LAGUERRE

Note sur l'article précédent

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 9 (1870), p. 291-293

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1870_2_9__291_1>

NOTE SUR L'ARTICLE PRÉCÉDENT;

PAR M. LAGUERRE.

M. Cayley, dans la Note qui précède, attribue à M. Casey l'élégant théorème qui permet de construire la courbe de pénombre comme l'enveloppe d'une série de cercles; j'ignore dans quel Mémoire et à quelle époque M. Casey a énoncé cette propriété; je crois devoir toutefois rappeler que M. Moutard l'avait fait connaître dès 1862.

A cette époque, il avait énoncé la proposition suivante : *Toute anallagmatique du quatrième ordre* (quartique bi-circulaire de M. Cayley) *peut être considérée de quatre façons différentes comme l'enveloppe de cercles coupant orthogonalement un cercle fixe, tandis que leurs centres décrivent des coniques; les quatre coniques au moyen desquelles on peut engendrer ainsi la courbe sont homofocales* (*).

J'ai démontré très-simplement, dans une Note insérée au *Bulletin de la Société Philomathique* sur les courbes résultant de l'intersection d'une sphère et d'une surface du second degré (mars 1867), que la projection stéréographique d'une courbe de cette espèce pouvait être, comme l'indique la proposition de M. Moutard, regardée comme l'enveloppe de cercles.

Je reproduis ici cette démonstration.

Considérons une courbe K résultant de l'intersection d'une sphère S, par une surface du second degré. On peut, par cette courbe, faire passer quatre cônes. Soit (C) l'un de ces cônes, c son sommet.

Le cône (C) étant l'enveloppe des divers plans qui lui sont tangents, la courbe K est l'enveloppe des cercles suivant lesquels ces plans tangents coupent la sphère. Les plans de ces cercles passant par le point c, ces cercles eux-mêmes coupent à angles droits le cercle Γ suivant

(*) Voir la Note : *Sur les arcs des courbes planes et sphériques considérées comme enveloppes de cercles;* par M. MANNHEIM (*Journal de Liouville*, 1862) et ma Note intitulée : *Théorèmes généraux sur les courbes planes* (*Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, 1865).

lequel la sphère est coupée par le plan polaire de c. Les pôles des plans de ces cercles décrivent une conique G, qui est la polaire du cône (C).

La courbe K peut donc être considérée comme l'enveloppe de cercles qui coupent orthogonalement le cercle Γ, les pôles des plans de ces cercles décrivant une conique G.

Faisons maintenant une projection stéréographique de la figure.

La courbe K se projette suivant une courbe k, qui est l'enveloppe des cercles h suivant lesquels se projettent les cercles de la sphère dont l'enveloppe est K.

Ces cercles h coupent orthogonalement le cercle γ, projection de Γ; de plus, leurs centres décrivent la conique projection de G, en vertu du théorème bien connu de M. Chasles :

Si l'on projette un cercle stéréographiquement, le centre du cercle suivant lequel il se projette est la projection du pôle, par rapport à la sphère, du plan du cercle projeté.

La courbe K étant située sur quatre cônes du second degré, la proposition de M. Moutard se déduit immédiatement de ce qui précède.

Pour les développements auxquels peut donner lieu cette question, je renverrai le lecteur à la Note que j'ai citée plus haut.