NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

CAYLEY

Sur la construction graphique de la courbe d'ombre ou de pénombre pendant la durée d'une éclipse de soleil

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 9 (1870), p. 289-291

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1870_2_9__289_0>

SUR LA CONSTRUCTION GRAPHIQUE DE LA COURBE D'OMBRE OU DE PÉNOMBRE PENDANT LA DURÉE D'UNE ÉCLIPSE DE SOLEIL;

PAR M. CAYLEY.

(Traduit de l'anglais. Extrait des *Monthly Notices*, etc., avril 1870.)

La courbe en question, soit la courbe de pénombre, est l'intersection d'une sphère par un cône droit; je veux montrer que la projection stéréographique de cette courbe peut être considérée comme l'enveloppe d'un cercle variable, dont le centre décrit une conique donnée et qui coupe orthogonalement un cercle fixe; ce cercle fixe est d'ailleurs la projection du cercle suivant lequel la sphère est coupée par le plan passant par le centre de cette sphère et par le centre du cône, autrement dit, par le plan axial.

La construction à laquelle on arrive ainsi, est celle que M. Casey a donnée pour les quartiques bi-circulaires (*), et il ne serait pas difficile de prouver qu'effectivement la projection stéréographique de la courbe de pénombre est une quartique bi-circulaire.

La construction indiquée repose sur cette remarque, qu'un cône droit peut être considéré comme l'enveloppe d'une sphère dont le centre se meut sur une ligne droite et dont le rayon est proportionnel à la distance du centre à un point fixe de la droite, et sur le théorème suivant de Géométrie plane:

(*) Courbes du quatrième degré ayant pour points doubles les deux points de la droite de l'infini communs à tous les cercles du plan.
(*Note du Traducteur.*)

Étant donnés un cercle fixe et un cercle variable dont le centre est sur une droite donnée, et dont le rayon est proportionnel à la distance du centre à un point fixe de la droite (ou, ce qui revient au même, qui est tangent à une droite fixe), le lieu du pôle, par rapport au cercle fixe, de la corde commune aux deux cercles (ou, ce qui est la même chose, le lieu du centre du cercle qui coupe orthogonalement le cercle fixe et passe par les points d'intersection du cercle fixe et du cercle variable), est une conique.

Pour fixer les idées, soient P le centre du cercle variable, AB la corde qu'il a en commun avec le cercle, Q le centre du cercle qui passe par les points A et B et coupe le cercle fixe orthogonalement : le lieu du point Q est une conique.

Pour le prouver, soit

$$x^2 + y^2 = 1$$

l'équation du cercle fixe ; et

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = \gamma^2$$

l'équation du cercle variable.

La loi de variation à laquelle il est assujetti revient à dire que α, β, γ sont des fonctions linéaires d'un paramètre variable θ ; l'équation de la corde commune AB est

$$-2\alpha x - 2\beta y + 1 + \alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2 = 0,$$

équation qui renferme θ au carré ; on en conclut que l'enveloppe de la corde commune est une conique ; le lieu du pôle de AB, par rapport au cercle fixe, c'est-à-dire le lieu du point Q, est donc aussi une conique.

Considérons maintenant, dans l'espace, une figure dans laquelle les cercles sont remplacés par des sphères. On a une sphère fixe et une sphère variable ayant son centre sur une droite donnée, son rayon étant proportionnel à la distance du centre à un point de la droite donnée. L'enveloppe de la sphère variable est un cône droit; l'intersection du cône avec la sphère fixe est l'enveloppe du petit cercle AB, qui résulte de l'intersection de la sphère fixe avec la sphère mobile. Ce cercle AB est aussi l'intersection de la sphère fixe par une sphère qui la coupe orthogonalement; en se reportant à ce qui a été dit plus haut, on voit que le lieu du centre Q de cette sphère est une conique.

La courbe de pénombre est donc l'enveloppe d'un cercle AB, qui résulte de l'intersection d'une sphère fixe par une sphère coupant celle-ci orthogonalement et ayant son centre sur une conique.

Il est évident que le cercle AB coupe orthogonalement le grand cercle qui résulte de l'intersection de la sphère fixe par le plan axial, cercle que j'appellerai le *cercle axial*.

Faisons maintenant une projection stéréographique de toute la figure; le cercle AB a pour projection un cercle variable coupant orthogonalement le cercle qui est la projection du cercle axial et qui a pour centre le point Q′, projection du point Q. Mais le lieu du point Q est une conique; il en est donc de même du lieu du point Q′. Donc la projection de la courbe de pénombre est l'enveloppe d'un cercle variable dont le centre décrit une conique et qui coupe orthogonalement un cercle fixe.