J.-G. DOSTOR

Aire d'un quadrilatère quelconque

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 7 (1848), p. 69-75

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1848_1_7__69_1>

AIRE D'UN QUADRILATÈRE QUELCONQUE,

PAR M. J.-G. DOSTOR,
Docteur ès sciences mathématiques.

Théorème. *Les côtés consécutifs d'un quadrilatère quelconque étant représentés par* a, b, c, d, *et ses diagonales par* m, n, *l'aire* Q *de ce quadrilatère est*

$$\frac{1}{4}\sqrt{(2mn+a^2-b^2+c^2-d^2)(2mn-a^2+b^2-c^2+d^2)}.$$

Démonstration. On a (*fig.* 14) :

$$Q=\frac{1}{2}m(BE+DF),$$

d'où

$$16Q^2=4m^2(BE+DF)^2. \tag{1}$$

Cela posé, les triangles rectangles semblables BEI, DFI donnent :

$$BE : DF :: BI : DI :: EI : FI,$$

d'où

$$(BE+DF)^2 : \overline{DF}^2 :: (BI+DI)^2 : \overline{DI}^2 :: (EI+FI)^2 : \overline{FI}^2;$$

or

$$\overline{DF}^2=\overline{DI}^2-\overline{FI}^2,$$

donc

$$(BE+DF)^2=(BI+DI)^2-(EI+FI)^2=n^2-EF^2;$$

ou bien, en multipliant par $4m^2$:

$$4m^2(BE+DF)^2=4m^2n^2-4m^2\overline{EF}^2; \qquad (2)$$

on a ensuite par les triangles ABC, ACD,

$$a^2-b^2=m^2-2mCE,$$
$$c^2-d^2=m^2-2mAF;$$

d'où, en ajoutant

$$a^2-b^2+c^2-d^2=2m^2-2m(CE+AF)=2mEF;$$

élevant au carré, il vient

$$(a^2-b^2+c^2-d^2)^2=4m^2\overline{EF}^2. \qquad (3)$$

Ajoutant actuellement membre à membre les égalités (1), (2) et (3), et réduisant, on obtient

$$16Q^2+(a^2-b^2+c^2-d^2)^2=4m^2n^2,$$

d'où

$$Q=\frac{1}{4}\sqrt{4m^2n^2-(a^2-b^2+c^2-d^2)^2},$$

ou enfin

$$Q=\frac{1}{4}\sqrt{(2mn+a^2-b^2+c^2-d^2)(2mn-a^2+b^2-c^2+d^2)}. \qquad (A)$$

Corollaire I. Lorsque le quadrilatère est *inscriptible* dans un cercle, on a $mn=ac+bd$; la valeur de Q devient dans ce cas :

$$Q=\frac{1}{4}\sqrt{(2ac+2bd+a^2-b^2+c^2-d^2)(2ac+2bd-a^2+b^2-c^2+d^2)},$$

ou

$$Q=\frac{1}{4}\sqrt{(a+c+b-d)(a+c+d-b)(b+d+a-c)(b+d+c-a)};$$

donc $\qquad Q=\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}, \qquad$ (B)

en posant $\qquad a+b+c+d=2s.$

Corollaire II. Lorsque le côté a est parallèle à c, la figure ABCD est un *trapèze* et on a :

$$m^2 + n^2 = d^2 + b^2 + 2ac \text{ (*)}, \qquad (4)$$

$$m^2 - n^2 = (d^2 - b^2).\frac{a+c}{a-c}. \qquad (5)$$

Substituant dans (A) la valeur de d^2+b^2, tirée de (4), il vient :

$$T = \frac{1}{4}\sqrt{(2mn+a^2+c^2-m^2-n^2+2ac)\,(2mn-a^2-c^2+m^2+n^2-2ac)},$$

ou bien

$$T = \frac{1}{4}\sqrt{[(a+c)^2-(m-n)^2]\,[(m+n)^2-(a-c)^2]},$$

d'où on déduit, pour *l'aire du trapèze, en valeur des bases et diagonales* :

$$T = \frac{1}{4}\sqrt{(a+c+m-n)\,(a+c+n-m)\,(m+n+a+c)\,(m+n-a-c)},$$

ou $$T = \sqrt{s(s-p)\,(s-m)\,(s-n)}, \qquad (C)$$

en posant $a+c+m+n = 2s$ et $a+c = p$.

Effectuant le calcul sous le radical qui précède les deux derniers, et observant que $(m-n)^2(m+n)^2 = (m^2-n^2)^2$ et $(m+n)^2+(m-n)^2 = 2(m^2+n^2)$, il vient aussi :

$$T = \frac{1}{4}\sqrt{2(a+c)^2(m^2+n^2) - (a+c)^4 - (m^2-n^2)^2}.$$

Mettant dans cette expression les valeurs (4) et (5), on obtient :

$$T = \frac{1}{4}\sqrt{2(a+c)^2(b^2+d^2+2ac) - (a+c)^4 - (d^2-b^2)^2.\frac{(a+c)^2}{(a-c)^2}},$$

ou

$$T = \frac{a+c}{a-c}.\frac{1}{4}\sqrt{[2b^2+2d^2+4ac-(a+c)^2]\,(a-c)^2-(d^2-b^2)^2},$$

(*) Voir la Remarque qui termine la Note.

enfin si on remarque que

$$2b^2+2d^2=(b+d)^2+(b-d)^2,$$
$$(d^2-b^2)^2=(b^2-d^2)^2=(b+d)^2(b-d)^2,$$
$$4ac-(a+c)^2=-(a-c)^2,$$

on trouve :

$$T=\frac{a+c}{a-c}.\frac{1}{4}\sqrt{[(b+d)^2-(a-c)^2]\,[(a-c)^2-(b-d)^2]},$$

ou bien

$$T=\frac{a+c}{a-c}.\frac{1}{4}\sqrt{(b+d+a-c)\,(b+d+c-a)\,(a-c+b-d)\,(a-c+d-b)};$$

donc

$$T=\frac{p}{q}\sqrt{s(s-q)(s-b)(s-d)},$$

en faisant $a-c+b+d=2s$, $a+c=p$, $a-c=q$.

Corollaire III. Lorsque $a=c$, $b=d$, le quadrilatère est un *parallélogramme ;* dans ce cas

$$P=\frac{1}{4}\sqrt{4m^2n^2-4(a^2-b^2)^2},$$

ou $$P=\frac{1}{4}\sqrt{(2mn+2a^2-2b^2)\,(2mn-2a^2+2b^2)}.$$

Ajoutant la quantité $m^2+n^2-2a^2-2b^2=0$ à chacun des facteurs sous le radical, il vient ·

$$P=\frac{1}{4}\sqrt{[(m+n)^2-4a^2]\,[(m+n)^2-4b^2]},$$

ou enfin

$$P=\frac{1}{4}\sqrt{(m+n+2a)(m+n-2a)(m+n+2b)(m+n-2b)}. \quad \text{(E)}$$

On conclut de là que si p et q représentent les diagonales qui joignent les milieux des côtés opposés d'un *quadrilatère quelconque*, on aura aussi :

$$Q=\frac{1}{2}\sqrt{(p+q+m)(p+q-m)(p+q+n)(p+q-n)};\quad \text{(F)}$$

car tout quadrilatère est double du parallélogramme formé par les lignes qui joignent les milieux des côtés adjacents.

Si le parallélogramme est un *losange*, on a $a=b$, de sorte qu'il vient :

$$L=\frac{1}{4}[(m+n)^2-4a^2],$$

ou bien

$$L=\frac{1}{4}(m+n+2a)\ (m+n-2a)\ldots,\quad \text{(G)}$$

remplaçant $4a^2$ par sa valeur m^2+n^2 et réduisant, on a aussi :

$$L=\frac{1}{2}mn\ ,$$

ce qui est évident.

Enfin, si le parallélogramme est un *rectangle*, on a $m=n$; donc

$$R=\sqrt{(m+a)(m-a)(m+b)(m-b)}.\quad \text{(H)}$$

Corollaire IV. Lorsque $n=a$, $m=c$, $d=0$, le quadrilatère ABCD se réduit au *triangle* ABC, dont l'aire sera

$$t=\frac{1}{4}\sqrt{(2ac+a^2-b^2+c^2)(2ac-a^2+b^2-c^2)}\ ,$$

donc

$$t=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}\ ,\quad \text{(I)}$$

en faisant $a+b+c=2s$.

Remarque. Les deux égalités (4) et (5) constituent deux principes importants du trapèze, dont le second a été trouvé, il y a peu d'années, par M. Cadet (*Nouvelles Annales*, t. I, p. 189, 1842).

Ils s'énoncent de la manière suivante :

Dans tout trapèze,

1° *La somme des carrés des diagonales est égale à la somme des carrés des côtés augmentée du double rectangle des bases ;*

2° *La différence des carrés des diagonales est à la différence des carrés des côtés, comme la somme des bases est à leur différence.*

Ces deux théorèmes se démontrent presque simultanément à l'aide des égalités :

$$m^2 = a^2 + b^2 - 2ax, \ (6) \qquad m^2 = c^2 + d^2 + 2cy, \ (8)$$
$$n^2 = a^2 + d^2 - 2ay, \ (7) \qquad n^2 = c^2 + b^2 + 2cx, \ (9)$$

que fournissent les triangles composants du trapèze ABCD (*fig.* 15).

En effet : 1° Si on ajoute toutes ces égalités membre à membre, et qu'on divise par 2, on aura :

$$m^2 + n^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - (a-c)(x+y);$$

or $x+y = a-c$; donc, substituant et réduisant, il vient :

$$m^2 + n^2 = b^2 + d^2 + 2ac.$$

2° Retranchant la somme des égalités (7) et (9) de celle des égalités (6) et (8), on obtient, en divisant par 2,

$$m^2 - n^2 = (a+c)(y-x).$$

Or, puisque CE = DF, on a $b^2 - x^2 = d^2 - y^2$, ou $y^2 - x^2 = d^2 - b^2$, ou encore $(y-x)(y-x) = d^2 - b^2$. On déduit de là :

$$y - x = \frac{d^2 - b^2}{y+x} = \frac{d^2 - b^2}{a-c};$$

donc

$$m^2 - n^2 = (d^2 - b^2) \cdot \frac{a+c}{a-c}.$$

Dans ces démonstrations, l'idée de l'emploi simultané des égalités (6), (7), (8) et (9) m'a été fournie par l'obligeante amitié de M. O. Wust, *de Strasbourg*. Ce savant professeur élimine x entre (6) et (9), y entre (7) et (8), ce qui le conduit aux relations :

$$cm^2+an^2=ac(a+c)+b^2(a+c)\,, \qquad (10)$$

$$am^2+cn^2=ac(a+c)+d^2(a+c). \qquad (11)$$

Ajoutant membre à membre et divisant par $(a+c)$, il a :

$$m^2+n^2=2ac+b^2+d^2\,;$$

retranchant ensuite membre à membre et divisant par $(a-c)$, il obtient :

$$m^2-n^2=(d^2-b^2)\,.\,\frac{a+c}{a-c}\,;$$

égalités qui sont identiques avec (4) et (5).