DÉSIR RAVON

Seconde solution de la question 582

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 6 (1867), p. 424-425

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1867_2_6__424_0>

Seconde solution de la question 582;

(voir t. XX, p. 139);

PAR M. DÉSIR RAVON,
Élève du lycée d'Angoulême.

On demande le lieu des foyers d'une hyperbole équilatère tangente et concentrique à une ellipse donnée (*).

Soient

$$a^2 y^2 + b^2 x^2 = a^2 b^2 \tag{1}$$

l'équation de l'ellipse, et

$$\left.\begin{array}{l}(1 - m^2) x^2 - 2mnxy + (1 - n^2) y^2 - 2(\alpha + mp) x \\ \qquad - 2(\beta + np) y + \alpha^2 + \beta^2 - p^2 = 0\end{array}\right\} \tag{2}$$

celle de l'hyperbole.

Cette hyperbole étant équilatère, on a

$$m^2 + n^2 = 2, \tag{3}$$

et comme elle est concentrique à l'ellipse,

$$\alpha + mp = 0, \tag{4}$$

$$\beta + np = 0. \tag{5}$$

On pourra donc, dans l'équation (2), effacer les termes du premier degré; les abscisses des points d'intersection de l'ellipse et de l'hyperbole sont données par une équation bicarrée, et il faut exprimer que le premier membre de cette équation est un carré parfait, ce qui donne

$$\left.\begin{array}{l}(\alpha^2 + \beta^2 - p^2)^2 + (\alpha^2 + \beta^2 - p^2)(1 - m^2) c^2 \\ \qquad + a^2 b^2 (1 - m^2 - n^2) = 0.\end{array}\right\} \tag{6}$$

(*) Ce n'est pas précisément l'énoncé de la question 582; dans cet énoncé, on propose de faire voir que le produit des distances d'un foyer de l'hyperbole aux deux foyers de l'ellipse est constant, ce qui n'exige pas que l'on trouve en coordonnées rectilignes l'équation du lieu des foyers de l'hyperbole. G.

Des équations (3), (4) et (5), on tire

$$p^2 = \frac{\alpha^2 + \beta^2}{2}, \quad m^2 = \frac{2\alpha^2}{\alpha^2 + \beta^2}, \quad n^2 = \frac{2\beta^2}{\alpha^2 + \beta^2}.$$

Ces valeurs portées dans l'équation (6) donnent l'équation du lieu des foyers (α, β étant maintenant coordonnées courantes) :

$$(\alpha^2 + \beta^2)^2 + 2c^2(\alpha^2 + \beta^2) - 4c^2\alpha^2 - 4a^2b^2 = 0.$$

En comparant cette équation avec celle de la cassinienne, on reconnaît que le lieu est une cassinienne ayant les mêmes foyers que l'ellipse (*).