Nouvelles annales de mathématiques

Théodore Parmentier

Réponse à la précédente lettre

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 16 (1857), p. 12-15

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1857_1_16__12_1>

RÉPONSE A LA PRÉCÉDENTE LETTRE.

Je vous renvoie la Note critique que vous m'avez communiquée relativement à ma formule de quadrature. Votre *abonné* dit : « L'auteur affirme que cette formule est toujours préférable à celle de M. Poncelet, mais cette assertion ne me paraît pas fondée. » D'abord je n'*affirme* rien, je *démontre* que lorsque les éléments dans lesquels on partage la courbe sont assez petits, ma formule est beaucoup plus approchée que celle de M. Poncelet, et cette assertion n'est ni plus ni moins fondée qu'un théorème quelconque d'algèbre ou de géométrie. J'ai donc lieu d'être fort étonné de voir contester une chose évidemment incontestable par tous ceux qui ont compris les considérations analytiques qui m'ont conduit à modifier la formule de M. Poncelet, et je pourrais laisser sans réponse le singulier raisonnement de votre abonné. Je veux pourtant dire en quoi il pèche, ne fût-ce que pour l'édification personnelle de son auteur.

Considérant le cas d'une courbe concave vers l'axe des abscisses, votre abonné dit que l'on a, suivant les cas,

$$\frac{A + A'}{2} \gtrless S,$$

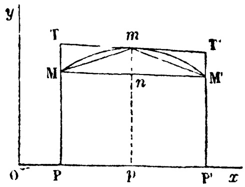
et il prend le cas où $\frac{A + A'}{2} > S$. A partir de là son raisonnement est irréprochable, et il démontre que dans ce cas $\frac{A + A'}{2}$ est plus approché de S que $\frac{A + 2A'}{3}$, c'est-à-dire que la formule de M. Poncelet donne un résultat plus approché que la mienne. Il n'y a qu'un petit malheur à cela, c'est que le *cas* examiné par l'auteur ne peut jamais se présenter. Si votre abonné avait lu ma Note avec un peu plus d'attention, il aurait vu que je démontre (p. 379) que $S - A'$ est plus petit que $S - A$ (en valeur absolue), ou, en d'autres termes, que la somme des aires des trapèzes circonscrits est plus rapprochée de l'aire de la courbe que la somme des aires des trapèzes inscrits. Or, dans le cas d'une courbe concave vers l'axe des abscisses, A' est plus grand que A, et comme S est plus approché de la plus grande de ces deux quantités, il s'ensuit que S est plus grand que leur moyenne arithmétique, et que l'on a

$$\frac{A + A'}{2} < S.$$

Votre abonné part donc d'une hypothèse absurde en posant

$$\frac{A + A'}{2} > S.$$

Avant d'établir par des considérations de séries que $S - A$ est plus grand que $S - A'$ (en valeur absolue), j'avais dit (p. 372) qu'il est facile de voir *par de simples considérations géométriques* que la somme des aires des trapèzes circonscrits conduit à un résultat plus approché que celle des trapèzes inscrits, mais je n'avais pas cru devoir démontrer cette proposition élémentaire. Comme votre abonné ne s'en est pas rendu compte, ce qui l'a fait tomber dans son raisonnement paradoxal, je répare ici cette omission.



Soit

$$Pp = pP'.$$

Il s'agit de démontrer que la différence entre l'aire inscrite et la courbe est plus grande que celle entre l'aire circonscrite et la courbe, ou que le segment curviligne MmM' est plus grand que la somme des segments curvilignes $MTm + mT'M'$.

Menons les cordes Mm et mM'. Il est facile de voir que le triangle MmM' est égal à la somme des triangles $MTm + mT'M'$. En effet, on a

$$\text{triangle } MmM' = \frac{MM' \times mn}{2} = Pp \times mn,$$

$$\text{triangle } MTm = \frac{MT \times Mn}{2} = Pp \times \frac{MT}{2},$$

$$\text{triangle } m\,T'\,M' = \frac{M'T' \times M'n}{2} = Pp \times \frac{M'\,T'}{2},$$

et somme des triangles

$$MTm + m\,T'\,M' = Pp\,\frac{(MT + M'T')}{2} = Pp \times mn,$$

même expression que pour le triangle MmM'.

Or l'aire curviligne MmM' est évidemment plus grande que le triangle MmM', et la somme des aires curvilignes $MTm + mT'M'$ plus petite que la somme des triangles de même nom. Donc, enfin, l'aire curviligne MmM' est plus grande que la somme des aires curvilignes

$$MmT + mT'M' \; (*).$$

(*) Je profite de cette occasion pour dire aux lecteurs des *Nouvelles Annales* qu'étant devant Sébastopol lors de l'impression du numéro d'octobre 1855, je n'ai pu surveiller moi-même la correction des épreuves, et pour les prier de vouloir bien corriger eux-mêmes plusieurs fautes essentielles signalées dans les *errata* du numéro.

THÉODORE PARMENTIER.