS PRÉCÉDEMMENT. STABILITÉ DES MOUVEMENTS ÉTUDIÉS.

I. — *Mouvements voisins des mouvements radiaux.*

II. — *Mouvements voisins des mouvements laminaires.*

III. — *Mouvements voisins des mouvements circulaires de Couette.*