JULLIEN

Solution de la question 89 (Prouhet)

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 10 (1851), p. 144-145

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1851_1_10__144_1>

SOLUTION DE LA QUESTION 89 (PROUHET)

(voir t. III, p. 376),

PAR M. L'ABBÉ JULLIEN,
Professeur au seminaire de Vals.

Soient $F(x)$ une fonction entière en x; a, b deux nombres positifs, et $b > a$; si $\frac{F(a)}{F(b)} > 0$ et $\frac{F(b) - F(a)}{F'(a)} < 0$, il y aura au moins deux racines de $F'(x) = 0$ comprises entre a et b.

Lorsque, dans une fonction entière $F(x)$, on fait croître la variable d'une manière continue, l'accroissement de la fonction $F(x+h) - Fx$ correspondant à la valeur $x = a$ est toujours de même signe que la dérivée $F'(x)$. Donc, si $F'(x)$ ne change pas de signe, lorsqu'on y fait varier x d'une manière continue depuis a jusqu'à b, la valeur de $F(x)$ ne cesse d'augmenter ou de diminuer, selon que $F'(a)$ est positif ou négatif, et la relation $\frac{F(b) - F(a)}{F'(a)} < 0$ ne peut subsister.

Cette dernière inégalité ayant lieu, $F'x$ change de signe entre a et b, il existe donc au moins une racine de

$F'(x) = 0$ comprise entre a et b, et puisque nous avons en même temps $\frac{F'(b)}{F'(a)} > 0$, il en existe un nombre pair dont deux au moins sont inégales.

L'interprétation géométrique de l'énoncé du théorème montre qu'il existe entre les ordonnées $F(a)$ et $F(b)$ ou un maximum et un minimum de $F(x)$, ou un point d'inflexion de la courbe représentée par $y = F(x)$. Ce dernier cas ne peut avoir lieu quand la fonction proposée est entière, car la tangente trigonométrique de l'angle que fait la tangente à la courbe avec l'axe des x, doit nécessairement passer par l'infini.