NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

Question 650

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 2 (1863), p. 502-503

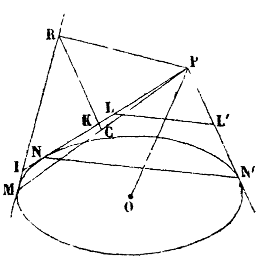
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1863_2_2__502_1>

QUESTION 650;

SOLUTION DE M. A. P.,
Elève en Mathématiques spéciales au lycée Saint-Louis
(division de M. Amiot).

ÉNONCÉ. — *On donne un point* P *dans le plan d'une conique; on sait que le lieu des pieds des perpendiculaires abaissées de ce point sur toutes les tangentes à la conique a un point double en* P. *Démontrer que les centres de courbure de cette courbe correspondant à ce point double sont à égale distance du diamètre qui contient le point* P.

Soient PN et PN′ les tangentes menées par le point P à la conique. Par un point M de la courbe, voisin de N,



je mène la tangente MR, sur laquelle j'abaisse du point P une perpendiculaire PR; le point R est un point du lieu; on sait que le cercle décrit sur MP comme diamètre passe

(*) MM. Laquière, Paul Mansion de Marchin et Nicolaïdés ont résolu les mêmes questions; nous ferons prochainement connaître leurs solutions.

par le point R et a même tangente en ce point que le lieu considéré. Il a donc aussi même normale CR, C étant le milieu de PM. Si le point M se rapproche indéfiniment du point N, le point R tend vers le point P, et la normale CR tend vers la tangente PN, limite de la sécante PM et de la tangente MR. La droite PN est donc la normale au lieu, au point P. Comme le point P est un point double, la seconde tangente PN′ à la conique est la seconde normale au lieu, au point P. Les deux centres de courbure correspondant au point P se trouvent donc sur les droites PN et PN′.

Soit I le point de rencontre des tangentes MR, PN à la conique. Dans le triangle PIM, la transversale CR passant par le milieu du côté PM, on a

$$\frac{PK}{KI} = \frac{RM}{RI},$$

d'où l'on déduit

$$\text{lim. de } \frac{PK}{KI} = \text{lim. de } \frac{RM}{RI}.$$

Or, les deux termes du dernier rapport RM et RI tendent vers PN, lorsque R se rapproche de P; donc les deux longueurs PK et KI tendent vers PL moitié de PN, c'est-à-dire que le point de rencontre K de deux normales infiniment voisines PN, RC tend vers le point L qui est par suite l'un des centres de courbure correspondant au point P. Par la même raison, le point L′, situé au milieu de PN′, est le centre de courbure situé sur la seconde normale PN′ du point P. Mais le diamètre OP de la conique passe par le sommet P du triangle PNN′ et par le milieu de la base NN′; il divise donc en deux parties égales la droite LL′ parallèle à la base NN′, et les points L et L′ se trouvent donc également distants du diamètre OP

C. Q. F. D.