VINCENZO JANNI

Question 270

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 1 (1862), p. 335-336
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1862_2_1__335_0>

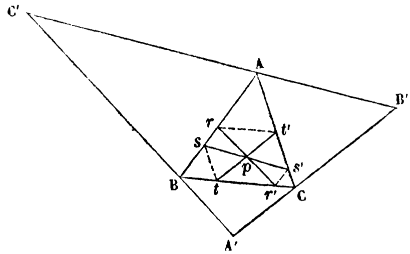
QUESTION 270

(voir tome XII, page 99).

Soient ABC *un triangle et un point p dans le plan du triangle; par le point p menons trois droites, de sorte que p soit le milieu de la partie rr′ interceptée entre les côtés a, b, de la partie ss′ interceptée entre b et c et de la partie tt′ interceptée entre c et a; les six points r, r′, s, s′, t, t′ sont sur une même conique* M. *Menant par le sommet* A *une droite α formant avec les droites b, c, p*A *un faisceau harmonique, et d'une manière analogue une droite* β *en* B; *et γ en* C : *il existe une conique* M′ *qui touche les trois droites α, β, γ, en* A, B, C, *et la conique* M′ *est homothétique à la conique* M. (Steiner.)

Solution de M. Vincenzo JANNI (de Naples).

Soient AB′, CA′, BC′ respectivement les quatrièmes harmoniques de Ap, Cp, Bp par rapport aux côtés



(AB, AC), (CA, CB), (BC, BA), et par conséquent parallèles aux droites ss', tt', rr'. Si nous menons les droites rt', $s'r'$, ts, nous aurons un hexagone dont les côtés opposés seront parallèles, d'où l'on voit que les six points r, r', s, s', t, t' se trouvent sur une conique. Les triangles AB′C, CA′B, BC′A sont respectivement semblables aux triangles $t'ps'$, $r'pt$, spr, et par conséquent on a

$$\frac{AB'}{B'C} = \frac{ps'}{pt'}, \quad \frac{CA'}{A'B} = \frac{pt}{pr'}, \quad \frac{BC'}{C'A} = \frac{pr}{ps},$$

d'où l'on tire

$$\frac{AB'.CA'\ BC'}{B'C.A'B.C'A} = 1,$$

ce qui est la condition pour qu'une conique puisse toucher les côtés du triangle A′B′C′ aux points A, B, C. Appelant S, T, R les trois diamètres de cette dernière conique respectivement parallèles aux diamètres de la première ss', tt', rr', et aux côtés du triangle A′B′C′, on aura

$$S : T = AB' : B'C = ss' : tt',$$
$$T : R = A'C : A'B = tt' : rr',$$

d'où l'on tire

$$S : T : R = ss' : tt' : rr';$$

ces deux coniques ayant trois diamètres parallèles en proportion, on voit qu'elles sont homothétiques.