NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

HENRI FAURE

# Solution du problème 90

*Nouvelles annales de mathématiques 1re série*, tome 3 (1844), p. 592-595

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1844_1_3__592_1>

## SOLUTION DU PROBLÈME 90.

**PAR M HENRI FAURE,**
Élève en spéciale.

—

1° (*Fig.* 59.) Les trois points GAD sont sur une droite perpendiculaire à la bissectrice de l'angle A. Car les angles DAC, FAG étant égaux, et de plus la ligne FAC étant droite, GAD l'est aussi. Si l'on joint FB, cette ligne est perpendiculaire à GAD; or la bissectrice de l'angle A étant parallèle à FB, est aussi perpendiculaire à GAD.

2° AL est perpendiculaire à GC comme AM à BD. Les angles BAL, CGB étant égaux, les triangles GOB, AOK ayant d'ailleurs les angles en O égaux, il doit en être de même des angles OBG, et AKO; donc ce dernier est droit.

Même démonstration pour prouver que AM est perpendiculaire à BD.

3° $AO = AR$. Les deux triangles GBD, ARD étant semblables, on a la proportion

$$(1)\quad BG : AR :: GD : AD.$$

Les triangles semblables CGF, CAO donnent aussi

$$(2)\quad FG \text{ ou } BG : AO :: FC : AC,$$

mais au moyen des triangles semblables GFA, ACD on obtient successivement

$$AD : AG :: AC : AF,$$

d'où

$$AD + AG : AD :: AC + AF : AC,$$

ou

$$GD : AD :: CF : AC.$$

Comparant cette proportion aux précédentes, on en déduit l'égalité de AO et AR.

4° $\dfrac{AM}{AL} = \dfrac{AB \cdot DR}{AC \cdot OG}$. Joignons OR. Le triangle AOR étant isocèle, il s'ensuit que OR est parallèle à GD; donc on a les proportions :

$$BD \text{ ou } AM : RD :: AB : AO.$$
$$GO : GC \text{ ou } AL :: AR \text{ ou } AO : AC,$$

multipliant ces proportions membre à membre

$$AM \cdot GO : RD \cdot AL :: AB : AC,$$

d'où $$AM \cdot GO \cdot AC = AL \cdot AB \cdot DR,$$

ce qui revient à l'égalité ci-dessus.

5° $\frac{AN}{AK} = \frac{AC \cdot GO}{AB \cdot DR}$. Joignons KN. Si l'on inscrivait le quadrilatère AKIN dans une circonférence (ce qui est possible d'après ce que l'on a vu plus haut), l'angle KNI serait égal à l'angle KAI comme ayant même mesure; or il est aussi égal à BLA, donc le quadrilatère LKNM est inscriptible. Traçant la circonférence, les deux sécantes AL, AM, issues du même point A, donnent le rapport

$$\frac{AN}{AK} = \frac{AL}{AM} = \frac{AC \cdot GO}{AB \cdot DR},$$

d'ailleurs on peut aussi le prouver de la manière suivante. au moyen des triangles semblables AOK, GOB on a

$$AK : GB :: AO : GO,$$

et de même par les triangles semblables ANR, DRC

$$AC : AN :: DR : AR = AO;$$

multipliant ces deux proportions membres à membres, on arrive à la solution.

6° Les droites AIH, BD, GC se coupent au même point. Si je prouve que les six segments AO, BO, BS, SC, CR, RA jouissent de cette propriété que le produit (*)

$$AO \cdot BS \cdot RC = BO \cdot SC \cdot AR,$$

les lignes AS, BR, DC se couperont au même point d'après un théorème connu des transversales. Or, AO = AR; donc il faut prouver l'exactitude de l'égalité

$$BO \cdot SC = BS \cdot RC,$$

les triangles semblables GOB, AOC donnent

$$GB \text{ ou } AB : AC :: BO : AO,$$

de même les triangles ARB, RCD donnent

$$AB : CD = AR : RC = AO : RC;$$

(*) La lettre S manque dans la figure.

multipliant ces deux proportions terme à terme, on a

$$\overline{AB}^2 : \overline{AC}^2 :: BO : RC,$$

or on a aussi

$$\overline{AB}^2 : \overline{AC}^2 :: BS : CS,$$

donc

$$BO : RC :: BS : CS$$

et
$$BO \,.\, CS = RC \,.\, BS.$$

Si l'on construisait les carrés dans le sens inverse on verrait que la même propriété a encore lieu.

Si l'on prolonge AH, GF, ED, ces trois droites se couperont en un même point. Car soit P le point de rencontre de GF avec ED; joignons AP; l'angle PAF = CAH d'après l'égalité des triangles ABC, PAF. De plus l'on voit que AP = BC = SH. Si, au lieu de carrés, on construisait sur les trois côtés du triangle ABC des rectangles semblables, les mêmes propriétés subsisteraient encore.