NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

J.-CH. DUPAIN

Question de minimum relative aux voies de transport

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 13 (1854), p. 141-144

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1854_1_13__141_1>

QUESTION DE MINIMUM RELATIVE AUX VOIES DE TRANSPORT;

PAR M. J.-CH. DUPAIN,
Professeur au Lycée de Rennes.

Un voyageur veut se rendre du point C au point A; il a à sa disposition une ligne de chemin de fer AB′ qui ne passe pas au point C; chemin qu'il faut aller rejoindre par une route de terre CM. On demande de déterminer la position du point M de telle sorte que la durée du voyage soit la plus petite possible.

Du point C j'abaisse CB perpendiculaire sur AB′,

$$BC = a, \quad AB = c,$$

V vitesse sur le chemin de fer,
V′ vitesse sur le chemin de terre,

$$m = \frac{V'}{V}, \quad CM = x,$$

Nous aurons

$$AM = c - \sqrt{x^2 - a^2}.$$

En représentant par t la durée du trajet,

$$(1) \qquad t = \frac{c - \sqrt{x^2 - a^2}}{V} + \frac{x}{V'};$$

en égalant à o la dérivée de t par rapport à x, on a

$$\frac{-x}{V\sqrt{x^2 - a^2}} + \frac{1}{V'} = 0, \quad \text{d'où} \quad x = \frac{aV}{\sqrt{V^2 - V'^2}},$$

$$(2) \qquad x = \frac{a}{\sqrt{1 - m^2}};$$

on s'assure aisément que c'est une valeur minimum. La valeur correspondante de t est

$$(3) \qquad \frac{1}{V}\left(c + \frac{a}{m}\sqrt{1 - m^2}\right);$$

on arrive au même résultat en développant l'équation (1) et en disposant de t de manière à rendre les deux racines égales.

L'équation (2) donne aisément

$$m = \sqrt{1 - \frac{a^2}{x^2}};$$

or,

$$\frac{a}{x} = \cos BCM,$$

donc

$$m = \sin BCM.$$

Si l'on avait besoin de connaître BM, on le calculerait facilement au moyen de l'équation (2),

$$BM = \frac{am}{\sqrt{1 - m^2}}.$$

On calculera simplement une valeur approchée de x, en remarquant que $\sqrt{1-m^2}$ est à peu près égal à $1-\frac{m^2}{2}$ et que $\frac{1}{1-\frac{m^2}{2}}$ est à peu près égal à $1+\frac{m^2}{2}$.

On se ferait une idée plus nette de l'approximation en développant $\frac{1}{\sqrt{1-m^2}}$ en série,

$$\frac{1}{\sqrt{1-m^2}} = 1+\frac{m^2}{2}+\frac{3}{8}m^4+\ldots.$$

En ne conservant que $1+\frac{m^2}{2}$, on néglige donc la quatrième puissance de m et les puissances supérieures.

Posons donc

$$x = a\left(1+\frac{m^2}{2}\right).$$

Nous pouvons admettre qu'en France m varie de $\frac{1}{4}$ à $\frac{1}{8}$; la plus grande valeur de x serait donc

$$a\,(1{,}03125),$$

la plus petite

$$a\,(1{,}0078125).$$

La ligne CM différera donc toujours peu de CB; s'il s'agissait d'une dépêche transmise par le télégraphe électrique, m serait infiniment petit et l'on aurait $x=a$; la voie la plus rapide serait CBA.

Les formules deviennent illusoires si m n'est pas inférieur à 1, c'est-à-dire si la vitesse par le chemin de terre n'est pas inférieure à la vitesse par le chemin de fer. Il est facile de reconnaître qu'alors la voie la plus courte serait CA.

On pourrait encore se demander quelle est la route la plus économique ; en appelant p le prix de 1 kilomètre sur la route de terre, p' le prix de 1 kilomètre sur le chemin de fer, et en posant

$$n = \frac{p}{p'},$$

on arrive, par des calculs analogues aux précédents, à

$$x = \frac{a}{\sqrt{1 - n^2}}.$$

n diffère généralement peu de l'unité, de sorte que la voie la plus rapide n'est pas la plus économique (*).