L. CREMONA

Mémoire de géométrie pure sur les cubiques gauches

Nouvelles annales de mathématiques 2^e série, tome 1 (1862), p. 366-378
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1862_2_1__366_1>

MÉMOIRE DE GÉOMÉTRIE PURE SUR LES CUBIQUES GAUCHES

(voir p. 287);

PAR M. L. CREMONA,
Professeur à l'Université de Bologne.

Toutes les coniques (locales des pôles) conjointes, situées dans un faisceau de plans conjoints, sont sur un même hyperboloïde inscrit dans la développable osculatrice de la cubique gauche et passant par les tangentes de cette courbe situées dans les plans osculateurs qui appartiennent au faisceau (*).

Tous les cônes (enveloppes de plans polaires) conjoints, dont les sommets sont situés sur une corde de la cubique gauche, sont circonscrits à un même hyperboloïde passant par la courbe gauche et par les tangentes de celle-ci, rencontrées par la corde donnée.

Ce sont les mêmes hyperboloïdes trouvés au n° 8.

D'après le premier de ces théorèmes, toutes ces coniques inscrites dans un hyperboloïde et situées dans des plans passant par une même droite (directrice) sont les lignes de contact d'autant de cônes du second degré circonscrits à la surface, et dont les sommets sont situés sur une même droite (la focale oo'). Ainsi, par exemple, o'

(*) *Annali di Matematica*, t. I, § 28, settembre-ottobre 1858. — *Journal fur die reine und ang. Mathematik*, Band 58, § 16. Berlin, 1860.

est le pôle du plan O par rapport à l'hyperboloïde, et *vice versâ* o est le pôle du plan O'. Donc l'hyberboloïde est touché, suivant la conique (locale des pôles de O') conjointe située en O, par des plans passant par o'; parmi ces plans, il y a les trois plans osculateurs de la cubique gauche en a', b', c' ; donc cette conique locale est tangente en d, e, f aux droites hk, kg, gh, respectivement.

De ce qui précède on conclut encore que o est le pôle de la directrice xy par rapport à la conique locale, et par conséquent cette courbe passe par les points p, q, r.

On peut donc énoncer ces théorèmes :

Tout hyperboloïde inscrit dans la développable osculatrice de la cubique gauche contient deux tangentes de celle-ci. La droite (focale) qui joint les deux points de contact et la droite (directrice) intersection des deux plans osculateurs en ces points sont polaires réciproques, par rapport à l'hyperboloïde; car chaque point de la focale est le pôle du plan focal du point conjoint au premier point. Chaque couple de plans conjoints, menés par la directrice, rencontre la cubique en six points qui se correspondent deux à deux ; les droites intersections des plans osculateurs aux points correspondants sont génératrices de l'hyperboloïde. Chaque plan mené par la directrice coupe l'hyperboloïde suivant une conique qui est le lieu des pôles du plan conjoint, par rapport aux coniques inscrites dans la développable osculatrice.

Tout hyberboloïde passant par la cubique gauche contient deux tangentes de celle-ci. La droite (focale) qui joint les deux points de contact et la droite (directrice) intersection des deux plans osculateurs en ces points, sont polaires réciproques par rapport à l'hyperboloïde, car chaque plan mené par la directrice est le plan polaire du foyer du plan conjoint au premier plan.

Chaque couple de points conjoints pris sur la focale donne six plans osculateurs, dont les points de contact avec la cubique se correspondent deux à deux; les droites qui joignent les points correspondants sont génératrices de l'hyperboloïde. Chaque point de la focale est le sommet d'un cône du second degré circonscrit à cette surface; ce cône est l'enveloppe des plans polaires du point conjoint au sommet, par rapport aux cônes du second degré passant par la courbe gauche.

Ainsi, *par deux droites tangentes à la cubique gauche, on peut mener deux hyperboloïdes, l'un passant par la cubique, l'autre inscrit dans la développable osculatrice. Ces hyperboloïdes sont réciproques entre eux par rapport à la courbe gauche*, c'est-à-dire que *les points de chacun d'eux sont les foyers des plans tangents à l'autre. Ces mêmes surfaces ont en commun deux droites associées* (5) *passant par les points de contact des tangentes données avec la cubique.*

12. La développable osculatrice de la cubique gauche a pour trace, sur un plan quelconque, une courbe du quatrième ordre (et de la troisième classe) ayant trois points de rebroussement, lesquels sont les points d'intersection de la courbe gauche par le plan (*). La *directrice* du plan donné est la tangente double de cette courbe plane (**); et les deux points de contact sur cette tangente sont les traces des droites tangentes à la cubique gauche et situées dans les plans osculateurs qui passent par la directrice. On sait d'ailleurs que, si une courbe plane de la troisième classe et du quatrième ordre a un seul point *réel* de rebroussement, la tangente double a ses

(*) *Compte rendu, etc., u. s.*, § 44.

(**) Schroter, *Journal fur die reine und ang. Mathematik*, Band 56, p. 33.

deux contacts *réels*, et que, si la couche a trois rebroussements *réels*, la tangente double est une droite *isolée* (*). Donc

Tout plan mené par une droite qui est l'intersection de deux plans osculateurs réels de la cubique gauche rencontre cette courbe en un seul point réel. Tout plan mené par une droite intersection (idéale) de deux plans osculateurs imaginaires de la cubique gauche, rencontre cette courbe en trois points réels.

Par un point donné sur une corde réelle de la cubique gauche on peut mener à celle-ci un plan osculateur réel. Par un point donné sur une corde idéale de la cubique gauche on peut mener à celle-ci trois plans osculateurs réels.

C'est-à-dire que :

Si une involution de plans conjoints a les plans doubles réels (imaginaires), chaque plan du faisceau coupe la cubique gauche en un seul point réel (en trois points réels).

Si une involution de points conjoints a les points doubles réels (imaginaires) par chaque point de la droite, lieu de l'involution, passe un seul plan osculateur réel (passent trois plans osculateurs réels) de la cubique gauche (**).

13. A présent, appliquons ces propriétés au cas très-important où le plan O′ conjoint au plan O est à distance infinie. Alors les pôles du plan O′, par rapport aux coniques inscrites dans la développable osculatrice, deviendront les centres de ces coniques; donc (n° 3) :

Les centres des coniques inscrites dans la développa-

(*) PLUCKER, *Theorie der algebraischen curven*, p. 196. Bonn, 1839.
(**) *Annali di Matematica*, t. II, § 8, gennajo-febbrajo 1859.

ble osculatrice de la cubique gauche sont sur une conique dont le plan a son conjoint à l'infini (*).

J'appelle *conique centrale* cette courbe, lieu des centres des coniques inscrites; *plan central* le plan de la conique centrale, c'est-à-dire le plan qui a son conjoint à l'infini; *focale centrale* la droite focale du point o foyer du plan central O; *faisceau central* le système des plans, conjoints deux à deux, parallèles au plan central. Le foyer du plan central est le centre de la conique centrale (n° 11).

La droite (à l'infini), intersection du plan central par son conjoint, est leur directrice commune : ainsi cette droite sera l'intersection de deux plans osculateurs réels ou imaginaires, selon que le plan à l'infini rencontre la cubique gauche en un seul point réel ou en trois points réels (n° 12). Donc :

Si la cubique gauche a trois asymptotes réelles, il n'y a pas de plans osculateurs parallèles réels.

Si la cubique gauche a une seule asymptote réelle, il y a deux plans osculateurs réels parallèles et équidistants du plan central (**).

Je dis *équidistants*, car ces plans osculateurs sont conjugués harmoniques par rapport au plan central et au plan conjoint, qui est à l'infini (n° 3).

J'ai déjà adopté, dans mon Mémoire sur quelques propriétés des lignes gauches de troisième ordre et classe, inséré au *Journal mathématique de Berlin*, tom. LVIII), les dénominations d'*hyperbole gauche*, *ellipse gauche*, *hyperbole parabolique gauche* et *parabole gauche*, proposées par M. Seydewitz (*voir* l'Introduction de ce Mémoire). Je continuerai à m'en servir.

(*) *Annali di Matematica*, t. I, § 27, settembre-ottobre 1858.

(**) *Annali di Matematica*, t. II, luglio ed agosto 1859.

14. Chaque conique inscrite dans la développable osculatrice est l'enveloppe des droites intersections d'un même plan osculateur par tous les autres. Donc, pour l'ellipse gauche, la conique inscrite située dans chacun des deux plans osculateurs parallèles, a une droite tangente à l'infini. Donc

Les plans osculateurs parallèles de l'ellipse gauche coupent la développable osculatrice suivant deux paraboles (*).

On a vu que la conique *locale des pôles*, dans le plan O, rencontre la directrice en deux points x, y qui sont les traces des droites tangentes à la cubique contenues dans les plans osculateurs passant par la directrice, c'est-à-dire en deux points x, y qui sont les contacts de la directrice avec les coniques inscrites situées dans ces mêmes plans osculateurs (n° 11). Donc

Le lieu des centres des coniques inscrites dans la développable osculatrice de l'hyperbole gauche est une ellipse dont le plan (le plan central) *rencontre la courbe gauche en trois points réels.*

Le lieu des centres des coniques inscrites dans la développable osculatrice de l'ellipse gauche est une hyperbole dont le plan (le plan central) *rencontre la courbe gauche en un seul point réel. Les asymptotes de l'hyperbole centrale sont parallèles aux diamètres des paraboles inscrites qui sont situées dans les plans osculateurs parallèles* (**).

On conclut des théorèmes démontrés ci-dessus que, si la cubique gauche a trois asymptotes réelles, le plan central contient la figure ci-après décrite : a, b, c sont les trois points de la cubique gauche ; d, e, f les pieds des asympto-

(*) *Annali di Matematica*, t. II, luglio-agosto 1859.
(**) *Annali di Matematica*, t. II, luglio-agosto 1859.

tes; hk, kg, gh, les traces des plans osculateurs passant par les asymptotes; mn, nl, lm les traces des plans tangents à la cubique en a, b, c et parallèles aux asymptotes, respectivement; ao, bo, co les traces des plans osculateurs en a, b, c; p, q, r les centres des hyberboles, suivant lesquelles la courbe gauche est projetée par les trois cylindres passant par elle (cônes perspectifs dont les sommets sont à l'infini). Ces hyperboles passent toutes par a, b, c; de plus, la première passe par d, la seconde par e, la troisième par f. Les asymptotes de la première hyperbole (n° 9) sont parallèles à ob, oc, celles de la seconde à oc, oa; et celles de la troisième à oa, ob. L'ellipse centrale est inscrite dans le triangle ghk et passe par les points d, e, f, p, q, r; son centre est o, foyer du plan central. Ce même point o est le centre de gravité de tous les triangles def, pqr, ghk, abc, lmn qui sont homothétiques entre eux. De plus, on a : $ag = gp = po = od \ldots$

Coniques inscrites dans la développable osculatrice.

15. Je me propose maintenant de déterminer l'espèce des coniques inscrites dans la développable osculatrice de la cubique gauche, c'est-à-dire l'espèce des coniques suivant lesquelles cette surface développable est coupée par les plans osculateurs de la cubique.

Commençons par l'hyperbole gauche qui a trois points réels distincts i, i', i'' à l'infini. Le plan osculateur en i contient une conique inscrite qui passe par i et y est touchée par l'asymptote correspondante de la courbe gauche. Donc cette conique inscrite est une hyperbole qui a l'asymptote correspondante au point i, en commun avec la courbe gauche. De même pour les coniques inscrites dans les plans osculateurs en i' et i''.

Considérons les hyperboles inscrites A, B, situées dans les plans a, b osculateurs à la cubique en i, i' (points à l'infini) ; elles suffisent pour déterminer complétement la développable osculatrice. La droite intersection des plans a, b est une tangente commune aux deux coniques A, B; soient α, β les points de contact; alors βi et $\alpha i'$ sont les asymptotes de la courbe gauche, lesquelles appartiennent aussi, séparément, aux coniques A et B. Par un point quelconque o de $\alpha\beta$ menons $o\mu$ tangente à la conique A et $o\nu$ tangente à la conique B (μ, ν points de contact); $\mu o \nu$ est un plan osculateur et $\mu\nu$ est une tangente de la cubique gauche. Pour connaître l'espèce de la conique inscrite, située dans ce plan $\mu o \nu$, il faut évidemment demander combien de tangentes réelles de la cubique gauche sont parallèles au plan $\mu o \nu$, c'est-à-dire combien de fois la développable osculatrice est rencontrée *réellement* par la droite intersection du plan $\mu o \nu$ et du plan à l'infini.

Pour répondre à cette question, je trace, dans le plan a, une droite quelconque parallèle à $o\mu$; soient m, m' les points où cette parallèle rencontre A; les tangentes à cette conique en m, m' couperont $\alpha\beta$ en deux points l, l'. Si mm' se meut parallèlement à $o\mu$, les points l, l' engendrent une involution.

Par l, l' menons les tangentes à l'hyperbole B; la droite qui joint les points de contact n, n' passera toujours par un point fixe x (à cause de l'involution ll'...) (*). Cherchons x.

Si mm' se confond avec $o\mu$, nn' coïncide avec $o\nu$; donc x est sur $o\nu$. Ensuite supposons que mm' devienne tangente à la conique A, sans coïncider avec $o\mu$; soit q le point où $\alpha\beta$ est rencontrée par cette tangente de A, parallèle à $o\mu$; menons par q la tangente à B; cette droite passera par x. Donc le point x est l'intersection de $o\nu$ par la tangente à B menée du point q.

(*) SCHROTER, *ut supra*, p. 32.

On peut déterminer q indépendamment de A. En effet, on sait que les couples de tangentes parallèles d'une conique marquent sur une tangente fixe une involution de points, dont le point central est le contact de la tangente fixe et les points doubles sont les intersections de celle-ci par les asymptotes. Donc les points o, q sont conjugués dans une involution qui a le point central α et le point double β; ainsi on aura

$$\alpha o \,.\, \alpha q = \overline{\alpha\beta}^2,$$

ce qui donne q.

Or, les droites analogues à mm' sont les traces, sur le plan a, d'autant de plans parallèles au plan $\mu o \nu$; donc ces plans couperont le plan b suivant des droites parallèles à $o\nu$, dont chacune correspond à une droite (nn') issue de x. Ainsi nous aurons dans le plan b deux faisceaux homographiques : l'un de droites parallèles à $o\nu$, l'autre de droites passant par x. Les deux faisceaux sont perspectifs, car $o\nu$ est un rayon commun, correspondant à lui-même; donc les intersections des autres rayons homologues formeront une droite rs qui coupera évidemment la conique B aux points où aboutissent les tangentes de la cubique gauche parallèles au plan $\mu o \nu$. Ainsi ces (deux) tangentes sont réelles ou imaginaires, selon que rs rencontre B en deux points réels ou imaginaires. Cherchons rs.

Concevons que mm' (et par conséquent aussi la droite parallèle à $o\nu$) tombe à l'infini; alors l, l' deviennent les intersections de $\alpha\beta$ par les asymptotes de A, ou bien les points β, β'. Si par β' on mène la tangente à B, et qu'on joigne le point de contact à β, on aura une droite passant par x, laquelle correspondra à nn' infiniment éloignée. Cela revient à dire que rs est parallèle à $x\beta$.

Ensuite, je fais coïncider nn' avec xq; il est évident que, dans ce cas, la parallèle à ov vient à passer par q; donc q est un point de rs. Concluons que la droite cherchée passe par q et est parallèle à $x\beta$.

Nous avons vu que α est le point central et β un point double d'une involution $(ll'\ldots)$ sur $\alpha\beta$, où o et q sont deux points conjugués. Si par chaque couple de points conjugués on mène les tangentes à la conique B, le point de leur concours engendre la droite $x\beta$. Soit c le centre de l'hyperbole B; et cherchons le point γ où $x\beta$ rencontre l'asymptote $c\alpha$. Dans l'involution mentionnée, le point conjugué à α est à l'infini, c'est-à-dire qu'il est déterminé par la droite tangente à B et parallèle à $\alpha\beta$. Donc γ sera l'intersection de cette tangente par l'asymptote $c\alpha$. Il s'ensuit que γ est sur le prolongement de αc et que $\gamma c = c\alpha$.

Soient δ et α' les points où l'autre asymptote de B est coupée par $\beta\gamma$ et $\alpha\beta$, respectivement. Le triangle $\alpha c\alpha'$ et la transversale $\beta\delta\gamma$ donnent (théorème de Ménélaus)

$$\gamma c \,.\, \beta\alpha \,.\, \delta\alpha' = \gamma\alpha \,.\, \alpha'\beta \,.\, c\delta;$$

mais on a

$$\gamma\alpha = 2\gamma c, \quad \alpha'\beta = \beta\alpha, \qquad \text{donc} \qquad \delta\alpha' = 2c\delta.$$

Il s'ensuit que la droite $\beta\gamma$ a un segment *fini* compris dans l'intérieur d'un des angles asymptotiques qui ne contiennent pas l'hyperbole B. Il en sera de même de rs, qui est parallèle à $\beta\gamma$. Or, toute droite qui a cette position, rencontre l'hyperbole *en deux points réels;* donc, pour chaque plan osculateur de l'hyperbole gauche il y a deux tangentes réelles de cette courbe, qui sont parallèles au plan. Ainsi

Tout plan osculateur de l'hyperbole gauche coupe la surface développable osculatrice suivant une hyperbole (*).

(*) *Annali di Matematica*, t. II, luglio-agosto 1859.

16. Si deux des trois points à l'infini coïncident en un seul, la cubique gauche a une seule asymptote à distance finie; les deux autres coïncident à l'infini. La courbe a reçu, dans ce cas, le nom d'*hyperbole parabolique gauche*. Désignons par i le point où la courbe est touchée par le plan à l'infini; par i' le point où ce plan est simplement sécant. La tangente en i est tout entière à l'infini; donc la conique inscrite, située dans le plan a osculateur en i, est une parabole A. Ce même plan contient la conique centrale, car il est conjoint au plan à l'infini (n° 3).

Le plan b osculateur en i' contient une hyperbole inscrite B, car la tangente (asymptote) en i' est à distance finie. Soit α le point où la parabole A est tangente à la droite intersection des plans a, b; il est évident que cette droite est une asymptote de B, c'est-à-dire que α est le centre de cette hyperbole.

Prenons arbitrairement le point o sur la droite nommée, et menons $o\mu$ tangente à la parabole A, $o\nu$ tangente à l'hyperbole B. Combien de tangentes de la cubique gauche sont parallèles au plan osculateur $\mu o \nu$?

Soient m, m' deux points de A tels, que mm' soit parallèle à $o\mu$; les tangentes en m, m' à la conique A rencontrent αo en l, l'. Menons par ces points les tangentes ln, $l'n'$ à B; la corde de contact nn' passera par un point fixe de $o\nu$. Pour trouver ce point, j'observe que si mm' tombe à l'infini, elle devient une tangente de A; par conséquent, la position correspondante de nn' est αo. Donc le point fixe autour duquel tourne nn' est o.

En poursuivant les raisonnements dont on a fait usage dans le numéro précédent, nous aurons à considérer, dans le plan b, deux faisceaux homographiques de droites; le centre du premier est à l'infini sur $o\nu$; le centre du second est o. La droite $o\nu$ est un rayon homologue à lui-même; donc les deux faisceaux engendreront une droite rs.

Si mm' tombe à l'infini, la droite parallèle à $o\nu$ s'éloigne aussi infiniment, et nn' coïncide avec αo; donc le point à l'infini de αo appartient à rs, c'est-à-dire que la droite rs est parallèle à αo. De plus, on voit aisément que, si $o\nu$ coupe l'asymptote $\alpha i'$ en o', et que l'on prenne, sur le prolongement de $o'\alpha$, le point r tel, que $r\alpha = \alpha o'$, la droite cherchée passera par r.

La droite rs est parallèle à une asymptote (αo) de l'hyperbole B ; ainsi elle rencontre cette courbe en un point *réel* à l'infini ; donc rs passe par un autre point réel de la même courbe. Ce qui revient à dire que le plan osculateur $\mu o \nu$ rencontre à l'infini, outre l'asymptote de la cubique gauche en i, une autre tangente de cette courbe. Donc

Les plans osculateurs de l'hyperbole parabolique gauche coupent la développable osculatrice de cette courbe suivant des coniques qui sont des hyperboles, à l'exception d'une seule qui est une parabole. Les centres des hyperboles sont sur une autre parabole (*).

Les deux paraboles sont dans un même plan, ont les diamètres parallèles et sont touchées au même point par le plan osculateur qui contient l'asymptote (à distance finie) de la courbe gauche.

Chacune des hyperboles inscrites a une asymptote parallèle à un plan fixe; c'est le plan osculateur qui contient l'asymptote (de la courbe gauche) située tout entière à l'infini.

17. Si la cubique gauche a un plan osculateur à l'infini (*parabole gauche*), on voit sans peine que toute conique inscrite dans la développable osculatrice a une

(*) *Annali di Matematica*, t. II, luglio-agosto 1859.

tangente à l'infini, et qu'il n'y a plus de plan central. Donc

Toutes les coniques inscrites dans la développable osculatrice de la parabole gauche sont des paraboles (*planes*).

(*La fin prochainement.*)