NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

J. COLLÈTE

Note sur quelques formules de trigonométrie sphérique et sur le quadrilatère sphérique inscrit

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 8 (1849), p. 435-441

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1849_1_8__435_0>

NOTE

Sur quelques formules de trigonométrie sphérique et sur le quadrilatère sphérique inscrit;

PAR M. J. COLLÈTE,

Ancien élève de Saint-Cyr, soldat au 3me regiment de marine.

I. Les formules suivantes ont été données par M. Schmeisser, professeur à Francfort-sur-l'Oder (t. VII, p. 269) :

$$(1)\qquad \sin\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b\sin C = \sin\frac{1}{2}c\cos(P-A),$$

$$(2)\qquad \cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b\sin C = \cos\frac{1}{2}c\cos(P-C),$$

$$(3)\qquad \sin\frac{1}{2}a\sin\frac{1}{2}b\sin C = \cos\frac{1}{2}c\cos P\ (*),$$

$$P = \frac{A+B+C}{2}.$$

L'objet de cette Note est de démontrer ces formules, et d'en déduire d'autres formules, ainsi que quelques théorèmes de géométrie sphérique.

La démonstration consiste à prendre, en fonction des angles A, B, C du triangle, les valeurs de $\sin\frac{1}{2}a$, $\sin\frac{1}{2}b$, $\cos\frac{1}{2}a$, $\cos\frac{1}{2}b$, et de les combiner entre elles de la façon dont l'indiquent les formules en question.

(*) Il y a une erreur typographique; au lieu de sin P, dans la troisième formule, il faut cos P, comme je l'ai mis ici.

Et d'abord, faisons subir à la forme générale des valeurs de $\sin\frac{1}{2}a$, $\cos\frac{1}{2}a$, une modification rendue nécessaire par la question.

Dans ces valeurs générales, on suppose (voy. *Trigon. sph.,* Delisle et Gérono) que $2P = (A + B + C) - 180^\circ$, tandis qu'ici, il faut que $P = \frac{1}{2}(A+B+C)$; ce qui, soit dit en passant, est plus logique, puisqu'on agit ainsi en trigonométrie rectiligne.

On sait que

$$\sin\frac{1}{2}a = \sqrt{\frac{-\cos\left(\frac{A+B+C}{2}\right)\cos\left(\frac{B+C-A}{2}\right)}{\sin B \sin C}}.$$

Si l'on suppose

$$\frac{A+B+C}{2} = P,$$

il en résulte

$$\frac{B+C-A}{2} = P - A;$$

la formule devient

$$(4)\qquad \sin\frac{1}{2}a = \sqrt{\frac{-\cos P\cos(P-A)}{\sin B \sin C}}.$$

On trouvera de même

$$(5)\qquad \cos\frac{1}{2}a = \sqrt{\frac{\cos(P-B)\cos(P-C)}{\sin B \sin C}}.$$

Enfin, on a encore les deux formules

$$(6)\qquad \sin\frac{1}{2}b = \sqrt{\frac{-\cos P\cos(P-B)}{\sin A \sin C}},$$

et

$$(7)\qquad \cos\frac{1}{2}b = \sqrt{\frac{\cos(P-A)\cos(P-C)}{\sin A \sin C}}.$$

Cela fait, multiplions l'équation (4) par l'équation (7), il vient

$$\sin\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b = \sqrt{\frac{-\cos P\cos(P-C)\cos^2(P-A)}{\sin A\,\sin B\,\sin^2 C}};$$

d'où l'on tire

$$\sin\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b\sin C = \sin\frac{1}{2}C\cos(P-A),$$

puisque

$$\sin\frac{1}{2}C = \sqrt{\frac{-\cos P\cos(P-C)}{\sin A\,\sin B}}.$$

C'est la formule (1).

On voit qu'au moyen d'une permutation de lettres, cette formule en fournit cinq antres.

Multiplions maintenant la formule (5) par la formule (7), il vient

$$\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b = \sqrt{\frac{\cos(P-B)\cos(P-A)\cos^2(P-C)}{\sin A\,\sin B\,\sin^2 C}};$$

d'où

$$\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b\sin C = \cos\frac{1}{2}C\cos(P-C).$$

C'est la formule (2); elle en fournit deux autres.

Enfin, en multipliant la formule (4) par la formule (6), on a

$$\sin\frac{1}{2}a\sin\frac{1}{2}b = \sqrt{\frac{\cos(P-A)\cos(P-B)\cos^2 P}{\sin A\,\sin B\,\sin^2 C}},$$

ou bien

$$\sin\frac{1}{2}a\sin\frac{1}{2}b\sin C = \cos\frac{1}{2}c\cos P.$$

C'est la formule (3); elle en fournit deux autres. Ces expressions vont nous conduire à quelques théorèmes.

En appelant S la surface du triangle sphérique, on a

$$S = (A + B + C) - 180^\circ;$$

donc

$$\frac{S}{2} = P - 90^\circ; \quad \text{d'où} \quad \sin\frac{S}{2} = \cos P.$$

Or la formule (3) nous donne

$$\cos P = \frac{\sin\frac{1}{2}a \sin\frac{1}{2}b \sin C}{\cos\frac{C}{2}}.$$

Par conséquent, on a

$$\sin\frac{S}{2} = \frac{\sin\frac{1}{2}a \sin\frac{1}{2}b \sin C}{\cos\frac{C}{2}},$$

formule à laquelle M. Vannson (t. VII, p. 17) est arrivé autrement.

II. On sait que le quadrilatère rectiligne plan et inscriptible jouit de diverses propriétés remarquables ; cherchons les propriétés correspondantes sur le quadrilatère inscrit à un petit cercle, et dont les côtés seront d'ailleurs des axes de grands cercles.

Rappelons-nous que si ρ désigne la distance polaire du petit cercle circonscrit au triangle ABC, on a

$$2 \tang\frac{a}{2} \tang\frac{b}{2} \tang\frac{c}{2} = \tang\rho \sin\frac{S}{2},$$

S désignant la surface.

Remplaçant $\sin\frac{S}{2}$ par la valeur trouvée ci-dessus, il vient, réduction faite,

$$(a) \qquad \tang\rho = \frac{2\sin\frac{c}{2}}{\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}\sin C}.$$

Soit, maintenant, un quadrilatère sphérique ABCD, que je suppose inscrit dans un petit cercle dont ρ est la distance polaire.

Appelons a, b, c, d les côtés, et m et n les diagonales BD et AC.

En appliquant la formule (a) au triangle ABC, on aura

$$\tang \rho = \frac{2 \sin \frac{n}{2}}{\cos \frac{a}{2} \cos \frac{b}{2} \sin B};$$

de même, le triangle ADC nous donne

$$\tang \rho = \frac{2 \sin \frac{n}{2}}{\cos \frac{c}{2} \cos \frac{d}{2} \sin D}.$$

Par conséquent

$$\cos \frac{a}{2} \cos \frac{b}{2} : \cos \frac{c}{2} \cos \frac{d}{2} :: \sin D : \sin B.$$

C'est le théorème correspondant à celui-ci, de géométrie plane :

Dans le quadrilatère inscrit, les angles opposés sont supplémentaires.

Si l'on fait le rayon de la sphère $= \infty$, alors $\cos \frac{a}{2}$, $\cos \frac{b}{2} \ldots$ deviennent l'unité, si l'on conserve aux côtés des longueurs finies (*). Donc,

$$\sin D = \sin B.$$

Ce qu'on pouvait prévoir.

(*) Car

$$\cos \frac{a}{2} = \frac{\sin a}{2 \sin \frac{1}{2} a},$$

En général, la relation

$$\frac{\sin\frac{n}{2}}{\cos\frac{a}{2}\sin B} = \frac{\sin\frac{m}{2}}{\cos\frac{c}{2}\sin C}$$

servira à établir toute relation cherchée entre les diagonales.

Par exemple, faisons $r = \infty$, la relation donne

$$m : n :: \sin C : \sin B.$$

Ainsi l'on a ce théorème de géométrie plane :

Dans le quadrilatère inscriptible les diagonales sont en raison inverse des sinus des angles dont elles partent.

On voit ici que ce théorème, dont j'ignorais l'existence, a été entièrement déduit de la géométrie sphérique.

On peut, d'ailleurs, le démontrer très-simplement.

En géométrie plane, on a encore, sur le quadrilatère inscrit, les deux théorèmes suivants :

1°. *Les diagonales sont comme les sommes des produits des côtés qui aboutissent ensemble à leurs extrémités ;*

2°. *Le produit des diagonales est égal à la somme des produits des côtés opposés.*

Les théorèmes correspondants sur la sphère ne se démontreraient qu'au moyen de calculs très-longs et très-laborieux ; mais il existe un moyen simple d'y arriver.

En effet, supposons joints entre eux, par des lignes droites, les points A, B, C, D, et nous aurons formé un

---

et si l'on suppose le rayon de la sphere $= \infty$, on a

$$\cos\frac{a}{2} = \frac{a}{2 \times \frac{1}{2} a} = 1.$$

Il en est de meme des autres.

quadrilatère plan inscrit ABCD, dans lequel on a

$$(A)\quad \begin{cases} AC : BD :: AD.AB + DC.CB : AD.DC + AB.CB. \\ AC.BD = AD.BC + AB.CD. \end{cases}$$

Mais, en supposant le rayon de la sphère $= 1$, on a

$$AC = 2\sin\frac{n}{2},\quad BD = 2\sin\frac{1}{2}m, \ldots$$

ainsi de suite ; remplaçant dans (A), on a

$$(B)\quad \begin{cases} \sin\frac{1}{2}n : \sin\frac{1}{2}m :: \sin\frac{a}{2}\sin\frac{d}{2} + \sin\frac{c}{2}\sin\frac{b}{2} : \sin\frac{a}{2}\sin\frac{b}{2} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + \sin\frac{d}{2}\sin\frac{c}{2} \\ \sin\frac{1}{2}n\sin\frac{1}{2}m = \sin\frac{1}{2}a\sin\frac{1}{2}c + \sin\frac{1}{2}b\sin\frac{1}{2}d, \end{cases}$$

formules qui deviennent celles du quadrilatère plan quand on suppose $r = \infty$.

On pourrait encore, de tout ce qui précède, déduire d'autres formules et d'autres théorèmes; je ne m'y arrêterai pas.

Enfin, on pourrait, comme précédemment, démontrer les formules suivantes :

$$\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\sin c = \cos\frac{C}{2}\sin(p - b),$$

$$\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\sin c = \sin\frac{C}{2}\sin p,$$

$$\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin c = \sin\frac{C}{2}\sin(p - c),$$

$$p = \frac{a + b + c}{2};$$

et celles qu'on en déduit par des permutations entre les lettres. Toutes ces formules peuvent être obtenues aussi en appliquant celles M. Schmeisser au triangle polaire du proposé.

Note. Il reste à démontrer les réciproques des propositions B.