

L. PAINVIN

**Théorie des surfaces polaires d'un point**

*Nouvelles annales de mathématiques 2<sup>e</sup> série*, tome 4  
(1865), p. 337-346

[http://www.numdam.org/item?id=NAM\\_1865\\_2\\_4\\_\\_337\\_0](http://www.numdam.org/item?id=NAM_1865_2_4__337_0)

© Nouvelles annales de mathématiques, 1865, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

---

**THÉORIE DES SURFACES POLAIRES D'UN POINT (\*)**;

 PAR M. L. PAINVIN.
 

---

Il est inutile, je pense, d'insister sur l'importance des équations tangentielles; le double système des coordonnées d'un point et des coordonnées d'un plan ou d'une droite est la traduction analytique de la dualité géométrique, dualité qui a sa raison d'être dans le double mode de génération des courbes et des surfaces. Or, les définitions que je vais présenter nous conduisent, dans le cas des équations tangentielles, à des formules identiques à celles qu'on rencontre dans la théorie des polaires d'un point; c'est donc le complément naturel et indispensable de cette importante théorie.

Je ne donnerai d'ailleurs ici que les principes fondamentaux, et seulement pour les surfaces; l'application aux courbes planes des définitions et des formules que nous rencontrerons ne saurait offrir aucune difficulté.

## PREMIÈRE PARTIE.

*Coordonnées d'un point, coordonnées d'un plan.*

1. J'indiquerai d'abord les dénominations que je dois employer.

1<sup>o</sup> Supposons donnée une équation qui définit une surface : si cette équation est une relation entre les coordonnées d'un point quelconque de cette surface, je l'appellerai *équation ponctuelle de la surface* ou *équation en coordonnées-point de la surface*; si cette équation est une relation entre les coordonnées d'un plan tangent quelconque à cette surface, je la nommerai *équation tangentielle de la surface*.

---

(\*) Mémoire présenté au Comité des Sociétés savantes, le 14 novembre 1862 (voir la *Revue des Sociétés savantes*, t. II, p. 239).

Ces dénominations ne seront d'ailleurs nécessaires que lorsque les équations seront envisagées à la fois sous ce double point de vue.

2° Dans ce Mémoire, je définirai un point ou un plan en le rapportant à un tétraèdre.

Les produits des distances d'un point aux quatre faces d'un tétraèdre par des nombres fixes seront dits les *coordonnées tétraédriques du point*.

Les produits des distances des quatre sommets d'un tétraèdre à un plan par des nombres fixes seront dits les *coordonnées tétraédriques du plan*.

3° Dans les figures planes :

Les produits des distances d'un point aux trois côtés d'un triangle par des nombres fixes peuvent être appelés les *coordonnées trilatères du point* ;

Les produits des distances des trois sommets d'un triangle à une droite par des nombres fixes seront les *coordonnées trilatères de la droite*.

*N. B.* — Convenant, une fois pour toutes, de rapporter un point et un plan à un tétraèdre, je supprimerai, la plupart du temps, le mot *tétraédriques*, et je me contenterai de dire les *coordonnées d'un point*, les *coordonnées d'un plan*.

2. *Coordonnées tétraédriques d'un point.* — Dans ce système, un point est déterminé par ses distances à quatre plans fixes, *formant un tétraèdre*, ces distances étant multipliées respectivement par des nombres constants.

Soient les équations des quatre plans fixes, dits *plans de référence*,

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} (A) \quad a\xi + a'\eta + a''\zeta + a''' = 0, \\ (B) \quad b\xi + b'\eta + b''\zeta + b''' = 0, \\ (C) \quad c\xi + c'\eta + c''\zeta + c''' = 0, \\ (D) \quad d\xi + d'\eta + d''\zeta + d''' = 0, \end{array} \right.$$

$\xi, \eta, \zeta$  étant les *coordonnées cartésiennes* d'un point M. Si nous admettons que les axes des  $\xi, \eta, \zeta$  soient rectangulaires, les distances du point M ( $\xi, \eta, \zeta$ ) à ces quatre plans, seront

$$\alpha = \frac{a\xi + a'\eta + a''\zeta + a'''}{\sqrt{a^2 + a'^2 + a''^2}}, \quad \gamma = \frac{c\xi + c'\eta + c''\zeta + c'''}{\sqrt{c^2 + c'^2 + c''^2}},$$

$$\beta = \frac{b\xi + b'\eta + b''\zeta + b'''}{\sqrt{b^2 + b'^2 + b''^2}}, \quad \delta = \frac{d\xi + d'\eta + d''\zeta + d'''}{\sqrt{d^2 + d'^2 + d''^2}}.$$

Nous poserons

$$(2) \quad \begin{cases} x = \alpha\sqrt{a^2 + a'^2 + a''^2}, \\ y = \beta\sqrt{b^2 + b'^2 + b''^2}, \\ z = \gamma\sqrt{c^2 + c'^2 + c''^2}, \\ t = \delta\sqrt{d^2 + d'^2 + d''^2}, \end{cases}$$

en disposant des signes des radicaux, ou, ce qui revient au même, des signes des constantes  $a, b, c, a', b', \dots$ , de manière que les produits  $x, y, z, t$  soient positifs lorsque le point correspondant est dans l'intérieur du tétraèdre de référence; d'où

$$(2 \text{ bis}) \quad \begin{cases} x = a\xi + a'\eta + a''\zeta + a''', \\ y = b\xi + b'\eta + b''\zeta + b''', \\ z = c\xi + c'\eta + c''\zeta + c''', \\ t = d\xi + d'\eta + d''\zeta + d'''. \end{cases}$$

Les quantités  $x, y, z, t$  sont les *coordonnées tétraédriques* du point M; le tétraèdre fixe ABCD sera dit *tétraèdre de référence*, et les nombres constants

$$\sqrt{a^2 + a'^2 + a''^2}, \quad \sqrt{b^2 + b'^2 + b''^2},$$

$$\sqrt{c^2 + c'^2 + c''^2}, \quad \sqrt{d^2 + d'^2 + d''^2}$$

seront les *paramètres de référence*.

Si l'on désigne par V le volume du tétraèdre ABCD,

par  $m, n, p, q$  les quotients des aires de ses faces par les paramètres correspondants, on aura entre les quatre coordonnées  $x, y, z, t$  la relation

$$(3) \quad mx + ny + pz + qt = 3V.$$

Les formules (2 bis) et (3) permettent de passer des coordonnées cartésiennes aux coordonnées tétraédriques, et inversement.

Les signes des coordonnées  $x, y, z, t$  devront être déterminés d'après la convention suivante : « Les produits  $x, y, z, t$  seront précédés du signe *plus* ou *moins*, » suivant que le point se trouvera ou non du même côté que le sommet opposé à la face par rapport à laquelle on évalue la distance. »

3. Étant donnés deux points  $M_1(x_1, y_1, z_1, t_1)$  et  $M_2(x_2, y_2, z_2, t_2)$ , un point  $M(x, y, z, t)$  situé sur la droite  $M_1M_2$ , et tel que

$$\frac{MM_1}{MM_2} = \frac{\lambda}{\mu},$$

aura pour coordonnées

$$\left\{ \begin{array}{l} x = \frac{\lambda x_2 + \mu x_1}{\lambda + \mu}, \\ y = \frac{\lambda y_2 + \mu y_1}{\lambda + \mu}, \\ z = \frac{\lambda z_2 + \mu z_1}{\lambda + \mu}, \\ t = \frac{\lambda t_2 + \mu t_1}{\lambda + \mu}, \end{array} \right.$$

et réciproquement, si les coordonnées  $x, y, z, t$  d'un point vérifient les relations

$$\frac{x}{\lambda x_2 + \mu x_1} = \frac{y}{\lambda y_2 + \mu y_1} = \frac{z}{\lambda z_2 + \mu z_1} = \frac{t}{\lambda t_2 + \mu t_1},$$

ce point sera sur la droite  $M_1M_2$  et la divisera dans le rapport  $\frac{\lambda}{\mu}$ .

4. Un plan, dans le système de coordonnées que je viens de définir, a une équation de la forme

$$(4) \quad Mx + Ny + Pz + Qt = 0,$$

et le plan à l'infini est

$$(4 \text{ bis}) \quad mx + ny + pz + qt = 0.$$

La distance d'un point  $x, y, z, t$  au plan (4) est

$$^{(1)} \frac{Mx + Ny + Pz + Qt}{\sqrt{(aM + bN + cP + dQ)^2 + (a'M + b'N + c'P + d'Q)^2 + (a''M + b''N + c''P + d''Q)^2}},$$

on arrivera immédiatement à cette expression en partant de l'expression correspondante en coordonnées cartésiennes.

D'après cette formule et la relation (3), on conclut entre les distances  $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \delta_1$  des sommets du tétraèdre de référence au plan

$$(6) \quad Mx + Ny + Pz + Qt = 0$$

les relations suivantes :

$$(7) \quad \frac{m\alpha_1}{M} = \frac{n\beta_1}{N} = \frac{p\gamma_1}{P} = \frac{q\delta_1}{Q}.$$

Ces notions étant rappelées, je vais maintenant définir les coordonnées *tétraédriques d'un plan*.

5. *Coordonnées tétraédriques d'un plan*. — Dans ce système de coordonnées, on définit un plan par ses distances à quatre points fixes, ces distances étant respectivement multipliées par quatre nombres fixes; ces produits seront appelés les *coordonnées tétraédriques du plan*.

Choisissant le tétraèdre précédent pour tétraèdre de référence, je poserai

$$(8) \quad \begin{cases} X = m\alpha_1, \\ Y = n\beta_1, \\ Z = p\gamma_1, \\ T = q\delta_1, \end{cases}$$

les produits  $X, Y, Z, T$  sont les *coordonnées tétraédriques du plan* considéré; les nombres  $m, n, p, q$  sont les *paramètres de référence*.

Les relations (6), (7) et (8) nous montrent qu'un plan dont les coordonnées sont  $X, Y, Z, T$  a pour *équation ponctuelle*

$$(9) \quad Xx + Yy + Zz + Tt = 0.$$

Enfin,  $V$  étant le volume du tétraèdre de référence, on a entre les coordonnées tétraédriques  $X, Y, Z, T$  d'un plan la relation

$$(10) \quad \left\{ \begin{aligned} &(aX + bY + cZ + dT)^2 + (a'X + b'Y + c'Z + d'T)^2 \\ &+ (a''X + b''Y + c''Z + d''T)^2 = 9V^2. \end{aligned} \right.$$

On arrive à cette relation en comparant les distances du sommet  $A$ , par exemple, au plan (9), ces distances étant évaluées successivement à l'aide des formules (5) et (8).

La discussion de l'équation (9) conduit à la convention suivante relative aux signes des coordonnées :

« On devra prendre avec le même signe les longueurs  
 » des perpendiculaires qui, menées des points de réfé-  
 » rence vers le plan considéré, sont dirigées dans un  
 » certain sens, et avec le signe contraire celles qui sont  
 » dirigées dans l'autre sens. »

6. *Étant donnés deux plans  $P_1(X_1, Y_1, Z_1, T_1)$  et  $P_2(X_2, Y_2, Z_2, T_2)$ , un troisième plan  $P(X, Y, Z, T)$  passant par l'intersection  $D$  des deux premiers et tel*

que

$$\frac{\widehat{\sin PDP_1}}{\widehat{\sin PDP_2}} = \frac{\lambda}{\mu}$$

aura pour coordonnées

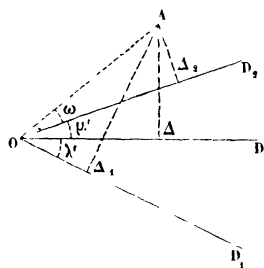
$$(11) \quad \left\{ \begin{array}{l} X = \frac{\lambda X_2 + \mu X_1}{\rho}, \\ Y = \frac{\lambda Y_2 + \mu Y_1}{\rho}, \\ Z = \frac{\lambda Z_2 + \mu Z_1}{\rho}, \\ T = \frac{\lambda T_2 + \mu T_1}{\rho}, \end{array} \right.$$

formules dans lesquelles

$$(11 \text{ bis}) \quad \left\{ \begin{array}{l} \rho = \sqrt{\lambda^2 + \mu^2 + 2\lambda\mu \cos \theta}, \\ \theta = \widehat{P_1DP_2}. \end{array} \right.$$

Cette proposition, qui est fondamentale dans la théorie que je vais exposer, peut s'établir de la manière suivante :

Par un des sommets de référence, A par exemple,



menons un plan perpendiculaire à l'intersection des plans considérés; soient O, D<sub>1</sub>, D, D<sub>2</sub>, les intersections de la



droite  $D$  et des plans  $P_1, P, P_2$  par le plan perpendiculaire;  $\lambda', \mu', \omega$ , les angles  $DOD_1, DOD_2, AOD_2$ ; et enfin  $\Delta, \Delta_1, \Delta_2$ , les distances du sommet  $A$  aux droites  $D, D_1, D_2$ , on a

$$\Delta_2 = OA \sin \omega,$$

$$\Delta = OA \sin(\omega + \mu') = \Delta_2 \cos \mu' + OA \cos \omega \sin \mu',$$

$$\Delta_1 = OA \sin(\omega + \lambda' + \mu') = \Delta_2 \cos(\lambda' + \mu') + OA \cos \omega \sin(\lambda' + \mu').$$

Éliminant  $\cos \omega$  entre les deux dernières relations, on trouve

$$\Delta = \frac{\Delta_2 \sin \lambda' + \Delta_1 \sin \mu'}{\sin(\lambda' + \mu')} \quad \text{ou} \quad X = \frac{X_2 \sin \lambda' + X_1 \sin \mu'}{\sin(\lambda' + \mu')}.$$

Si maintenant on a égard aux relations

$$\lambda' + \mu' = \theta, \quad \frac{\sin \lambda'}{\sin \mu'} = \frac{\lambda}{\mu},$$

on arrive, après quelques transformations faciles, aux formules (11).

*Réciproquement, si les coordonnés  $X, Y, Z, T$  d'un plan  $P$  vérifient les relations*

$$(12) \quad \frac{X}{\lambda X_2 + \mu X_1} = \frac{Y}{\lambda Y_2 + \mu Y_1} = \frac{Z}{\lambda Z_2 + \mu Z_1} = \frac{T}{\lambda T_2 + \mu T_1},$$

*ce plan passera par l'intersection  $D$  des plans  $P_1$  et  $P_2$ , et l'on aura*

$$\frac{\sin \widehat{PDP_1}}{\sin \widehat{PDP_2}} = \frac{\lambda}{\mu}.$$

En effet, les équations ponctuelles des plans  $P_1$  et  $P_2$  sont (9)

$$(P_1) \quad X_1 x + Y_1 y + Z_1 z + T_1 t = 0,$$

$$(P_2) \quad X_2 x + Y_2 y + Z_2 z + T_2 t = 0;$$

et, en désignant par  $K$  la valeur commune des rapports (12), on aura pour l'équation du plan  $P$

$$(P) \lambda(X_2x + Y_2y + Z_2z + T_2t) + \mu(X_1x + Y_1y + Z_1z + T_1t) = 0;$$

c'est évidemment l'équation d'un plan passant par l'intersection des deux premiers.

D'après les formules (5) et (10), les distances d'un point quelconque  $(x, y, z, t)$  du plan  $P$  aux deux plans  $P_1$  et  $P_2$  sont respectivement

$$\pm \frac{X_1x + Y_1y + Z_1z + T_1t}{9V^2}, \quad \pm \frac{X_2x + Y_2y + Z_2z + T_2t}{9V^2};$$

leur rapport est visiblement  $\frac{\lambda}{\mu}$  d'après l'équation du plan  $P$ .

### 7. L'équation linéaire et homogène

$$(13) \quad AX + BY + CZ + DT = 0$$

représente un point. Car, soit une solution  $(X, Y, Z, T)$  de l'équation (13); le plan  $(X, Y, Z, T)$  aura pour *équation ponctuelle*

$$Xx + Yy + Zz + Tt = 0.$$

Éliminons  $T$  entre cette équation et la précédente, il vient

$$X(At - Dx) + Y(Bt - Dy) + Z(Ct - Dz) = 0.$$

Or, cette équation représente un plan passant par le point fixe

$$(14) \quad \frac{x}{A} = \frac{y}{B} = \frac{z}{C} = \frac{t}{D},$$

lorsqu'on laisse  $X, Y, Z$  indéterminées. Donc l'équation (13), qui représente la surface-enveloppe des

plans  $(X, Y, Z, T)$ , est l'équation d'un point, et les coordonnées tétraédriques de ce point sont données par les équations (14).

8. L'équation tangentielle d'une surface étant

$$U(X, Y, Z, T) = 0,$$

le point de contact du plan tangent  $(X_0, Y_0, Z_0, T_0)$  aura pour équation

$$(15) \quad X \left( \frac{dU}{dX} \right)_0 + Y \left( \frac{dU}{dY} \right)_0 + Z \left( \frac{dU}{dZ} \right)_0 + T \left( \frac{dU}{dT} \right)_0 = 0,$$

avec la condition

$$(15 \text{ bis}) \quad U(X_0, Y_0, Z_0, T_0) = 0.$$

En effet, l'équation  $U = 0$  étant homogène, l'équation (15) admettra les solutions  $(X_0, Y_0, Z_0, T_0)$  et  $(X_0 + dX_0, Y_0 + dY_0, Z_0 + dZ_0, T_0 + dT_0)$ , c'est-à-dire que les intersections du plan tangent  $P_0$  avec tous les plans tangents infiniment voisins passeront par le point (15), lequel est, par conséquent, le point de contact du plan  $P_0$ .

(La suite prochainement.)