Publications récentes

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 8 (1869), p. 136-143

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1869_2_8__136_1>

PUBLICATIONS RÉCENTES.

Théorie élémentaire des quantités complexes; par J. Hoüel, Professeur à la Faculté des Sciences de Bordeaux. — Première Partie : *Algèbre des quantités complexes;* 1867 (64 p.). — Deuxième Partie : *Théorie des fonctions uniformes;* 1869 (144 p.) — 1 vol. grand in-8 en deux fascicules, etc. — Paris, Gauthier-Villars, libraire, quai des Augustins, 55. — Prix : 1re Partie, 2 fr. 50 c.; 2e Partie, 4 fr.

Les premiers inventeurs de l'Algèbre, lorsqu'une équation n'admettait pas de solutions réelles, se contentaient de la dire *impossible*. Plus tard, à mesure que la théorie des équations fit des progrès, on s'aperçut que les théorèmes découverts pour les équations qui ont toutes leurs racines positives exigent, pour être étendus à toute espèce d'équations, non-seulement que l'on prenne en considération les racines négatives, que jusqu'au temps de Descartes on a nommées racines *fausses*, mais encore que l'on compte comme racines certains symboles dépourvus en apparence de toute signification réelle et se ramenant tous à l'indication de l'opération impossible marquée par le signe $\sqrt{-1}$. On donna à ces expressions le nom de racines *impossibles* ou *imaginaires*.

Bientôt Moivre, guidé par les analogies qui existent entre le cercle et l'hyperbole équilatère, découvrit le célèbre théorème qui porte son nom, et c'est de cette découverte que date l'introduction des symboles imaginaires comme un auxiliaire important dans l'Analyse des quantités réelles. La théorie de ces symboles fut fondée dans le siècle dernier, principalement par les travaux d'Euler et de d'Alembert, et c'est Cauchy qui, de nos jours, y a mis la dernière main.

Cependant, quelque légitimes que soient les démonstrations fondées sur le théorème de Moivre et l'emploi purement symbolique des imaginaires, il faut avouer que ce procédé laisse toujours dans l'esprit une certaine obscurité, et il n'est pas étonnant que de bons esprits n'y aient vu qu'une sorte de procédé mnémonique, dont il serait dangereux de poursuivre l'emploi en dehors des limites dans lesquelles on peut soumettre les résultats à un contrôle indépendant des symboles en question.

Aussi a-t-on cherché, dès le milieu du XVIII[e] siècle, à donner une autre base à cette méthode, qui s'annonçait comme si féconde, et à laquelle il ne semblait manquer que d'être suffisamment sûre. Ces tentatives, d'abord infructueuses, ont été reprises avec succès par le Genevois Robert Argand, que l'on doit regarder comme le vrai fondateur de la théorie *réelle* des symboles dits *imaginaires*. Les travaux d'Argand, qui datent de 1806, et qui ont été rappelés en 1813 dans le recueil si connu des *Annales de Gergonne*, n'en ont pas moins passé presque inaperçus, et la preuve, c'est que la théorie d'Argand a été *réinventée* un grand nombre de fois, tant en France qu'à l'étranger. Nous n'oserions même pas répondre qu'après l'adoption définitive de ces idées par Cauchy, dans les dernières années de sa vie, et la pleine justice qu'il a rendue, dans le dernier volume de ses *Exercices d'Analyse*, aux mérites d'Argand, cette doctrine soit bien connue de tous les géomètres contemporains, et qu'on ne la réinvente pas encore quelque jour, du moins en France, le seul pays où elle n'ait pas encore pénétré dans l'enseignement classique.

Pour Argand et ses successeurs, l'impossibilité des opérations indiquées par le symbole $\sqrt{-1}$ tient uniquement à la signification trop restreinte que l'on attribue à l'idée de quantité et aux opérations représentées par les signes de l'Algèbre. Toute quantité absolue ou *arithmétique* peut être représentée géométriquement par un segment porté sur un axe dans une seule direction déterminée. Toute quantité *algébrique*, c'est-à-dire positive ou négative, peut être représentée par un segment porté sur un axe suivant l'une ou l'autre des deux directions opposées, qui font entre elles un angle égal à deux angles droits. Si l'on étend au plan entier le champ de la représentation des quantités, on sera amené à considérer les quantités représentées par des droites de longueur et de direction quelconques. Une telle droite constitue ce que Cauchy nomme une quantité *géométrique*.

Une quantité géométrique est déterminée au moyen de deux nombres (coordonnées, soit rectilignes, soit polaires), de sorte que les opérations faites sur les quantités géométriques portent à la fois sur ces deux nombres.

L'addition correspond à la construction en Mécanique de la composition des forces ou des vitesses. La multiplication se compose de la multiplication des modules et de l'addition des arguments, ces derniers se comportant comme des logarithmes. Au moyen de ces définitions, toute opération sur les quantités géométriques (ou *complexes*, comme on les appelle plus généralement) se ramène à une construction géométrique *réelle*, dont les résultats peuvent être représentés par des nombres réels; de sorte que cette théorie bannit complétement de l'Algèbre les nuages dont semblait entouré le mot d'*imaginaire*.

A ce point de vue, le théorème de Moivre (*) n'est plus autre chose qu'une représentation algébrique d'un théorème géométrique sur les projections d'un contour polygonal, et de ce théorème on déduit de la manière la plus simple et la plus directe toutes les formules de la Trigonométrie plane.

En définissant l'exponentielle à exposant imaginaire comme le résultat de la substitution d'une variable imaginaire à une variable réelle dans le développement de e^x en série, on obtient immédiatement les formules d'Euler qui lient les fonctions circulaires aux exponentielles; puis on est conduit à étendre au cas des variables complexes les définitions des logarithmes et des fonctions circulaires inverses.

Tel est, en résumé, le contenu de la *première Partie* du traité de M. Hoüel, intitulée : *Algèbre des Quantités complexes*. Avant d'entrer en matière, l'auteur rappelle en quelques pages l'historique de la question, et pour servir d'introduction à l'étude des quantités complexes, il indique comment on pourrait remplacer avec avantage, dans la théorie des quantités négatives, les considérations arithmétiques, qui conduisent à en faire de purs symboles, par des considérations fondées sur la *notation géométrique* et remplaçant le symbole par la réalité. De là il passe au développement des idées d'Argand et aux conséquences analytiques qu'on en a tirées.

Dans l'étude des fonctions susceptibles de plusieurs va-

(*) Voir *Nouvelles Annales*, 2e série, t. VII, p. 284.

leurs, M. Hoüel passe entièrement sous silence les déterminations désignées par Cauchy sous le nom de *valeurs principales*. Il a pensé, sans doute, que la considération de ces valeurs, reposant sur des conventions souvent arbitraires, ne sert qu'à compliquer l'énoncé des théorèmes et à créer des distinctions qui n'ont rien d'essentiel dans les applications. Aussi les géomètres allemands ne font-ils aucune mention de ces valeurs, dont on peut toujours éviter l'emploi.

La *seconde Partie*, récemment publiée, de l'ouvrage de M. Hoüel contient, sous le titre de *Théorie des Fonctions uniformes*, les principaux résultats des découvertes de Cauchy, avec les simplifications importantes dues aux travaux qui ont été faits en Allemagne.

Cauchy considérait toute quantité déterminée par la valeur d'une quantité complexe comme une *fonction* de cette quantité. Cette définition convenant généralement à toute fonction de deux variables indépendantes, il a fallu, pour obtenir des fonctions pouvant se traiter par les mêmes règles que les fonctions d'une seule variable, se borner à une classe particulière de fonctions, que Cauchy appelle fonctions *monogènes*. Riemann et son école ont pris tout d'abord le mot *fonction* avec sa définition restreinte, ce qui dispense de reproduire, dans chaque énoncé le mot *monogène*. Cette définition des fonctions, suivie de considérations sur la continuité et sur le nombre des valeurs d'une fonction, forme l'objet du Chapitre Ier.

Dans le Chapitre suivant, M. Hoüel expose les théorèmes fondamentaux de Cauchy sur les intégrales prises le long d'un contour donné, en empruntant à Riemann les principales démonstrations. Les intégrales prises le long d'un contour quelconque renfermant des points de discontinuité se ramènent aux intégrales prises le long de contours infiniment petits tracés autour de ces points, et auxquelles Cauchy, partant d'autres considérations, a donné le nom *de résidus*. Toute fonction continue et *uniforme* (ou *monodrome*) à l'intérieur d'un contour donné peut s'exprimer sous forme de résidu, et c'est de cette expression que Cauchy a tiré son beau théorème, qui contient comme cas particulier le théorème de Taylor, et qui a été généralisé par P. Laurent.

Le Chapitre III est consacré à l'étude d'une fonction dans le voisinage d'un *zéro* ou d'un *infini*. L'ordre infinitésimal de la fonction est exprimé par le résidu de sa dérivée logarithmique.

Tant que l'on choisit le plan pour champ de représentation d'une variable complexe, on ne saisit pas bien l'analogie qui existe entre les résultats correspondants aux valeurs nulles et aux valeurs infinies de la variable. Cette analogie ressort avec évidence lorsqu'on adopte un mode de représentation qui permet de fixer un point réel et déterminé pour répondre aux valeurs infinies de la variable. C'est ce qu'a fait Riemann, en reportant sur la sphère, à l'aide de la projection stéréographique, tous les points du plan, y compris ceux qui sont à l'infini. M. Neumann a complété cette construction au moyen d'un nouveau plan, qu'il appelle le plan *antipode*, et dont les points correspondent aux valeurs inverses $\frac{1}{z}$ de la variable indépendante z.

Dans le Chapitre IV, consacré à cette étude, M. Hoüel reproduit, d'après les ouvrages de MM. Durège et Neumann, les démonstrations de divers théorèmes, établis d'une autre manière par Cauchy, et donne un aperçu des recherches de Riemann sur la détermination, au moyen du *Principe de Dirichlet*, d'une fonction dont on connaît les valeurs sur un contour donné et les points de discontinuité à l'intérieur de ce contour.

Le Chapitre V traite de différentes applications analytiques des théories précédentes :

1° Théorèmes de Cauchy sur la détermination du nombre des racines d'une équation comprises dans une aire donnée. Extension du théorème de Sturm aux racines imaginaires.

2° Développement des fonctions en série périodique en partant du théorème de Laurent. Application à la fonction perturbatrice.

3° Série de Bürmann, d'où celle de Lagrange se déduit comme cas particulier. Conditions de convergence de cette série. Application au problème de Kepler : dans ce dernier calcul, on voit bien l'utilité de la notation des fonctions hyperboliques et des Tables de ces fonctions, telles que celles que M. Hoüel a publiées dans son *Recueil de formules et de Tables numériques*.

4° Décomposition d'une fonction en une série, finie ou infinie, de fractions simples. La considération du reste de la série, dans le cas d'un nombre infini de termes, donne au développement la rigueur indispensable.

5° Du développement en fractions simples du logarithme d'une fonction, on déduit le développement de la fonction en un produit infini.

6° La partie la plus importante de ce Chapitre traite du calcul des intégrales définies. L'Auteur ramène au théorème fondamental du Chapitre II les méthodes données à diverses reprises par Cauchy pour la détermination de classes très-générales d'intégrales définies. Il précise certaines conditions, vaguement indiquées par Cauchy, et nécessaires pour la validité des formules, et son travail facilite singulièrement la lecture du beau et difficile Mémoire que Cauchy a publié dans les *Annales de Gergonne*, et que M. l'abbé Moigno a reproduit en partie dans ses *Leçons de Calcul intégral*.

Dans ces deux fascicules, M. Hoüel a rassemblé, avec la lucidité d'exposition d'un professeur expérimenté, les plus importants résultats et les démonstrations les plus simples que contiennent les ouvrages allemands qui ont traité le même sujet. Il y a joint quelques perfectionnements de détail qui lui appartiennent en propre. Un tel travail, consciencieusement exécuté, avec des prétentions modestes, pourra rendre d'utiles services aux commençants, en leur épargnant la plupart des difficultés qui rebutent si souvent le lecteur qui aborde sans préparation les œuvres des inventeurs.

Puisse l'accueil que recevra cet Ouvrage encourager l'Auteur à tenir sa promesse de donner dans une *troisième Partie* un exposé des théories de Riemann, encore si peu répandues dans notre pays, et que nos voisins cultivent avec tant d'ardeur et de succès!

QUESTIONS.

925. Démontrer qu'en développant, suivant les puissances ascendantes de λ, la quantité

$$\frac{x+\frac{\lambda}{1}+\frac{\lambda^2}{1.2}x+\frac{\lambda^3}{1.2.3}+\frac{\lambda^4}{1.2.3.4}x+\ldots}{1+\frac{\lambda}{1}x+\frac{\lambda^2}{1.2}+\frac{\lambda^3}{1.2.3}x+\frac{\lambda^4}{1.2.3.4}+\ldots}=\frac{e^{\lambda}(1+x)-e^{-\lambda}(1-x)}{e^{\lambda}(1+x)-e^{-\lambda}(1-x)},$$

le coefficient de λ^n est un polynôme L_n du $n^{ième}$ degré en x, contenant le facteur x^2-1, et que l'équation

$$\frac{L_n}{x^2-1}=0$$

a toutes ses racines réelles, inégales et comprises entre -1 et $+1$. (Ch. Hermite.)