Nouvelles annales de mathématiques

J. A. Serret

Note sur la question proposée au concours général. Spéciales, 1847

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 6 (1847), p. 301-305

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1847_1_6__301_1>

NOTE

sur la question proposée au concours général. Spéciales, 1847.

PAR J. A. SERRET.

Extrait d'une lettre à M. Terquem.

Un triangle PQR *étant circonscrit à un cercle, on forme un second triangle* ABC *dont les sommets* A, B, C *soient les points milieux des côtés du premier. Des sommets de ce second triangle on mène au cercle les tangentes* Aa, Bb, Cc *qui rencontrent en* a, b, c *les côtés opposés à ces sommets; on demande de prouver que ces trois points* a, b, c *sont en ligne droite. On verra si le théorème a également lieu lorsqu'à la place du* *cercle inscrit on prend une section conique tangente aux trois côtés du triangle* PQR.

Lemme. Soient (*fig.* 48) O le point où le côté RQ touche la circonférence, et H celui où la tangente Aa coupe le côté PQ, les triangles semblables BHa et ACa donnent la proportion :

$$\frac{\mathrm{B}a}{\mathrm{C}a}=\frac{\mathrm{BH}}{\mathrm{AC}},$$

ou en désignant par a, b, c les côtés du triangle PQR qui ont respectivement pour milieux les points A, B, C, et par $\frac{a}{2}$, b' et c' ceux du triangle AQH,

$$\text{(1)}\qquad \frac{\mathrm{B}a}{\mathrm{C}a}=\frac{2b'-b}{b}.$$

Cela posé, les deux triangles PQR et HQA étant circonscrits au même cercle sont entre eux comme leurs périmètres ; ils ont d'ailleurs l'angle Q commun ; ils sont donc entre eux comme les rectangles des côtés qui comprennent cet angle, c'est-à-dire :: $ab : \frac{a}{2}b'$, d'où il suit que l'on aura :

$$\text{(2)}\qquad \frac{a+2b'+2c'}{a+b+c}=\frac{b'}{b}.$$

En second lieu, QO s'exprime aisément, comme on sait, à l'aide des côtés de chacun des deux triangles PQR, HQA circonscrits au cercle ; en égalant ces deux valeurs de QO, on a :

$$2\mathrm{QO}=a+b-c=\frac{a}{2}+b'-c',$$

d'où

$$\text{(3)}\qquad 2c'=2b'+2c-2b-a\,;$$

portant cette valeur de $2c'$ dans l'égalité (2), on aura la valeur de b', savoir :

$$b' = \frac{2b(c-b)}{a+c-3b};$$

enfin l'égalité (1) donnera :

$$\frac{Ba}{Ca} = \frac{3c-a-b}{a+c-3b}. \tag{4}$$

1[re] *remarque.* Il pourrait arriver que le point a ne tombât pas entre les points B et C ; dans ce cas, il faudra changer le signe du second membre de l'équation (1) ; en outre, on devra changer le signe de c' dans les equations (2) et (3), ce qui n'occasionnera en définitive que le changement de signe du second membre de l'équation (4) ; d'où il suit que le rapport $\frac{Ba}{Ca}$ est toujours égal à la valeur absolue de $\frac{a+b-3c}{a+c-3b}$.

2[e] *remarque.* Les mêmes choses subsisteraient si on remplaçait le cercle inscrit par l'un des cercles exinscrits; il suffirait en effet de changer le signe des nombres qui représentent les côtés dont les *prolongements* touchent la circonférence.

Démonstration du théorème.

Les trois rapports $\frac{Ba}{Ca}, \frac{Cb}{Ab}, \frac{Ac}{Bc}$ étant les valeurs absolues des fractions

$$\frac{a+b-3c}{a+c-3b}, \quad \frac{b+c-3a}{a+b-3c}, \quad \frac{a+c-3b}{b+c-3a},$$

dont le produit est l'unité, on aura :

$$Ba \,.\, Cb \,.\, Ac = Ca \,.\, Ab \,.\, Bc.$$

D'ailleurs les points a, b, c sont respectivement sur les côtés du triangle ABC, et les droites Aa, Bb, Cc ne peuvent jamais se couper en un même point, puisque alors on pourrait mener par ce point trois tangentes au cercle ; donc, par un théorème connu, les trois points a, b, c sont en ligne droite.

Remarque. D'après l'une des remarques précédentes, la conclusion sera la même, si l'on substitue au cercle inscrit l'un quelconque des trois cercles exinscrits au triangle.

Extension du théorème aux coniques.

Si l'on substitue au cercle une conique quelconque, le théorème subsistera. Supposons d'abord qu'il s'agisse d'une ellipse ; on la placera sur un cylindre droit à base circulaire convenablement choisi ; le triangle PQR se projettera sur le plan de la base du cylindre suivant un triangle P'Q'R' circonscrit au cercle de base, et dont les côtés auront pour milieux les projections A,B,C' des points A, B, C; les projections a', b', c' des points a, b, c seront en ligne droite ; donc les points a, b, c le seront aussi.

Le théorème sera également vrai pour une parabole, puisque celle-ci peut être considérée comme limite d'une série d'ellipses.

Enfin, des considérations fort simples l'étendent, comme on va voir, à l'hyperbole. Dans le cas où la conique donnée est une ellipse, son équation sera

$$\frac{x^2}{p^2}+\frac{y^2}{q^2}=1.$$

L'équation de la droite ab devra être satisfaite par les coordonnées du point c, et cela identiquement, en sorte que cette identité ne sera pas troublée si l'on remplace partout q par $q\sqrt{-1}$; d'où il suit clairement que le théorème subsistera pour l'hyperbole.

Le théorème que nous venons de démontrer est susceptible d'une autre extension. Il a encore lieu, en effet, si l'on prend pour A,B,C, non plus les milieux des côtés du triangle PQR, mais trois points quelconques sur les côtés, tels que les droites qui les joignent aux sommets opposés se coupent en un même point.

Soient donc PQR un triangle dont les côtés touchent une conique quelconque, et A,B,C trois points pris sur ces côtés et tels que les droites PA, RB, QC se coupent en un même point; soient aussi a,b,c, les points où les tangentes respectivement menées à la conique par les sommets du triangle ABC rencontrent les côtés opposés.

Joignons les différents points de cette figure à un point quelconque pris hors de son plan, et coupons les rayons ainsi obtenus par un certain plan; on aura sur ce plan une projection de la figure primitive, et si l'on représente la projection d'un point par la lettre accentuée qui désigne ce point, on verra aisément que les droites P'A', R'B', Q'C' se couperont en un même point. Or on peut faire en sorte que deux des trois points A'B'C' soient les milieux des côtés du triangle P'Q'R' sur lesquels ils se trouvent; donc il en sera de même du troisième. Il suit de là que d'après ce qui a été démontré plus haut, les points a',b',c' seront en ligne droite, donc les points a,b,c le seront également.