NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

H. LEMONNIER

Note sur la méthode d'approximation de Newton

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 1 (1862), p. 188-191

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1862_2_1__188_0>

NOTE SUR LA MÉTHODE D'APPROXIMATION DE NEWTON;

PAR M. H. LEMONNIER,
Professeur de mathematiques speciales au lycée de Lyon.

L'équation

$$fx = 0$$

étant donnée, si x en est une racine comprise entre deux nombres α et β qui soient des collections d'unités du même ordre que $\frac{1}{10^n}$ ($n \gtrless 0$ entier), et qu'on puisse par l'expression $\alpha - \frac{f\alpha}{f'\alpha}$ ou par $\beta - \frac{f\beta}{f'\beta}$ gagner $n + p$ nouveaux chiffres sans que l'erreur atteigne une unité du dernier ordre, qu'arrive-t-il quand on substitue à l'équation $fx = 0$ une transformée $\varphi y = 0$ due au changement de x en ty?

Soit

$$fx = f(ty) = \varphi y.$$

On aura

$$f'x = \varphi' y \cdot \frac{1}{t}, \quad f''x = \varphi'' y \cdot \frac{1}{t^2};$$

d'où il suit que si $f'x$ varie dans un même sens et ne s'annule pas, il en est de même de $\varphi' y$ pour les valeurs de y correspondantes à celles de x, que si fx et $f''x$ sont de même signe, φy et $\varphi'' y$ sont également de même signe.

En conséquence, si l'on pose

$$\alpha = t\alpha', \quad \beta = t\beta',$$

quand les premières conditions à remplir pour une bonne application de la méthode de Newton seront satisfaites à l'égard de α et de β, elles auront lieu pour l'équation $\varphi y = 0$ à l'égard de α' et de β'.

Soit

$$n = \alpha + h.$$

Comme

$$0 = f\alpha + hf'\alpha + \frac{h^2}{1.2} f''(\alpha + \theta h) \quad \left(\theta \begin{smallmatrix} > 0 \\ < 1 \end{smallmatrix}\right),$$

on aura

$$a = \alpha - \frac{f\alpha}{f'\alpha} + \omega,$$

avec

$$\omega = -\frac{h^2}{1.2} \frac{f''(\alpha + \theta h)}{f'(\alpha)}.$$

Supposons $f\alpha$ et $f''\alpha$ de même signe.

Les conditions connues étant remplies, on aura

$$\omega > 0.$$

On considère alors la fraction $-\frac{f''x}{2f'x}$; on évalue un maximum A des valeurs numériques de son numérateur dans l'intervalle de α à β, un minimum $2b$ de celui de son dénominateur.

De là

$$\omega < \frac{A}{2b} h^2,$$

de sorte que si

$$\beta - \alpha = \frac{1}{10^n} \quad \text{et} \quad \frac{A}{2b} < \frac{1}{10^p} \quad (p \text{ entier} \gtrless 0),$$

on a

$$\omega < \frac{1}{10^{2n+p}}.$$

On en conclut, comme on le sait, que si $n + p > 0$, il suffit d'évaluer $-\frac{f\alpha}{f'\alpha}$ jusqu'à l'ordre $\frac{1}{10^{2n+p}}$, d'augmenter le résultat d'une unité de son dernier ordre, pour obtenir un nombre h_1 tel que $\alpha + h_1$ est une valeur approchée de a à une unité près de l'ordre de son dernier chiffre. On décide par une substitution dans fx si l'erreur est par défaut ou par excès. On a gagné ainsi $n + p$ chiffres.

Cela rappelé, si l'on pose

$$a = fa', \quad a' = \alpha' + h',$$

on aura

$$a = \alpha' - \frac{\varphi\alpha'}{\varphi'\alpha'} + \omega',$$

avec

$$\omega' = -\frac{\varphi''(\alpha + \theta' h')}{2\varphi'\alpha'} h'^2.$$

Considérons la fraction $-\frac{\varphi'' y}{2\varphi' y}$ en faisant varier y de α' à β'. Le maximum des valeurs absolues de son numérateur correspondra à celui de $f'' x$ et sera At^2 à cause de $\varphi'' y = t^2 f'' x$, puis le minimum de celles de $\varphi' y$ sera bt.

De là

$$\omega' < \frac{At^2}{2bt} h'^2,$$

et puisqu'on a

$$h = a - \alpha = ta' - t\alpha' = th',$$

il s'ensuit

$$\omega' < \frac{Ah^2}{2b} \cdot \frac{1}{t} < \frac{1}{10^{2n+p}} \cdot \frac{1}{t}$$

Supposons d'abord que t soit 10^q ($q \gtrless 0$ entier). Alors l'expression de α' ne différera de celle de α que par la position d'une virgule.

On aura

$$\beta' - \alpha' = \frac{\beta - \alpha}{t} = \frac{1}{10^{n+q}},$$

$$\omega' < \frac{1}{10^{2n+p+q}}.$$

Le calcul de $-\frac{\varphi\alpha'}{\varphi'\alpha'}$ devra donc se pousser jusqu'à l'ordre $\frac{1}{10^{2n+p+q}}$. On gagnera donc $n+p$ chiffres, les mêmes que dans le calcul de a en partant de α, et ainsi de suite en continuant.

L'emploi de la transformée ne pourra donc ni faire perdre, ni faire gagner, au moins pour la rapidité de l'approximation.

Pour étendre cela à toute valeur de t, prenons l'erreur relative qui concerne h quand $-\frac{f\alpha}{f'\alpha}$ en est la valeur approchée.

La fin prochainement.