NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

DIEU

Concours d'agrégation aux lycées (année 1845)

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 1 (1862), p. 193-206

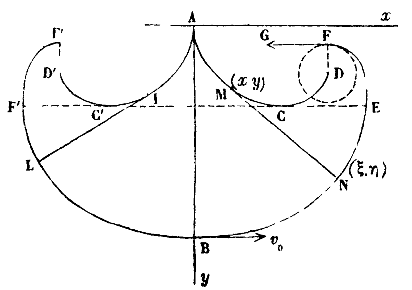
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1862_2_1__193_0>

CONCOURS D'AGRÉGATION AUX LYCÉES (ANNÉE 1845);

Par M. DIEU,
Agrege, Docteur ès Sciences.

Composition de Mécanique.

« Un point matériel pesant m est suspendu par un fil » flexible, inextensible et sans masse à un point fixe A; » ce pendule est mis en mouvement dans un plan verti- » cal où le fil s'enroule sur une courbe passant par le » point A et touchant en ce point la verticale. Quelle » doit être cette courbe pour que la tension du fil soit » constante pendant un certain temps? Quelles sont les » lois du mouvement, et pourra-t-il être oscillatoire! On » donne la longueur l du fil et la vitesse v_0 du mobile m » au point le plus bas B de la trajectoire. »



I. Soient:

ACD la courbe demandée et BEF la développante qui est décrite par le point m;

s la longueur d'un arc AM de ACD;

N la position de m lorsque le fil est appliqué sur AM;

x, y les coordonnées de M; ξ, η celles de N;
g la gravité.

Le principe de Leibnitz donne

$$(1)\qquad v^2 = v_0^2 + 2g(\eta - l)$$

La force centrifuge rapportée à l'unité de masse est $\frac{v^2}{l-s}$ en N, car le rayon de courbure de BEF en ce point est $l-s$; la composante de la gravité suivant le prolongement de la partie droite MN du fil est d'ailleurs $g\frac{dy}{ds}$: on doit donc avoir d'après l'énoncé, du moins pendant un certain temps,

$$(2)\qquad \frac{v^2}{l-s} + g\frac{dy}{ds} = hg,$$

h désignant un coefficient constant. Pour que cette équation s'applique quand le mobile est en B, le coefficient h doit être déterminé d'après

$$\frac{v_0^2}{l} + g = hg,$$

d'où

$$h = 1 + \frac{v_0}{gl}.$$

ainsi h *surpasse* 1.

Enfin y, η et s sont évidemment liés par

$$(3)\qquad \frac{\eta - y}{l-s} = \frac{dy}{ds}.$$

Remplaçant dans l'équation (2) v^2 par son expression immédiatement donnée par l'équation (1), η par son expression $y + (l-s)\frac{dy}{ds}$ tirée de l'équation (3), puis v_0^2

par $gl(k-1)$, on obtient

$$3(l-s)\frac{dy}{ds}+2y+ks-3l=0.$$

Cette équation rentre dans un type connu; son intégrale est

$$y=\frac{3-k}{2}l+a(l-s)^{\frac{2}{3}}-k(l-s),$$

a désignant une constante arbitraire. Il ne reste qu'à déterminer a de manière que y soit nulle en même temps que s pour avoir en fonction de s l'y de la courbe demandée :

$$(4)\qquad y=\frac{3-k}{2}l+\frac{3}{2}(k-1)l^{\frac{1}{3}}(l-s)^{\frac{2}{3}}-k(l-s),$$

d'où

$$(5)\qquad \frac{dy}{ds}=k-(k-1)\sqrt[3]{\frac{l}{l-s}}.$$

La forme et l'étendue de ACD se déduisent facilement de ces deux formules :

1° s augmentant depuis zéro jusqu'à

$$\left[1-\left(\frac{k-1}{k}\right)^3\right].l=s',$$

$\frac{dy}{ds}$ diminue à partir de 1, y augmente à partir de 0, et pour $s=s'$, on a

$$\frac{dy}{ds}=0,\quad y=\frac{3k-1}{2k^2}l=y'.$$

Donc ACD a d'abord un arc AC de longueur s', convexe vers Ay, dont la tangente en C est parallèle à Ax, c'est-à-dire horizontale.

2° s augmentant encore depuis s' jusqu'à

$$\left[1-\left(\frac{k-1}{k+1}\right)^3\right] l = s'',$$

$\frac{dy}{ds}$ continue de décroître en prenant des valeurs négatives, y qui a été en croissant jusqu'à y', décroît à partir de cette valeur, et pour $s = s''$ on a

$$\frac{dy}{ds} = -1, \quad y = \frac{8kl}{(k+1)^3} = y''.$$

La courbe ACD a donc encore un arc CD de longueur $s'' - s'$ se raccordant avec AC, concave vers Ay, et dont la tangente en D est parallèle à cet axe.

On ne peut pas donner à s des valeurs supérieures à s'', car il y répondrait, d'après la formule (5), des valeurs de $\frac{dy}{ds}$ inférieures à -1, ce qui, à cause de la signification géométrique de ce rapport différentiel, équivaut à une *imaginarité algébrique;* D *est donc un point d'arrêt.* On ne peut pas non plus donner à s des valeurs négatives, car il y répondrait des valeurs de $\frac{dy}{ds}$ supérieures à 1. Mais il est clair que les équations (4) et (5) sont vérifiées par l'y et l's de l'arc AC′D′ symétrique de ACD par rapport à Ay, pourvu qu'on regarde s comme croissant aussi de O à s'' sur cet arc en partant de A.

Afin de construire la courbe par points, on exprimera x et y en fonction d'une même variable auxiliaire. D'après la formule (5)

$$dx = \pm ds \sqrt{1 - \left[k - (k-1)\left(\frac{l}{l-s}\right)^{\frac{1}{3}}\right]^2}.$$

Posant

$$\frac{l-s}{l}=z^3, \tag{6}$$

d'où

$$ds=-3lz^2\,dz,$$

on a

$$dx=\mp 3l\sqrt{k-1}\,zdz\sqrt{-(k+1)z^2+2kz-(k-1)},$$

ou, par une transformation très-simple,

$$dx=\pm\frac{2l\sqrt{k-1}}{k+1}\Big[dz(-\overline{k+1}.z+k)\sqrt{-(k+1)z^2+2kz-(k-1)}$$
$$-k\,dz\sqrt{-(k+1)z^2+2kz-(k-1)}\Big].$$

L'intégrale de la première partie du facteur entre les crochets est

$$\frac{1}{3}[-(k+1)z^2+2kz-(k-1)]^{\frac{3}{2}}+\text{const.}$$

Pour intégrer la seconde partie qui revient à

$$-kdz\sqrt{k+1}\sqrt{\frac{1}{(k+1)^2}-\left(z-\frac{k}{k+1}\right)^2},$$

on posera

$$z-\frac{k}{k+1}=\frac{\sin\varphi}{k+1}. \tag{7}$$

Cette partie est ramenée ainsi à $-\frac{k}{(k+1)^{\frac{3}{2}}}\cos^2\varphi\,d\varphi$, dont l'intégrale facile à trouver est

$$-\frac{k}{2(k+1)^{\frac{3}{2}}}(\sin\varphi\cos\varphi+\varphi)+\text{const.}$$

Enfin par la substitution à z de son expression tirée de la formule (7), la première intégrale prend la forme très-simple $\frac{\cos^3\varphi}{3(k+1)^{\frac{3}{2}}}$ + const. On a donc

$$x = \text{const.} \pm \frac{l\sqrt{k-1}}{(k+1)^{\frac{5}{2}}}\left[\cos^3\varphi - \frac{3k}{2}(\sin\varphi\cos\varphi + \varphi)\right].$$

Pour déterminer la constante, on remarquera que la formule (6) donne $z = 1$ pour $s = 0$, la formule (7) $\varphi = \frac{\pi}{2}$ pour $z = 1$, d'où il suit que $x = 0$ doit répondre à $\varphi = \frac{\pi}{2}$: d'après cela il vient finalement

$$(8)\quad x = \pm \frac{l\sqrt{k-1}}{(k+1)^{\frac{5}{2}}}\left[\cos^3\varphi - \frac{3k}{4}\sin 2\varphi + \frac{3k}{2}\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)\right].$$

Les expressions de y et de $\frac{dy}{ds}$ en fonction de l'auxiliaire φ s'obtiennent par la substitution dans les équations (4) et (5), de la valeur de $l - s$ déduite des formules (6) et (7), savoir : $\left(\frac{k + \sin\varphi}{k+1}\right)^3 l$. On arrive ainsi à

$$(9)\quad y = \frac{l}{2(k+1)^{2}}[8k - 6k\sin\varphi + 3(k^2+1)\cos^2\varphi - 2k\sin^3\varphi],$$

$$(10)\quad \frac{dy}{ds} = \frac{k\sin\varphi + 1}{k + \sin\varphi}.$$

Nous venons de voir que $\varphi = \frac{\pi}{2}$ en A. Pour les points D et D′ où $s = s''$, on a $z = \frac{k-1}{k+1}$ d'après la formule (6), partant $\varphi = \frac{\pi}{2}$ d'après la formule (7); les coordonnées des points intermédiaires et le cosinus de l'angle que la tangente fait avec Ay se déduiront donc des trois formules précédentes en attribuant à φ des valeurs comprises entre $\frac{\pi}{2}$ et $-\frac{\pi}{2}$. On a pour les points extrêmes D, D'

$$x = \pm \frac{3k\pi l\sqrt{k-1}}{2(k+1)^{\frac{5}{2}}}.$$

II. Les équations (3), (4) et (5) donnent

$$\eta = \frac{3-k}{2} l + \frac{1}{2}(k-1) l^{\frac{1}{3}} (l-s)^{\frac{2}{3}}.$$

Substituant cette expression à η dans l'équation (1) et ayant égard à ce que $v_0^2 = gl(k-1)$, on trouve

$$(11) \qquad v = v_0 \sqrt[3]{\frac{l-s}{l}}.$$

D'après cette formule, v diminue à mesure que s augmente, comme cela doit être, et est égale à $\frac{v_0(k-1)}{k+1}$ pour $s = s''$.

Si l'on remplace v par son expression dans celle de la force centrifuge $\frac{v^2}{l-s}$, on a $\frac{v_0^2}{\sqrt[3]{l^2(l-s)}}$, d'où gk pour $s = s'$ et $g(k+1)$ pour $s = s''$. Ainsi $\frac{v^2}{l-s}$ augmente avec s, c'est-à-dire en même temps que la composante de la gravité suivant la partie rectiligne du fil diminue, devient égale à gk pour la position du système où cette composante serait nulle, enfin supérieure à gk pour les positions où elle ne serait plus dirigée suivant le prolongement du fil.

Il résulte évidemment de ces remarques qu'à un certain moment une partie du fil de longueur s'' sera appliquée sur l'arc ACD, et que le reste du fil sera alors vertical en DF. La première partie du fil restant sur ACD, et rien n'arrêtant le mouvement de m parvenu au point d'arrêt F de BEF, il doit, en vertu de sa vitesse acquise, dirigée suivant FG parallèle à Ax, se mettre à décrire la circonférence de rayon $DF = \left(\frac{k-1}{k+1}\right)^3 l$ dont D est le centre; mais *la tension du fil deviendra aussitôt variable*. On ne peut rien dire de plus sur le mouvement sans ajouter quelque condition à celles de l'énoncé, ce que nous nous abstiendrons de faire; dans ces conditions, *le mouvement n'est pas oscillatoire*.

La vitesse donnée v_0, que le mobile a en B, peut lui avoir été imprimée dans cette position; mais elle peut aussi être acquise dans un mouvement antérieur. Si, par exemple, une partie quelconque du fil de longueur s_1 (s_1 doit être moindre que s'') était d'abord appliquée sur l'arc $AI = s_1$ de la courbe AC′D′, symétrique de ACD par rapport à Ay, et si le reste du fil était dirigé suivant la tangente IL à cette courbe, en imprimant à m la vitesse $v_0 \sqrt[3]{\frac{l-s_1}{l}}$ suivant la tangente en L à BE′F′, symétrique de BEF, ce point matériel acquerrait la vitesse v_0 après avoir parcouru LB [η_1 désignant l'ordonnée de L, on a

$$\eta_1 = \frac{3-k}{2} l + \frac{1}{2}(k-1) l^{\frac{1}{3}} (l-s_1)^{\frac{2}{3}},$$

ce qui réduit effectivement

$$v_0^2 \left(\frac{l-s_1}{l}\right)^{\frac{2}{3}} + 2g(l-\eta_1) \quad \text{à} \quad gl(k-1) = v_0^2].$$

Dans ce cas la tension du fil serait égale à gk depuis le commencement du mouvement.

Il ne nous reste plus qu'à chercher le temps que le mobile m met à parcourir une partie quelconque de sa trajectoire. Considérons l'arc BN commençant au point le plus bas B de cette courbe, et soit t le temps employé à le décrire.

De

$$\xi - x = (l - s)\frac{dx}{ds}, \quad \eta - y = (l - s)\frac{dy}{ds},$$

on tire

$$\frac{d\xi}{dt} = (l - s)\frac{d^2x}{ds^2}\frac{ds}{dt}, \quad \frac{d\eta}{dt} = (l - s)\frac{d^2y}{ds^2}\frac{ds}{dt},$$

en remarquant que

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx}{ds}\frac{ds}{dt} \quad \text{et} \quad \frac{dy}{dt} = \frac{dy}{ds}\frac{ds}{dt}.$$

Remplaçant $\frac{d\xi}{dt}$, $\frac{d\eta}{dt}$ par ces valeurs dans

$$v^2 = \left(\frac{d\xi}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\eta}{dt}\right)^2,$$

on a

$$v^2 = (l - s)^2\frac{ds^2}{dt^2}\left[\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2\right].$$

Mettant au lieu de $\frac{d^2x}{ds^2}$ sa valeur $-\frac{dy}{ds}\frac{d^2y}{ds^2} : \frac{dx}{ds}$, réduisant au moyen de $\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 = 1$, et extrayant les racines carrées, on obtient

$$v = \pm (l - s)\frac{d^2y}{ds^2}\frac{ds}{dt} : \frac{dx}{ds},$$

formule générale assez remarquable de la vitesse d'un mobile en fonction des coordonnées de la développée de sa trajectoire.

Nous appliquerons cette formule à notre problème en faisant usage de la variable auxiliaire φ déjà employée; elle a, comme on va le voir, l'avantage de conduire à une expression de dt immédiatement intégrable. Les formules (6), (7) et (11) donnent

$$\frac{l-s}{s} = \left(\frac{k+\sin\varphi}{k+1}\right)^3, \quad v = v_0 \frac{k+\sin\varphi}{k+1};$$

on tire de la formule (10) par différentiation

$$\frac{d^2y}{ds^2} = (k^2-1)\frac{\cos\varphi}{(k+\sin\varphi)^2}\frac{d\varphi}{ds},$$

et de l'expression de dx en fonction de s par substitution à $\frac{l-s}{l}$ de la valeur précédente

$$\frac{dx}{ds} = \pm\sqrt{k^2-1}\cdot\frac{\cos\varphi}{k+\sin\varphi}.$$

Portant toutes ces valeurs dans la formule générale ci-dessus, et remplaçant v_0 par $gl(k-1)$, on obtient, en résolvant par rapport à dt,

$$dt = \pm\frac{1}{(k+1)^{\frac{3}{2}}}\sqrt{\frac{l}{g}}\,(k+\sin\varphi)\,d\varphi,$$

où il faut prendre le signe inférieur pour que dt soit positif, car φ décroît à partir de $\frac{\pi}{2}$. De là résulte

$$t = \frac{1}{(k+1)^{\frac{3}{2}}}\sqrt{\frac{l}{g}}\left[k\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)+\cos\varphi\right],$$

la constante introduite par l'intégration ayant été déterminée de manière que t soit nul pour $\varphi = \frac{\pi}{2}$ qui répond au point B.

Enfin pour $\varphi = -\frac{\pi}{2}$, on a le temps $\frac{k\pi}{(k+1)^{\frac{3}{2}}}\sqrt{\frac{l}{g}}$ que le mobile mettra à décrire BEF. D'après ce qui a été dit plus haut, la tension du fil pourrait rester constante pendant une durée double.

Note.— On trouvera dans le t. V, p. 525, une solution dont la précédente diffère assez notablement.

Questions analogues.

I. « Déterminer la courbe située dans un plan vertical » sur laquelle un point matériel pesant descendrait en » exerçant dans toutes les positions une pression égale à » son poids. On fait abstraction du frottement. »

En prenant l'axe des x vertical et dans le sens opposé à la pesanteur, on arrive sans difficulté à l'équation

$$\frac{dy'}{\sqrt{1+y'^2}} + \frac{y'dy'}{1+y'^2} = \frac{g\,dx}{2gx-c},$$

y' désignant le rapport différentiel $\frac{dy}{dx}$, g la gravité et c une constante à déterminer d'après la vitesse du mobile dans une certaine position. L'intégrale de cette équation est

$$x = \mathrm{A}\left(y' + \sqrt{1+y'^2}\right)^2(1+y'^2) + \frac{c}{2g},$$

A étant une constante arbitraire. De là et de

$$y = xy' - \int x\,dy',$$

on déduit

$$y = \left(x - \frac{c}{2g}\right)y' - \mathrm{A}\int\left(y' + \sqrt{1+y'^2}\right)^2(1+y'^2)\,dy'.$$

Si l'on pose $y' = \text{tang}\,\varphi$, l'intégrale comprise dans cette équation se ramène à $\int \frac{(1+\sin\varphi)^2\, d\varphi}{\cos^6\varphi}$ qui s'obtient par une formule connue, et on a en fonction de la variable auxiliaire φ

$$y = \left(x - \frac{c}{2g} - \frac{2A}{5}\right)\text{tang}\,\varphi - \frac{A}{5}\,\frac{\sin\varphi}{\cos^3\varphi} - \frac{2A}{5}\,\frac{1+\sin\varphi}{\cos^5\varphi} + B,$$

$$x = \frac{c}{2g} + A\,\frac{(1+\sin\varphi)^2}{\cos^4\varphi},$$

B désignant encore une constante arbitraire qui sera déterminée ainsi que A par une position du mobile et la direction de sa vitesse dans cette position.

II. « Déterminer la courbe située dans un plan ver-
» tical, telle qu'il y ait un rapport constant entre la pres-
» sion exercée sur cette courbe par un point matériel
» astreint à la décrire, et la force centrifuge due au mou-
» vement. On fait abstraction du frottement. »

L'origine des axes étant sur la courbe et l'axe des y dirigé dans le sens de la pesanteur, en désignant la gravité par g, la vitesse du point matériel à l'origine par a, l'angle que la direction de cette vitesse fait avec l'axe des x par α, et le rapport constant par k, on a

$$\frac{dx}{dt}\,\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dy}{dt}\,\frac{d^2y}{dt^2} = g\,\frac{dy}{dt}, \quad \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = 2gy + a^2,$$

et

$$\frac{dx}{dt}\,\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\,\frac{d^2x}{dt^2} = \mu\,\frac{dx}{dt},$$

où μ tient lieu de $\frac{g}{1 \pm k}$. Par l'élimination de $\frac{dx}{dt}$, $\frac{d^2x}{dt^2}$ entre ces équations on obtient

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{\mu - g}{2gy + a^2}\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = \mu,$$

qui se ramène à une équation linéaire en posant

$$\frac{dy}{dt} = \sqrt{z}, \quad \text{d'où} \quad \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{1}{2}\frac{dz}{dy}.$$

L'intégrale assujettie aux conditions du problème est

$$\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = 2gy + a^2 - a^{\frac{2\mu}{g}} \cos^2\alpha . (2gy + a^2)^{1-\frac{\mu}{g}}.$$

De cette équation et de la seconde de celles qui précèdent, on tire

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = a^{\frac{2\mu}{g}} \cos^2\alpha . (2gy + a^2)^{1-\frac{\mu}{g}},$$

et il n'y a plus qu'à diviser membre à membre pour avoir l'équation différentielle de la courbe demandée

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{1}{a^{\frac{2\mu}{g}} \cos^2\alpha} (2gy + a^2)^{\frac{\mu}{g}} - 1.$$

L'intégration s'effectue facilement dans les cas suivants :

1° $\mu = g$, ce qui suppose $k = 0$. — Parabole comme dans le cas d'un point libre.

2° $\mu = 2g$, ce qui suppose $k = \frac{1}{2}$. — Chaînette dont la concavité est tournée du côté des y positives.

3° $\mu = -g$, ce qui suppose $k = 2$. — Courbe analogue à la cycloïde, convexe du côté des y positives.

On peut discuter généralement l'équation différentielle en distinguant les deux cas de $\mu > 0$ et de $\mu < 0$: dans le premier, on a des courbes infinies comme la parabole et la chaînette ; dans le second, des courbes limitées comme celle qui répond à $\mu = -g$.

Note. — La question I a été proposée dans le tome II des Suppléments aux Actes de Leipsig, par Bernoulli, professeur à Groningue. Une solution par le marquis de l'Hôpital se trouve dans les Mémoires de l'Académie des Sciences pour l'année 1700.