

A. VACHETTE

**Permutations rectilignes de $3q$ lettres
égales 3 à 3, quand 3 lettres consécutives
sont distinctes ; calcul de la formule
générale ; applications**

Nouvelles annales de mathématiques 2^e série, tome 15
(1876), p. 145-154

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1876_2_15__145_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1876, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

**PERMUTATIONS RECTILIGNES DE $3q$ LETTRES ÉGALES 3 A 3,
QUAND 3 LETTRES CONSÉCUTIVES SONT DISTINCTES;
CALCUL DE LA FORMULE GÉNÉRALE; APPLICATIONS;**

PAR M. A. VACHETTE.

[SUITE(*).]

**VII. Parts que donnent les permutations
à un intervalle.**

1^o Part des $N_{q-1}(s_3)$.

Cette espèce contient $\frac{1}{3(q-1)} N_{q-1}(s_3)$ tournantes.

Avec le premier h , on ferme s_3 de deux manières (V), et, si l'on commence la tournante par cet h , portant ainsi le numéro 1, on aura

$$(VI) \quad \frac{(3q-7)(3q-8)}{2}$$

systèmes de places pour les deux autres h ; ainsi une tournante de l'espèce $N_{q-1}(s_3)$ en fournit $(3q-7)(3q-8)$ à l'espèce $C_{q,3}$; ce seront des tournantes complètes, car, deux des trois a faisant partie de s_3 , il n'y a point pour les a de positions symétriques. La part fournie en tournantes sera

$$\frac{1}{3(q-1)} (3q-7)(3q-8) N_{q-1}(s_3),$$

et, en permutations,

$$\frac{q}{q-1} (3q-7)(3q-8) N_{q-1}(s_3).$$

(*) *Nouvelles Annales*, 2^e serie, t. XV, p. 114.

2° Part des $N_{q-1}(s_4)$.

Si l'on ferme s_4 avec un seul h on aura $\frac{(3q-7)(3q-8)}{2}$

systèmes de places pour les deux autres.

Si on le ferme avec deux h , il y a (pour $q=6$)

$$\underline{a^h b a^h b}$$

$3q-8$ places pour le troisième, autant moins une qu'il reste de lettres en dehors de s_4 .

Le nombre des systèmes est

$$3q-8 + \frac{(3q-7)(3q-8)}{2} = \frac{(3q-5)(3q-8)}{2}.$$

La part fournie est

$$\frac{q}{2(q-1)} (3q-5)(3q-8) N_{q-1}(s_4).$$

3° Part des $N_{q-1}(s_5)$.

On ferme s_5 de deux manières, avec deux h (V); pour chacune d'elles ($q=6$), il y a pour le troisième h

$$\underline{ab'ab'a}$$

$3q-8$ places, autant de places qu'il reste de lettres en dehors de s_5 ; on a donc $2(3q-8)$ systèmes. La part est

$$\frac{2q}{q-1} (3q-8) N_{q-1}(s_5).$$

4° Part des $N_{q-1}(s_6)$.

Si l'on ferme s_6 avec deux h , on aura, pour le troisième, $3q-8$ places

$$\underline{ab'ab'ab}$$

autant plus une qu'il reste de lettres en dehors de s_6 .

On peut encore le fermer d'une autre manière avec les trois h (V).

(147)

Il y a $3q - 8 + 1$ ou $3q - 7$ systèmes. La part est

$$\frac{q}{q-1} (3q-7) N_{q-1}(s_6).$$

Cette part semble illusoire pour $q = 3$; mais, comme $N_2(s_6)$ est le seul terme d'ordre 2 qui fournisse des $C_{3,3}$, qu'on sait que $C_{3,3} = P_3$, et $N_2(s_6) = 2$, il faut que le facteur de $N_2(s_6)$ soit $\frac{6}{2}$ ou 3, ce qui a lieu. Pour les $C_{3,3}$, on a seulement la variété

$$abcabcabc,$$

ce qui donne bien $C_{3,3} = 6 = P_3$.

5° Part des $N_{q-1}(p_5)$.

On peut fermer p_5 avec deux h de trois manières (V). De la première manière ($q = 6$), il y a $3q - 9$ places pour le troisième h

$$\underline{a}bac'a' \dots \dots \dots \dots \dots'$$

autant, moins une, qu'il reste de lettres en dehors de p_5 .

De chacune des deux autres manières, il y a $3q - 8$ places, autant qu'il reste de lettres

$$\underline{ab'ac'a} \dots \dots \dots \dots \dots'$$

On a $3q - 9 + 2(3q - 8) = 9q - 25$ systèmes. La part est

$$\frac{q}{q-1} (9q-25) N_{q-1}(p_5).$$

6° Part des $N_{q-1}(p_6)$.

Il y a deux manières de fermer p_6 avec deux h .

De la première manière ($q = 6$), il y a, pour le troisième h , $3q - 9$ places, autant qu'il reste de lettres en dehors de p_6

$$\underline{a'bac'ac'} \dots \dots \dots \dots \dots'$$

De la seconde, il y en a $3q - 8$, autant plus une, qu'il reste de lettres

$$\underline{ab'ac'ac'}. \dots \dots \dots \dots \dots$$

On peut aussi fermer p_6 d'une manière avec les trois h .

On a $3q - 9 + 3q - 8 + 1$ ou $6q - 16$ systèmes. La part est

$$\frac{q}{q-1} (6q-16) N_{q-1}(p_6).$$

7° Part des $N_{q-1}(p_7)$.

On peut fermer p_7 d'une manière avec deux $h(V)$; il y a pour le troisième $3q - 9$ places, autant plus une qu'il reste de lettres en dehors de p_7

$$\underline{ab'abc'bc'}. \dots \dots \dots \dots \dots$$

On peut aussi fermer p_7 de deux manières avec les trois $h(V)$.

On a $3q - 9 + 2$ ou $3q - 7$ systèmes. La part est

$$\frac{q}{q-1} (3q-7) N_{q-1}(p_7).$$

8° Parts des $N_{q-1}(t_8)$ et des $N_{q-1}(t'_8)$.

On peut fermer t_8 ou t'_8 de quatre manières (V) . Les parts sont

$$\frac{4q}{q-1} N_{q-1}(t_8), \quad \frac{4q}{q-1} N_{q-1}(t'_8).$$

9° Parts des $N_{q-1}(t_9)$ et des $N_{q-1}(t'_9)$.

On peut fermer t_9 ou t'_9 de deux manières (V) . Les parts sont

$$\frac{2q}{q-1} N_{q-1}(t_9), \quad \frac{2q}{q-1} N_{q-1}(t'_9).$$

Il y a exception pour $q = 4$ dans le cas du t_9 , comme on l'a vu (V) : la part est $\frac{4}{3} N_3(t_9)$ au lieu de $\frac{8}{3} N_3(t_9)$.

10° Parts des $N_{q-1}(t_{10})$.

On ne peut fermer t_{10} que d'une manière (V). La part est

$$\frac{q}{q-1} N_{q-1}(t_{10}).$$

La somme S' de ces douze parts, en y mettant en évidence le facteur $\frac{q}{q-1}$, s'obtient par

$$\begin{aligned} \frac{q-1}{q} S' = & N_{q-1}(t_{10}) + 2N_{q-1}(t_9) + 2N_{q-1}(t_8) + 4N_{q-1}(t_7) \\ & + 4N_{q-1}(t_6) + (3q-7)N_{q-1}(p_7) \\ & + (6q-16)N_{q-1}(p_6) + (9q-25)N_{q-1}(p_5) \\ & + (3q-7)N_{q-1}(s_6) + 2(3q-8)N_{q-1}(s_5) \\ & + \frac{1}{2}(3q-5)(3q-8)N_{q-1}(s_4) \\ & + (3q-7)(3q-8)N_{q-1}(s_3). \end{aligned}$$

VIII. *Parts que donnent les permutations à deux intervalles.*

On a trouvé treize espèces; nous en compterons quatorze, parce que pour l'une d'elles, $N_{q-1}(2s_3)$, la part fournie n'est point la même, selon que les s_3 sont ou non consécutifs; on considère les deux espèces $N_{q-1}(2s_3)_0$ et $N_{q-1}(2s_3)_n$, les indices 0 et n marquant qu'il y a ou non séquence.

1° Part des $N_{q-1}(2s_3)$.

En général, on a deux manières de fermer chaque s_3 avec un h , ce qui donne quatre manières pour l'ensemble des deux s_3 , et, pour chacune des quatre manières, il y a $3q-9$ places pour le troisième h , ce qui donne $4(3q-9)$ ou $12q-36$ systèmes; il y a autant de places qu'il reste de lettres en dehors des s_3 :

$$\begin{array}{l} \underline{a'ba} \quad ' . ' . ' . ' . \quad \underline{cd'c} \quad ' . ' . ' . ' . , \\ \underline{a'ba} \quad ' . ' . ' . ' . \quad \underline{c'dc} \quad ' . ' . ' . ' . , \\ \underline{ab'a} \quad ' . ' . ' . ' . \quad \underline{cd'c} \quad ' . ' . ' . ' . , \\ \underline{ab'a} \quad ' . ' . ' . ' . \quad \underline{c'dc} \quad ' . ' . ' . ' . . \end{array}$$

Si les deux s_3 sont consécutifs, la quatrième manière laisse une place de plus; au lieu de $12q - 36$ on a $12q - 35$ systèmes :

$$\begin{array}{l} \underline{a'ba'cd'c} \quad '...'...'..'., \\ \underline{a'ba'c'dc} \quad '...'...'..'., \\ \underline{ab'a'cd'c} \quad '...'...'..'., \\ \underline{ab'a'c'dc} \quad '...'...'..'.. \end{array}$$

La part est

$$\frac{q}{q-1} [(12q - 36) N_{q-1}(2s_3)_n + (12q - 35) N_{q-1}(2s_3)_0];$$

et, comme

$$N_{q-1}(2s_3)_n = N_{q-1}(2s_3) - N_{q-1}(2s_3)_0,$$

on comptera

$$\frac{q}{q-1} [(12q - 36) N_{q-1}(2s_3) + N_{q-1}(2s_3)_0].$$

2° Part des $N_{q-1}(s_4, s_3)$.

Si l'on ferme s_4 avec un seul h , et s_3 de deux manières avec un autre h (V), il y a, pour le troisième h , $3q - 9$ places

$$\underline{ab'a} \quad '...'..' \quad \underline{cd'cd} \quad '...'..' ,$$

autant, plus une, qu'il reste de lettres en dehors des deux intervalles, d'où $2(3q - 9)$ systèmes.

Si l'on ferme s_4 avec deux h , il y a deux manières de fermer s_3 .

On a $2(3q - 9) + 2$ ou $2(3q - 8)$ systèmes. La part est

$$\frac{2q(3q-8)}{q-1} N_{q-1}(s_4, s_3).$$

3° Part des $N_{q-1}(s_5, s_3)$.

On ferme s_3 de deux manières avec deux h , et s_5 de

deux manières. On a quatre systèmes. La part est

$$\frac{4q}{q-1} N_{q-1}(s_6, s_3).$$

4° Part des $N_{q-1}(s_6, s_3)$.

On ferme s_6 d'une manière avec deux h , et s_3 de deux.

La part est

$$\frac{2q}{q-1} N_{q-1}(s_6, s_3).$$

5° Part des $N_{q-1}(p_3, s_3)$.

On ferme p_3 de trois manières avec deux h , et s_3 de deux. La part est

$$\frac{6q}{q-1} N_{q-1}(p_3, s_3).$$

6° Part des $N_{q-1}(p_6, s_3)$.

On ferme p_6 de deux manières avec deux h , s_3 de deux. La part est

$$\frac{4q}{q-1} N_{q-1}(p_6, s_3).$$

7° Part des $N_{q-1}(p_7, s_3)$.

On ferme p_7 de deux manières avec deux h , s_3 de deux. La part est

$$\frac{2q}{q-1} N_{q-1}(p_7, s_3).$$

8° Part des $N_{q-1}(2s_4)$.

On peut fermer chaque s_4 avec un h , et, pour le troisième h , il y a $3q - 9$ places, autant de places

$$\underline{ab'ab} \text{ ' ' ' ' ' ' } \underline{cd'cd} \text{ ' ' ' ' ' '},$$

plus deux, qu'il reste de lettres en dehors des s_4 ; d'où $3q - 9$ systèmes.

On peut fermer l'un des s_4 avec deux h , et l'autre avec un seul; d'où deux systèmes.

(152)

Il y a en tout $3q - 9 + 2$ ou $3q - 7$ systèmes. La part est

$$\frac{q(3q-7)}{q-1} N_{q-1}(2s_4).$$

9° Part des $N_{q-1}(s_5, s_4)$.

On ferme s_4 avec un h , et s_5 de deux manières avec deux h . La part est

$$\frac{2q}{q-1} N_{q-1}(s_5, s_4).$$

10° Part des $N_{q-1}(s_6, s_4)$.

On ferme s_6 et s_4 chacun d'une manière. La part est

$$\frac{q}{q-1} N_{q-1}(s_6, s_4).$$

11° Part des $N_{q-1}(p_8, s_4)$.

On ferme s_4 d'une manière, et p_8 de trois. La part est

$$\frac{3q}{q-1} N_{q-1}(p_8, s_4).$$

12° Part des $N_{q-1}(p_6, s_4)$.

On ferme s_4 d'une manière, p_6 de deux. La part est

$$\frac{2q}{q-1} N_{q-1}(p_6, s_4).$$

13° Part des $N_{q-1}(p_7, s_4)$.

On ferme p_7 et s_4 chacun d'une manière. La part est

$$\frac{q}{q-1} N_{q-1}(p_7, s_4).$$

La somme de ces treize parts, désignée par S'' , donne, en mettant en évidence le facteur $\frac{q}{q-1}$,

$$\begin{aligned} \frac{q-1}{q} S'' = & N_{q-1}(p_7, s_4) + 2N_{q-1}(p_7, s_3) + 2N_{q-1}(p_6, s_4) \\ & + 4N_{q-1}(p_6, s_3) + 3N_{q-1}(p_5, s_4) + 6N_{q-1}(p_5, s_3) \\ & + N_{q-1}(s_6, s_4) + 2N_{q-1}(s_6, s_3) + 2N_{q-1}(s_5, s_4) \\ & + 4N_{q-1}(s_5, s_3) + (3q-7)N_{q-1}(2s_4) \\ & + (3q-8)N_{q-1}(s_4, s_3) + (12q-36)N_{q-1}(2s_3) \\ & + N_{q-1}(2s_3, s_4). \end{aligned}$$

IX. *Parts que donnent les permutations à trois intervalles.*

1° Part des $N_{q-1}(3s_3)$.

Chaque s_3 peut être fermé de deux manières, d'où huit systèmes; la part est

$$\frac{8q}{q-1} N_{q-1}(3s_3).$$

2° Part des $N_{q-1}(2s_3, s_4)$.

On ferme chaque s_3 de deux manières, et s_4 d'une. La part est

$$\frac{4q}{q-1} N_{q-1}(2s_3, s_4).$$

3° Part des $N_{q-1}(s_3, 2s_4)$.

On ferme chaque s_4 d'une manière, et s_3 de deux. La part est

$$\frac{2q}{q-1} N_{q-1}(s_3, 2s_4).$$

4° Part des $N_{q-1}(3s_4)$.

On ferme chaque s_4 d'une manière. La part est

$$\frac{q}{q-1} N_{q-1}(3s_4).$$

La somme de ces quatre parts, désignée par S''' donne, en mettant en évidence le facteur $\frac{q}{q-1}$,

$$\frac{q-1}{q} S''' = N_{q-1}(3s_4) + 2N_{q-1}(2s_4, s_3) + 4N_{q-1}(s_4, 2s_3) + 8N_{q-1}(3s_3).$$

X. *Formule générale d'abaissement.*

On a évidemment la formule abrégée

$$C_{q,3} = \frac{1}{2} q (3q - 7) (3q - 8) C_{q-1,3} + S' + S'' + S''',$$

mais il est nécessaire de la développer. On multiplie tout

par $q - 1$, et l'on a

$$\begin{aligned}
 \frac{q-1}{q} C_{q,3} = & \frac{1}{2} (q-1) (3q-7) (3q-8) C_{q-1,3} \\
 & + N_{q-1}(t_{10}) + 2N_{q-1}(t_9) + 2N_{q-1}(t'_9) + 4N_{q-1}(t_8) \\
 & + 4N_{q-1}(t'_8) + (3q-7) N_{q-1}(p_7) + (6q-16) N_{q-1}(p_6) \\
 & + (9q-25) N_{q-1}(p_5) + (3q-7) N_{q-1}(s_6) \\
 & + 2(3q-8) N_{q-1}(s_5) + \frac{1}{2} (3q-5) (3q-8) N_{q-1}(s_4) \\
 & + (3q-7) (3q-8) N_{q-1}(s_3) + N_{q-1}(p_7, s_4) \\
 & + 2N_{q-1}(p_7, s_3) + 2N_{q-1}(p_6, s_4) + 4N_{q-1}(p_6, s_3) \\
 & + 3N_{q-1}(p_5, s_4) + 6N_{q-1}(p_5, s_3) + N_{q-1}(s_6, s_4) \\
 & + 2N_{q-1}(s_6, s_3) + 2N_{q-1}(s_5, s_4) + 4N_{q-1}(s_5, s_3) \\
 & + (3q-7) N_{q-1}(2s_4) + 2(3q-8) N_{q-1}(s_4, s_3) \\
 & + (12q-36) N_{q-1}(2s_3) + N_{q-1}(2s_3)_0 \\
 & + N_{q-1}(3s_4) + 2N_{q-1}(2s_4, s_3) + 4N_{q-1}(s_4, 2s_3) \\
 & + 8N_{q-1}(3s_3).
 \end{aligned}$$

Il y a trente et un termes dans la formule. Le premier est calculé par abaissement d'ordre, comme l'est $C_{q,3}$ lui-même. (A suivre.)