FAURE

Solution de la question 262 (Catalan)

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 17 (1858), p. 348-349

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1858_1_17__348_1>

SOLUTION DE LA QUESTION 262 (CATALAN)

(voir t XI, p. 401),

PAR M. FAURE.

Si l'on considère une suite de valeurs $y_n, y_{n-1}, \ldots, y_1, y_0$ que prend une certaine fonction de x, lorsque la variable reçoit une série de valeurs $x_n, x_{n-1}, \ldots, x_1, x_0$, on trouve pour la $n^{\text{ième}}$ différence de y_n l'expression

$$\Delta^n y_n = y_0 - n y_1 + \frac{n(n-1)}{1.2} y_2 \ldots \pm y_n.$$

La considération de cette série donne immédiatement la solution de la question 262. Ainsi si l'on pose

$$C_{pn} = \frac{p(p-1)(p-2)\ldots(p-n+1)}{1.2.3\ldots n},$$

on aura

$$(-p)^n = -\frac{n}{1} C_{pn} + \frac{n(n-1)}{1.2} C_{2p,n} \ldots \pm C_{np,n},$$

n étant un nombre entier et positif, p une quantité quelconque.

Soit en effet

$$C_{px,n} = \frac{px(px-1)(px-2)\ldots(px-n+1)}{1.2.3\ldots n.},$$

une fonction de x. Si l'on donne à x les valeurs $0, 1, 2, \ldots, n$, on obtient successivement

$$0, \quad C_{p,n}, \quad C_{2p,n}, \ldots, C_{np,n},$$

donc

$$\Delta^n C_{np,n} = 0 - \frac{n}{1} C_{pn} + \frac{n(n-1)}{1.2} C_{2p,n} \ldots \pm C_{np,n};$$

d'ailleurs la différence $n^{ième}$ de $C_{np,n}$ est évidemment $(-p)_n$; donc, etc.