NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

S. MOCH

Note sur la décomposition des fractions rationnelles

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 1 (1862), p. 339-341

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1862_2_1__339_0>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1862, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques

http://www.numdam.org/

NOTE
SUR LA DÉCOMPOSITION DES FRACTIONS RATIONNELLES;

PAR M. S. MOCH,
Professeur de mathématiques à l'École militaire de la Flèche.

Remarque. — En cherchant la différence entre les fractions $\frac{C}{x-a}$ et $\frac{C}{x-b}$, on trouve

$$\frac{C}{x-a}-\frac{C}{x-b}=\frac{C(a-b)}{(x-a)(x-b)}$$

d'où

$$(1)\qquad \frac{C}{(x-a)(x-b)}=\frac{C:(a-b)}{x-a}-\frac{C:(a-b)}{(x-b)}.$$

La formule (1) donne le moyen de décomposer immédiatement une fraction de la forme $\frac{C}{(x-a)(x-b)}$ en deux fractions simples de la forme $\frac{N}{x-a}$ et $-\frac{N}{x-b}$.

En remarquant que $(a-b)$ est la différence entre les facteurs $(x-b)$ et $(x-a)$, la loi de décomposition apparaît à la simple inspection de la formule (1). En appliquant cette loi aux fractions $\frac{13}{(x-6)(x-2)}$, $\frac{3}{x(x-5)}$, $\frac{17}{(x+4)(x-3)}$, on écrira immédiatement

$$\frac{13}{(x-6)(x-2)}=\frac{13}{4(x-6)}-\frac{13}{4(x-2)};$$

de même

$$\frac{3}{x(x-5)}=\frac{3}{5(x-5)}-\frac{3}{5.x},$$

et encore

$$\frac{17}{(x+4)(x-3)}=\frac{17}{7(x-3)}-\frac{17}{7(x+4)}.$$

Cas des racines inégales.

Soit la fraction rationnelle $\frac{fx}{\mathrm{F}x}$, et soit

$$\mathrm{F}x=(x-a)(x-b)(x-c)\ldots(x-k),$$

on aura, en effectuant la division de fx par $x-a$,

$$\frac{fx}{x-a}=f_1x+\frac{\mathrm{A}}{x-a}.$$

Divisons les deux membres par $(x-b)$,

$$\frac{fx}{(x-a)(x-b)}=f_2x+\frac{\mathrm{B}}{x-b}+\frac{\mathrm{A}}{(x-a)(x-b)};$$

mais, en vertu de la formule (1),

$$\frac{\mathrm{A}}{(x-a)(x-b)}=\frac{\mathrm{A}'}{x-a}-\frac{\mathrm{A}'}{x-b},$$

il viendra donc en substituant

$$\frac{fx}{(x-a)(x-b)}=f_2x+\frac{\mathrm{B}}{x-b}+\frac{\mathrm{A}'}{x-a}-\frac{\mathrm{A}'}{x-b},$$

et après réduction

$$\frac{fx}{(x-a)(x-b)}=f_2x+\frac{\mathrm{A}'}{x-a}+\frac{\mathrm{B}'}{x-b}.$$

Divisant par $x-c$, il viendra

$$\frac{fx}{(x-a)(x-b)(x-c)}=f_3x+\frac{\mathrm{C}}{x-c}+\frac{\mathrm{A}'}{(x-a)(x-c)}$$
$$+\frac{\mathrm{B}'}{(x-b)(x-c)};$$

mais, en vertu de la formule (1),

$$\frac{A'}{(x-a)(x-c)} = \frac{A''}{x-a} - \frac{A''}{x-c}$$

$$\frac{B'}{(x-b)(x-c)} = \frac{B''}{x-b} - \frac{B''}{x-c};$$

remplaçant, il viendra

$$\frac{fx}{(x-a)(x-b)(x-c)} = f_3 x + \frac{C}{x-c} + \frac{A''}{x-a} - \frac{A''}{x-c} + \frac{B''}{x-b} - \frac{B''}{x-c};$$

et après réduction

$$\frac{fx}{(x-a)(x-b)(x-c)} = f_3 x + \frac{A''}{x-a} + \frac{B''}{x-b} + \frac{C''}{x-c}.$$

On trouvera de même

$$\frac{fx}{(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)} = f_4 x + \frac{A'''}{x-a} + \frac{B'''}{x-b} + \frac{C'''}{x-c} + \frac{D'''}{x-d};$$

et en continuant

$$\frac{fx}{(x-a)(x-b)(x-c)\ldots(x-k)} = f_m x + \frac{A_m}{(x-a)} + \frac{B_m}{x-b} + \frac{C_m}{x-c} + \cdots + \frac{K_m}{x-k}.$$