NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

MAHUET

DELAFOND

Solution de la question 609

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 1 (1862), p. 179-182

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1862_2_1__179_1>

SOLUTION DE LA QUESTION 609

(voir p. 31);

PAR MM. MAHUET ET DELAFOND,
Élèves de spéciales du lycée de Lyon.

Ire Solution. — La droite Rr est la polaire du point C par rapport au cercle $Ff'fF'$ décrit sur FF' comme diamètre. Donc

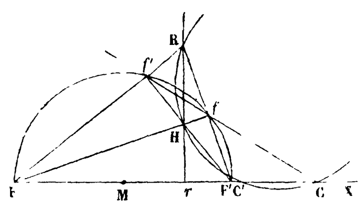
$$MC.Mr = \overline{MF'}^2$$

ou

$$(Mr + rC)Mr = \overline{MF'}^2$$

$$Mr.rC = \overline{MF}^2 - \overline{Mr}^2$$

$$= (MF + Mr)(MF - Mr) = Fr.rF'.$$



Or, d'après un théorème de géométrie, on a

$$rH.Rr = Fr.rF' ;$$

de plus

$$rH.rR = rC'.rC,$$

C′ étant le second point de rencontre du cercle (R, H, C) avec FF′.

On aura donc

$$Mr\ rC = rC'.rC ;$$

on en déduit

$$rC' = Mr.$$

Reprenant l'égalité

$$MC.Mr = \overline{MF'}^2,$$

on en tire

$$2Mr.MC = 2\overline{MF'}^2,$$

$$MC'.MC = 2\overline{MF'}^2 = \frac{\overline{FF'}^2}{2}.$$

Donc toutes les tangentes issues de M sont d'une longueur constante $= \frac{FF'}{\sqrt{2}}$.

IIe Solution, par l'analyse. — Soient pris pour axes rR et rF'; soient p et p' les abscisses de F et de F', q l'ordonnée de R. Les droites FR, F'R auront pour équations

$$\text{FR}\left|\frac{y}{q}+\frac{x}{p'}=1,\right. \qquad \text{F}'\text{R}\left|\frac{y}{q}+\frac{x}{p}=1..\right.$$

Pour trouver l'équation de ff', prenons une combinaison linéaire du cercle décrit sur FF' comme diamètre et du système des deux droites FR et F'R.

$$\left(\frac{y}{q}+\frac{x}{p'}-1\right)\left(\frac{y}{q}+\frac{x}{p}-1\right)=0$$

est l'équation du système des deux droites, qui peut s'écrire

$$(1) \qquad \left\{\begin{array}{l} pp'y^2+q^2x^2+(p+p')\,qyx \\ -2pp'qy-(p+p')\,q^2x+pp'q^2 \end{array}\right\}=0.$$

L'équation du cercle décrit sur FF' est

$$\left(x-\frac{p+p'}{2}\right)^2+y^2=\left(\frac{p-p'}{2}\right)^2$$

ou

$$(2) \qquad x^2+y^2-(p+p')\,x+pp'=0.$$

Multiplions l'équation (2) par q^2 et retranchons de l'équation (1), nous aurons

$$y^2(q^2-pp')-xy\,(p+p')\,q+2pp'q.y=0,$$

qui nous donne

$$y=0$$

et

$$(3) \qquad y\,(q^2-pp')-x\,(p+p')\,q+2pp'q=0.$$

Cette dernière équation est l'équation de ff'.

Les coordonnées de C seront

$$y = 0, \quad x = \frac{2pp'}{p+p'}.$$

L'équation générale du cercle (R, H, C) sera

$$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0.$$

Pour avoir la puissance de ce cercle sur le point M, il suffira de substituer dans cette équation les coordonnées de M, ce qui donnera

$$\left(\frac{p+p'}{2}\right)^2 + \overline{\frac{p+p'}{2}}\,A + C.$$

Reste à calculer A et C.

En faisant $x = 0$ dans l'équation du cercle, nous aurons

$$C = Rr.rH = -pp'.$$

Si l'on fait $y = 0$, l'abscisse de C étant $\frac{2pp'}{p+p'}$, celle de C' sera $-\frac{pp'}{\left(\frac{2pp'}{p+p'}\right)} = -\frac{p+p'}{2}$. On aura

$$-A = -\frac{p+p'}{2} + \frac{2pp'}{p+p'} = -\frac{(p-p')^2}{2(p+p')}.$$

Donc la puissance du cercle sur M sera

$$\left(\frac{p+p'}{2}\right)^2 + \frac{(p+p')}{2}\,\frac{(p-p')^2}{2(p+p')} - pp'$$

$$= \left(\frac{p+p'}{2}\right)^2 + \left(\frac{p-p'}{2}\right)^2 - pp'$$

$$= 2\left(\frac{p-p'}{2}\right)^2 = 2.\overline{MF}^2 = \frac{\overline{FF'}^2}{2}.$$

On retrouve ainsi le même résultat que précédemment.