NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

G. BELLAVITIS
KORALEK

Seconde solution de la question 263

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 13 (1854), p. 362-366
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1854_1_13__362_0>

SECONDE SOLUTION DE LA QUESTION 263

(voir t. XII, p. 319);

PAR M. G. BELLAVITIS,
Professeur à l'Université de Padoue,

ET M. KORALEK.

Soit l'équation

$$3432\,x^7 - 12012\,x^6 + 16632\,x^5 - 11550\,x^4 + 4200\,x^3 \\ - 756\,x^2 + 56\,x - 1 = 0.$$

Posons

$$x = y + \frac{1}{2};$$

on obtient

$$3432y^7 - 1386y^5 + \frac{345}{2}y^3 - \frac{35}{8}y = 0.$$

Cette équation est la septième dérivée de l'équation

$$\left(y^2 - \frac{1}{4}\right)^7 = 0,$$

qui a sept racines égales à $+\frac{1}{2}$, et sept autres égales à $-\frac{1}{2}$; donc, d'après le théorème de Rolle, l'équation donnée a sept racines réelles. C. Q. F. D.

Note du rédacteur. Soit $A_p x^p$ le terme d'une équation; la $n^{ième}$ dérivée de ce terme est

$$p.p - 1 \ldots p - n + 1 \,.\, A_p x^{p-n};$$

on peut donc écrire de suite la $n^{ième}$ dérivée d'une équation quelconque, et si l'équation donnée n'a que des racines réelles, il en sera de même de l'équation dérivée dont les racines seront comprises entre celles de l'équation donnée; il est donc facile de former des équations à racines réelles irrationnelles, et comprises entre des limites données (*voir* question 191, tome VII, page 368); mais M. Koralek a déterminé la valeur des racines irrationnelles, et voulant donner un exercice, l'habile calculateur n'avait pas à s'enquérir de l'origine de l'équation, ni de sa simplification. En divisant l'équation en y par y et faisant ensuite $y^2 = z$, on obtient

$$3432\, z^3 - 1386\, z^2 + \frac{315}{2} z - \frac{35}{8} = 0,$$

équation du troisième degré, susceptible d'une solution trigonométrique que nous devons à M. Koralek.

L'équation peut s'écrire

$$z^3 - \frac{231}{572} z^2 + \frac{105}{2288} z - \frac{35}{27456} = 0.$$

En posant

$$z = v + \frac{231}{3.572} = v + \frac{77}{572},$$

on obtient

$$v^3 - \frac{2772}{572^2} v + \frac{13552}{3.572^3} = 0.$$

Soient

$$\frac{3}{4} r^2 = \frac{2772}{572^2}$$

et

$$\frac{1}{4} r^3 \sin 3\varphi = \frac{13552}{3.572^3},$$

ou

$$r^2 = \frac{3696}{572^2}$$

et

$$r^3 \sin 3\varphi = \frac{54208}{3.572^3},$$

on aura

$$v_1 = r \sin \varphi, \quad v_2 = r \sin(60^\circ - \varphi)$$

et

$$v_3 = -r \sin(60^\circ + \varphi).$$

$$\begin{aligned} \log \sin 3\varphi &= \log 54208 - \log 3 - 3 \log 572 - 3 \log r \\ &= 4,7340634 - 0,4771213 - 8,2721880 \\ &\quad + 2,9205900 = 7,6546534 - 8,7493093 \\ &= 8,9053441 - 10; \end{aligned}$$

de là

$$3\varphi = 4^\circ\, 36'\, 45'',0;$$

donc

$$\varphi = 1^\circ\, 32'\, 15'',$$

et, par suite,

$$\begin{aligned} \log v_1 = \log r + \log \sin \varphi &= -0,9735300 + 8,4286402 - 10 \\ &= 0,4551102 - 3, \end{aligned}$$

donc

1re racine $\qquad v_1 = 0,002851742.$

$$\begin{aligned} \log v_2 &= \log r + \log \sin(60^\circ - \varphi) = \log r + \log \sin 58^\circ\, 27'\, 45'' \\ &= -0,9735300 + 9,93059145 - 10 \\ &= \quad 0,95706145 - 2, \end{aligned}$$

donc

2e racine $\qquad v_2 = 0,09058607.$

$$\begin{aligned} \log(-v_3) &= \quad \log r + \log \sin(60^\circ + \varphi) \\ &= \quad \log r + \log \sin 61^\circ\, 32'\, 15'' \\ &= -0,9735300 + 9,9440527 - 10 \\ &= \quad 0,9705227 - 2, \end{aligned}$$

donc

3e racine $\qquad v_3 = -0,09343782.$

Pour avoir les valeurs de z, il suffit d'ajouter successivement aux valeurs de v_1, v_2 et v_3 la fraction $\frac{77}{572}$.

On a

$$\frac{77}{572} = 0,134615384\ldots,$$

donc

$$\begin{aligned} z_1 &= v_1 + 0,134615384 = 0,137467126, \\ z_2 &= v_2 + 0,134615384 = 0,225201454, \\ z_3 &= v_3 + 0,134615384 = 0,041177564. \end{aligned}$$

Pour avoir les valeurs de x, il suffit d'extraire les racines carrées de z_1, z_2 et z_3, et d'ajouter 0,5 aux six valeurs qu'on obtient ainsi. On a

$$\begin{aligned} \sqrt{z_1} &= \pm 0,370\ 765\ 595, \\ \sqrt{z_2} &= \pm 0,474\ 553\ 953, \\ \sqrt{z_3} &= \pm 0,202\ 922\ 557, \end{aligned}$$

donc

$$x_{1,2} = 0,5 \pm \sqrt{z_1}, \qquad x_{3,4} = 0,5 \pm \sqrt{z_2}, \qquad x_{5,6} = 0,5 \pm \sqrt{z_3},$$

ou

$$\begin{aligned} x_1 &= 0,870\ 765\ 595, \\ x_2 &= 0,129\ 234\ 405, \\ x_3 &= 0,974\ 553\ 953, \\ x_4 &= 0,025\ 446\ 047, \\ x_5 &= 0,702\ 922\ 557, \\ x_6 &= 0,297\ 077\ 443 \end{aligned}$$

En les écrivant dans l'ordre ascendant de grandeur, on a

$$\begin{aligned} x_1 &= 0,025\ 446\ 047, \\ x_2 &= 0,129\ 234\ 405, \\ x_3 &= 0,297\ 077\ 443, \\ x_4 &= 0,702\ 922\ 557, \\ x_5 &= 0,870\ 765\ 595, \\ x_6 &= 0,974\ 553\ 953. \end{aligned}$$

Nous ne pouvons pas compter beaucoup sur l'exactitude des deux dernières décimales, car nous n'avons pris les logarithmes qu'avec sept décimales; néanmoins, nous sommes portés à les croire exactes, car l'application de la méthode de Graeff nous a donné d'une manière irrécusable les valeurs qui suivent :

$$
\begin{aligned}
x_1 &= 0,025\ 446 \quad (0),\\
x_2 &= 0,129\ 234 \quad (4),\\
x_3 &= 0,297\ 077 \quad (4),\\
x_4 &= 0,702\ 922 \quad (6),\\
x_5 &= 0,870\ 765 \quad (6),\\
x_6 &= 0,974\ 554 \quad (0).
\end{aligned}
$$