NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

J.-CH. DUPAIN

Quadratures par approximation

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 17 (1858), p. 288-295

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1858_1_17__288_1>

QUADRATURES PAR APPROXIMATION;

PAR M. J.-CH. DUPAIN,
Professeur-agrégé, ancien élève de l'École Normale.

I.

Nous nous proposons de comparer diverses méthodes employées pour la quadrature approchée des courbes.

Nous représenterons par

$$y = f(x)$$

l'équation connue ou non de la courbe et par h l'intervalle *constant* des ordonnées dont le nombre toujours impair sera désigné par $n+1$; nous prendrons enfin la première ordonnée sur l'axe de y et nous remarquerons que les ordonnées successives ont pour expression

$$f(0),\ f(h),\ f(2h),\ \ldots,\ f(nh).$$

Par les extrémités des ordonnées de rang pair, nous menons des tangentes jusqu'à la rencontre des ordonnées de rang impair, prolongées s'il le faut, et nous obtenons une sorte de polygone circonscrit, à angles rentrants, ayant pour mesure

$$(1)\qquad A = 2hS_p;$$

le signe S_p indique la somme des ordonnées de rang pair.

On peut ensuite, avec Simpson, joindre les extrémités des ordonnées de rang impair et former un polygone inscrit; mais il est préférable, comme le remarque M. Piobert (*Nouvelles Annales*, t. XIII, p. 327), de considérer un polygone ayant pour sommets les extrémités de la première ordonnée, de la dernière et de toutes celles de rang pair. Ce polygone a pour mesure

$$(2)\qquad B = h\left\{2S_p + \frac{f(0)+f(nh)-f(h)-f[(n-1)h]}{2}\right\}.$$

Comme on ne suppose aucune inflexion dans les limites de la quadrature, l'aire M de la courbe est évidemment une moyenne entre celle des polygones A et B :

$$(3)\qquad M = B + \frac{A-B}{R}.$$

Il existe pour chaque courbe en particulier une valeur de R qui donnerait l'aire exacte, mais on ne la connaît pas, et la question est ordinairement d'en trouver à priori une valeur générale assez simple et convenant d'une manière assez approchée à toute espèce de courbes. M. Piobert, dans le Mémoire déjà cité, a calculé une Table de valeurs de R pour des courbes de diverses amplitudes; mais, en admettant la légitimité de son point de départ, l'emploi de la Table exige la connaissance de l'angle formé par les cordes et les tangentes, opération toujours bien délicate, qui devient impossible si la courbe n'est pas tracée. Aussi le savant académicien propose de prendre une moyenne entre les nombres de sa Table et indique une formule développée dans le seul cas où $R=\frac{3}{2}\cdot$ M. Parmentier a obtenu la *même* formule par des raisonnements tout différents (*Nouvelles Annales*, t. XIV, p. 370); avec nos notations, nous écrirons

$$(4)\qquad h\left\{2S_p+\frac{f(0)+f(nh)-f(h)-f[(x-1)h]}{6}\right\}.$$

Antérieurement M. Poncelet avait pris $R=2$, ce qui lui donnait

$$(5)\qquad h\left\{2S_p+\frac{f(0)+f(nh)-f(h)-f[(n-1)h]}{4}\right\}.$$

Vers la fin du dernier siècle, Simpson avait fait aussi $R=\frac{3}{2}$; mais, ainsi qu'il a été dit plus haut, il construisait différemment le polygone inscrit et obtenait

$$(6)\qquad \frac{h}{3}(S_e+2S_i+4S_p)$$

qui est la somme de la première et de la dernière ordonnées, S_i la somme des autres ordonnées de rang impair.

Nous trouvons enfin dans les *Nouvelles Annales* (t. X,

p. 415) une formule de M. Catalan :

$$(7)\quad h\left\{\begin{array}{l} S-\frac{5}{8}[f(0)+f(nh)]+\frac{1}{6}\{f(h)+f[(n-1)h]\} \\ \quad -\frac{1}{24}\{f(2h)+f[(n-2)h]\} \end{array}\right\}.$$

II.

Lorsqu'on a seulement, pour mesurer une courbe, la connaissance des ordonnées, il règne une telle indétermination, que je crois impossible d'affirmer à priori que telle ou telle formule l'emportera *toujours* sur les autres par l'exactitude. Je vais donc faire une hypothèse particulière.

J'admets que l'ordonnée de la courbe puisse se développer en une série *rapidement* convergente

$$(8)\quad \left\{\begin{array}{l} y=f(0)+xf'(0)+\frac{x^2}{2}f''(0)+\frac{x^3}{6}f'''(0) \\ \quad +\frac{x^4}{24}f^{\text{IV}}(0)+\ldots. \end{array}\right.$$

C'est supposer implicitement, comme on le fait dans l'interpolation, que la courbe est parabolique, et, de plus, que la différence des dernières ordonnées aux premières n'est pas excessive; nous admettons aussi qu'il n'y ait pas de tangente parallèle aux y, circonstance qui ne peut se présenter dans les paraboles dont nous parlons.

Notre hypothèse comprend encore les hyperboles ayant pour type

$$y=b^{m+1}(x+a)^{-m},$$

pourvu que $\frac{x}{a}$ reste très-petit.

L'intégration de la série (8) entre o et nh nous donnera

$$(9)\quad \left\{\begin{aligned} &nhf(0) + \frac{n^2h^2}{2}f'(0) + \frac{n^3h^3}{6}f''(0) + \frac{n^4h^4}{24}f'''(0) \\ &\qquad + \frac{n^5h^5}{120}f^{\text{IV}}(0) + \ldots \end{aligned}\right.$$

Si nous calculons par l'équation (8) les ordonnées équidistantes et que nous portions les valeurs ainsi obtenues dans les formules (1), (2), (4), (5), (6), (7), chacune d'elles reproduira le développement (9) accru de certaines *erreurs* indiquées dans le tableau suivant :

Polygone circonscrit.

$$-\frac{nh^3}{6}f''(0) - \frac{n^2h^4}{12}f'''(0)\ldots$$

Polygone inscrit.

$$\left(\frac{2n-3}{6}\right)h^3f''(0) + \left(\frac{2n^2-3n}{12}\right)h^4f'''(0) + \ldots$$

M. Poncelet.

$$\left(\frac{n-3}{12}\right)h^3f''(0) + \left(\frac{n^2-3n}{24}\right)h^4f'''(0) + \ldots$$

MM. Piobert et Parmentier.

$$-\frac{1}{6}h^3f''(0) - \frac{n}{12}h^4f'''(0) + \ldots$$

Simpson.

$$+\frac{n}{180}h^5f^{\text{IV}}(0) + \ldots$$

M. Catalan.

$$-\frac{h^5}{24}f^{\text{IV}}(0) + \ldots$$

Effectuons les mêmes substitutions dans l'expression (3 et déterminons R de manière à faire disparaître les termes en h^3 qui se trouvent dans le développement de l'erreur, il arrive que les termes en h^4 disparaissent aussi. Il faut pour cela poser

$$R = \frac{3n-3}{2n-3},$$

ce qui donne la formule *nouvelle*

$$\frac{(2n-3)A + nB}{3n-3}$$

ou

$$h\left\{2S_p + \left[\frac{f(0)+f(nh)-f(h)-f[(n-1)h]}{6}\right]\frac{n}{n-1}\right\},$$

qui est en erreur de

$$\left(\frac{n}{360} - \frac{n^2}{72}\right) h^5 f^{\text{IV}}(0) + \ldots .$$

Cette formule nouvelle, celles de Simpson et de M. Catalan donnent à peu près la même approximation, puisque, pour toutes les trois, l'erreur ne commence qu'au terme en $f^{\text{IV}}(0)$ qui dans notre hypothèse est très-petit. Elles sont donc préférables, sous le rapport de l'exactitude, aux quatre premières, mais la formule de M. Catalan est moins simple que celle de Simpson, qui elle-même exige l'emploi de plus d'ordonnées que la nôtre.

Pour comparer les erreurs des quatre autres formules, je m'arrêterai aux premiers termes qui, dans notre hypothèse, sont prépondérants, et, au point de vue de l'exactitude, j'établirai l'ordre suivant : MM. Piobert et Parmentier, M. Poncelet, polygone circonscrit, polygone inscrit.

Mais l'exactitude n'est pas la qualité la plus essentielle ; tous les praticiens que j'ai consultés m'ont avoué que la méthode des trapèses leur suffisait, et, pour ma part, je préférerais à toutes les autres la règle de M. Poncelet, à laquelle nous n'avons donné que le cinquième rang, mais qui, à nos yeux, a le grand mérite de faire connaître une limite TOUJOURS certaine de l'erreur $\frac{A-B}{2}$.

Nous avons examiné jusqu'ici un cas *favorable*; il pourrait arriver que des tangentes fussent parallèles aux y ou que les ordonnées prissent de rapides accroissements; il faudrait alors ou changer les axes, ce qui suppose la courbe tracée, ou multiplier les ordonnées, et si ces moyens sont impraticables, on se résignera à une faible approximation que la formule de M. Poncelet fera toujours connaître.

III.

Il semble au premier abord que l'indétermination serait moins grande si l'on savait tracer les tangentes; mais, en y réfléchissant, on reconnaît qu'il existe une infinité de courbes qui touchent deux droites données en deux points donnés.

On pourrait cependant mener aux extrémités de toutes les ordonnées des tangentes qui par leurs intersections mutuelles formeraient un polygone *réellement* circonscrit C; on joindrait les extrémités des ordonnées consécutives pour former un second polygone inscrit I, et il s'agirait toujours de prendre une moyenne

$$I + \frac{C - I}{R}.$$

Pour calculer C, il faudrait tracer les ordonnées des points d'intersection des tangentes consécutives. Remarquons encore que le polygone C se rapprochera ordinairement plus de la courbe que le polygone à angles rentrants A que nous avions d'abord considéré; c'est là l'avantage que procure le tracé des tangentes.

Pour déterminer R, on pourrait remplacer chaque petit arc de courbe compris entre deux ordonnées successives par un arc de parabole du second degré ayant mêmes extrémités et mêmes tangentes à ces extrémités. Je crois l'arc de parabole dans ces conditions préférable en général à l'arc de cercle proposé par M. Piobert (*Nouvelles Annales*, t. XIII, p. 328), parce que l'équation de la parabole contient quatre paramètres et celle du cercle trois seulement.

Dans la parabole, le triangle formé par deux tangentes et leur corde de contact est triple du segment limité par les tangentes et la courbe, ce qui nous conduirait à adopter pour R la valeur $\frac{3}{2}$ et pour la surface cherchée

$$\frac{\mathrm{I}+2\mathrm{C}}{3}.$$

Mais, nous le répétons, il nous paraît impossible d'affirmer que cette méthode soit *toujours* préférable à une autre, et on devrait, selon nous, adopter, comme dans le § II, $R = 2$, ce qui donne pour limite *certaine* de l'erreur $\frac{\mathrm{I}-\mathrm{C}}{2}$.

Cependant, comme il est assez facile de tracer avec la règle une parabole quand on connaît deux tangentes et leurs points de contact, on pourrait examiner si les petits arcs de la courbe donnée s'approchent assez des arcs paraboliques pour prendre $R = \frac{3}{2}$.